Решения и ответы к вариантам, приведенным ниже, можно найти в книге на стр. 164-185.

Вариант 42 (1990 год)

1. Дана функция $y = 8^x - 3 \cdot 2^x$.
   а) Решите уравнение $y = -2$.
   б) Найдите наименьшее значение функции y.
   в) Решите неравенство $y \leqslant 4^{x+\frac{1}{2}}$.
   г) Сколько на графике функции y пар точек, симметричных друг другу относительно начала координат?

2. Дана функция $y = \cos 2x + \cos x - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$.
   а) Выразите y как функцию от $\cos x$.
   б) Решите уравнение $y = -3$.
   в) Докажите, что при всех значениях x выполняется неравенство $y \leqslant 0$.
   г) Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $y = a$ на отрезке $[0; \pi]$?

3. Множество C точек комплексной плоскости задано уравнением $|iz + 2 + 2i| = 1$.
   а) Нарисуйте множество C.
   б) Найдите такие точки $z \in C$, расстояние от которых до мнимой оси равно $13/5$.
   в) Найдите множество значений $|z|$ при $z \in C$.
   г) Найдите множество значений $\arg z$ в $[0; 2\pi)$ при $z \in C$.

4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна единице. Обозначим: k_1, k_2 — отношения длин двух его ребер к третьему; $S(k_1, k_2)$ — площадь поверхности этого параллелепипеда.
   а) Вычислите $S(k_1, k_2)$.
   б) Докажите, что $S(k_1, k_2) \leqslant 2$ при $k_1 = k_2$.
   в) Пусть $k_1 = 2$. Найдите наибольшее значение S.

г) Пусть $k_1 = ak_2$, a — действительный параметр. При каком значении k_2 площадь S наибольшая?

5. Дана функция $y = x^2$ и точка $B(3, 5)$.

а) Найдите координаты точек касания с графиком данной функции тех касательных, которые проходят через точку B.

б) Пусть A — точка касания, у которой меньшая абсцисса, а C — точка на графике с абсциссой $x = 3$. Найдите площадь S треугольника ABC.

в) Обозначим через s площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезками BC, AB и дугой AC графика данной функции. Покажите, что $s = \frac{2}{3}S$.

г) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произвольной точки B подграфика данной функции.

Вариант 43 (1990 год)

1. Дана функция $y = 27^x - 4 \cdot 3^{x+1}$.

а) Решите уравнение $y = -9$.

б) Найдите наименьшее значение функции y.

в) Решите неравенство $y \leqslant 0$.

г) Сколько на графике функции y пар точек, симметричных друг другу относительно начала координат?

2. Дана функция $y = 4\sin^2 x + \cos 4x$.

а) Выразите y как функцию от $\cos 2x$.

б) Решите уравнение $y = 1$.

в) Найдите область значений функции y.

г) Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $y = a$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$?

Задачи 3, 4, 5 — см. вариант 42.

Вариант 44 (1990 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 42.

3. Дана функция $y = \frac{1}{2}x^2$.

а) Найдите точки пересечения графика этой функции и прямой, проходящей через точку $M_0(0, \frac{3}{2})$ параллельно биссектрисе первого координатного угла.

б) Найдите площадь сегмента, ограниченного отрезком этой прямой и дугой графика между точками ее пересечения с этим графиком.

Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку M, и обозначим x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) абсциссы точек ее пересечения с графиком данной функции.

в) Покажите, что площадь S соответствующего сегмента может быть найдена по формуле $S = \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3$.

г) Найдите наименьшее значение площади S.

4. Множество C точек комплексной плоскости задано уравнением $|1-(i+1)z| = |i(z-1)+3|$.

а) Нарисуйте множество C.

б) Найдите такие точки $z \in C$, расстояние от которых до вещественной оси равно трем.

в) Найдите множество значений $|z|$ при $z \in C$.

г) Найдите множество значений $\arg z$ в $[0; 2\pi)$ при $z \in C$.

Вариант 45 (1990 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 43.

3. Дана функция $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}$.

а) Найдите уравнение той касательной к графику данной функции, которая проходит через точку его пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

б) Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от первого координатного угла.

в) Пусть точка $M(x_0, y_0)$, где $x_0, y_0 > 0$, лежит на графике данной функции. Найдите площадь S треугольника, который отсекается от первого координатного угла касательной к этому графику, проходящей через точку M, и покажите, что $S = \dfrac{9}{x_0 y_0}$.

г) Найдите наименьшее возможное значение площади S.

Задача 4 — см. задачу 3 варианта 42.

Вариант 46 (1991 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_2^3 x - 3\log_2^2 x$.
   а) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.
   б) Решите уравнение $f(x) = -4$.
   в) Выясните, при каких значениях a неравенство $f(x) < a\log_2 x$ выполняется при всех x из отрезка $[2; 4\sqrt{2}]$.
   г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a.

2. Дана функция $f(x) = \sin x \sin 3x$.
   а) Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.
   б) Найдите наименьшее положительное решение системы
$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ \cos 5x = 1. \end{cases}$$
   в) Найдите область значений функции f.
   г) Пусть $g(t)$ — наименьшее значение f на отрезке $[t; t + \frac{\pi}{2}]$. Найдите наибольшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

3. Даны три комплексных числа: $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3i)$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.
   а) Найдите расстояние от точки z_1 до фигуры, задаваемой уравнением $|z - z_3| = 1$.
   б) Изобразите множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z_2 z - z_1 z_2| = |z_3 z - z_2 z_3|$.
   в) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_2, z_3, а U и V — множества точек, которые пробегают при этом $u = z_2 z$ и $v = z_3 z$. Изобразите пересечение множеств U и V.
   г) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_1, z_3. Изобразите множество всех точек, которое пробегает при этом $w = z^2$.

4. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Точки пересечения прямой $x = m$ с графиком функции f и осью абсцисс обозначаются соответственно $A(m)$ и $B(m)$, касательная к графику в точке $A(m)$ обозначается $l(m)$.
   а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямой $x = m$, равна $\frac{2}{3}mf(m)$.
   б) Пусть C — точка пересечения прямой $l(m)$ с осью абсцисс. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника AOC и прямолинейного ABC.
   в) Пусть M и N — точки графика функции f, такие, что прямая MN параллельна $l(4)$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой MN, осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек M и N, не превосходит 32.
   г) Пусть $y = g(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0; +\infty)$, такая, что $g(4) = 2$ и при любом $m \geqslant 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции f,

осями координат и прямой $x = m$, равна $\frac{2}{3}mg(m)$. Докажите, что $g(x) = \sqrt{x}$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n - 3$ при всех $n \in \mathbb{N}$.
   а) Докажите, что если a — целое, то x_n — нечетное число при всех $n \geqslant 2$.
   б) Выясните, при каком значении a последовательность $\{x_n\}$ является стационарной.
   в) Выясните, при каких значениях a последовательность $\{x_n\}$ является геометрической прогрессией.
   г) Пусть $a = 4$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

Вариант 47 (1991 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_3^3 x - 5\log_3^2 x + 8\log_3 x$.
   а) Решите неравенство $f(x) < 0$.
   б) Решите уравнение $f(x) = 4$.
   в) Выясните, при каких значениях a неравенство $f(x) > a\log_3 x$ выполняется при всех x из множества $[27; +\infty)$.
   г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a.

2. Дана функция $f(x) = \cos x \cos 3x$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -\frac{1}{2}$.
   б) Найдите наименьшее положительное решение системы

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

   в) Найдите область значений функции f.
   г) Пусть $g(t)$ — наибольшее значение f на отрезке $[t; t + \frac{\pi}{2}]$. Найдите наименьшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

Задачи 3, 4, 5 — см. вариант 46.

\\

Вариант 48 (1991 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 46.

3. Пусть z — комплексное число, $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ — соответствующие точки плоскости.
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то треугольник ABC равнобедренный.
   б) Найдите все такие z, что треугольник ABC равносторонний.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек z, при которых треугольник ABC равнобедренный.
   г) Среди всех z, таких, что $|z| = 1$, найдите те, при которых площадь треугольника ABC наибольшая.

Задача 4 — см. вариант 46.

Вариант 49 (1991 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 47.

3. Пусть z — комплексное число, $A(z^2)$, $B(z^3)$, $C(z^4)$ — соответствующие точки плоскости.
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то треугольник ABC равнобедренный.
   б) Найдите все такие z, что треугольник ABC равносторонний.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек z, при которых треугольник ABC равнобедренный.
   г) Среди всех z, таких, что $|z| = 1$, найдите те, при которых площадь треугольника ABC наибольшая.

4. Дана функция $f(x) = x^2$. Точки пересечения прямой $x = m$ с графиком функции f и осью абсцисс обозначаются соответственно $A(m)$ и $B(m)$, касательная к графику в точке $A(m)$ обозначается $l(m)$.
   а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямой $x = m$, равна $\frac{1}{3}mf(m)$.
   б) Пусть C — точка пересечения прямой $l(m)$ с осью ординат. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника AOC и прямолинейного ABC.
   в) Пусть M и N — такие точки графика функции f, что прямая MN параллельна $l(2)$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой MN, осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек M и N, не превосходит 32.
   г) Пусть $y = g(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0; +\infty)$, такая, что $g(2) = 4$ и при любом

$m \geqslant 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции g, осями координат и прямой $x = m$, равна $\frac{1}{3}mg(m)$. Докажите, что $g(x) = x^2$.

Вариант 50 (1992 год)

1. Дана функция $f(x) = \lg(1/x)\,\lg(10^5 x)\,\lg(x/10^3)$.
   а) Решите неравенство $f(x) \leqslant 0$.
   б) Решите уравнение $f(x) = f(1/x)$.
   в) При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два различных корня?
   г) Пусть $n(b)$, где $b > 0$ и $b \neq 1$, — число различных корней уравнения $f(x) = f(bx)$. Постройте график функции n.

2. Даны функции $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$.
   а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.
   б) Пусть $A(m)$ и $B(m)$ — это точки пересечения прямой $x = m$ с графиками функций f и g. При каких m длина отрезка с концами в этих точках равна единице?
   в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции f, а середина совпадает с точкой $M(\frac{7\pi}{6}, \frac{3}{4})$?
   г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции f.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = nx_{n-1} - 1$, а $x_0 = c$.
   а) Докажите, что если $c \leqslant 1$, то данная последовательность монотонна.
   б) Докажите, что если $c > 2$, то при всех натуральных n верно неравенство $|x_n/n!| \leqslant c$.
   в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она стремится к нулю.
   г) Докажите, что если число c рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

4. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z — комплексное число).
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O — начало координат).
   б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ комплексной плоскости.

в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.

г) При каком значении z, где $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

5. Назовем расстоянием между точками поверхности параллелепипеда длину кратчайшей ломаной на его поверхности, соединяющей эти точки. Пусть E и W — противоположные вершины параллелепипеда.

а) Найдите расстояние между вершинами E и W единичного куба.

б) При каких значениях a и b расстояние между вершинами E и W прямоугольного параллелепипеда единичного объема с длинами ребер a, a, b будет наименьшим?

в) Докажите, что расстояние между любыми парами точек поверхности единичного куба не превосходит расстояния между точками E и W.

г) Найдите длины ребер прямоугольного параллелепипеда единичного обьема, расстояние между вершинами E и W которого принимает наименьшее значение.

Вариант 51 (1992 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_2 x \log_{1/2} \frac{1}{2^7 x} \log_4 \frac{x^2}{2^{16}}$.

а) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.

б) Решите уравнение $f(x) = f(1/x)$.

в) При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два различных корня?

г) Пусть $n(b)$, где $b > 0$ и $b \neq 1$, — число различных корней уравнения $f(x) = f(bx)$. Постройте график функции n.

2. Даны функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos 2x$.

а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми $x = \pi$ и $x = \frac{7\pi}{6}$.

б) Пусть $A(m)$ и $B(m)$ — точки пересечения прямой $x = m$ с графиками функций f и g. При каких m длина отрезка с концами в этих точках равна единице?

в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции f, а середина совпадает с точкой $M(\frac{13\pi}{12}, \frac{1}{4})$?

г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции f.

Задачи 3–5 — см. вариант 50.

Вариант 52 (1992 год)

Задачи 1,2 — см. вариант 51.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = nx_{n-1} + 2$, а $x_0 = c$.
   а) Докажите, что если $c \geqslant -2$, то данная последовательность монотонна.
   б) Докажите, что если $c < -4$, то при всех натуральных n верно неравенство $|x_n/n!| \leqslant -c$.
   в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она стремится к нулю.
   г) Докажите, что если число c рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

4. Пусть $A(3z+2)$, $B(2z+3)$, $C(3z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z — комплексное число).
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O — начало координат).
   б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, -1 и $3z+2$ комплексной плоскости.
   в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.
   г) При каком значении z, где $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

Вариант 53 (1993 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2 - 2x)$.
   а) Пусть $a = -2$. Решите уравнение $f(x) = 1$.
   б) Пусть $a = -3$. Решите неравенство $f(x) \leqslant -1$.
   в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, a), что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?
   г) Найдите все такие $a > -2$, при которых для любого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.

2. Дана функция $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$, $x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -1$.
   б) Найдите наибольшую длину промежутка монотонности функции f.
   в) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = a$?
   г) Рассмотрим тело, ограниченное плоскостями $x = -\pi$, $x = \frac{\pi}{2}$ и поверхностью, получаемой при вращении графика функции f вокруг прямой $y = m$ (лежащей в плоскости Oxy). При каком m объем этого тела будет наименьшим?

Задачи 3–5 — см. вариант 2.

Вариант 55 (1994 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_2 x + \log_{2x} x$.

   а) Докажите, что числа x и $\frac{1}{4x}$ входят (либо не входят) в область определения функции f одновременно и $f(\frac{1}{4x}) = -f(x)$.

   б) Решите уравнение $|f(x)| = f(2)$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на луче $[1; +\infty)$.

г) Найдите все такие a, при которых уравнение $f(x) = a\log_2^2 2x$ имеет три решения.

2. Дана функция $f(x) = \cos ax + \cos 2ax$.

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все такие a, при которых $f(\frac{\pi}{2}) > 0$.

в) Найдите все такие a, при которых $f(x) > 0$ при всех $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

г) Найдите все такие a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

3. Дана функция $f(x) = ax - 2\sqrt{x+1}$, $a > 0$.

а) Найдите все такие a, при которых функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$.

б) Пусть $a = 1$. Найдите уравнения касательных к графику данной функции, проходящих через точку $A(5, 0)$.

в) Пусть $a = 1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f.

г) Найдите (при произвольном $a > 0$) такое значение x_0, при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции f в точке с абсциссой x_0, самим этим графиком и прямыми $x = -1$, $x = 2$, имеет наименьшую площадь.

4. Пусть a, b, c — длины некоторых отрезков.

а) Докажите, что если $a = \sqrt[6]{2}, b = \sqrt[6]{3}, c = \sqrt[6]{7}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.

б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a = 19^{21}$, $b = 20^{21}$, $c = 21^{21}$.

в) Докажите, что если для любого натурального числа n существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n, то все эти треугольники равнобедренные.

г) Пусть φ_n — угол треугольника со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[n]{2}$, $c = \sqrt[n]{4}$ $(n \geqslant 2)$, лежащий против средней из них. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

5. Пусть $A(i-1)$, $B(2i-1)$, $C(2-3i)$ — точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам, $\mathcal{S}$ — окружность $|z| = 1$, а $\mathcal{D}$ — множество комплексных чисел, заданное неравенством $|2z-1| \leqslant 1$.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки $P \in \mathcal{S}$ до точек A, B, C постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки A, B и множество комплексных чисел вида $z(2i-1)+(1-z)(i-1)$, где $z \in \mathcal{D}$.

в) Найдите такую точку $E \in \mathcal{D}$ и все такие равносторонние треугольники с вершинами на $\mathcal{S}$, для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до E наибольшая.

г) Выясните, верно ли, что для всякой точки w, лежащей в треугольнике ABC, найдется такое число $z \in \mathcal{D}$, что $w = zz_k + (1-z)z_j$, где $z_k, z_j \in \{i-1, 2i-1, 2-3i\}$.

Вариант 56 (1994 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_{x/3} x - \log_3 x$.

а) Докажите, что числа x и $\frac{9}{x}$ входят (либо не входят) в область определения функции f одновременно и $f(\frac{9}{x}) = -f(x)$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f(\frac{1}{3})$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на промежутке $(0; 1]$.

г) Найдите все такие a, при которых уравнение $f(x) = a\log_3^2 \frac{x}{3}$ имеет три решения.

2. Дана функция $f(x) = \cos ax - \cos 2ax$.

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все такие a, при которых $f(\pi) > 0$.

в) Найдите все такие a, для которых $f(x) > 0$ при всех $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

г) Найдите все такие a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

Задачи 3–5 — см. вариант 55.

Вариант 57 (1994 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 56.

3. Дана функция $f(x) = ax - 2\sqrt{3-x}$, $a < 0$.
   а) Найдите все a, для которых функция f монотонна на луче $(-\infty; -1]$.
   б) Пусть $a = -1$. Найдите уравнения касательных к графику функции f, проходящих через точку $A(-7, 0)$.
   в) Пусть $a = -1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f.

   г) Найдите (при произвольном $a < 0$) такое значение x_0, при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции f в точке с абсциссой x_0, самим этим графиком и прямыми $x = -1$, $x = 2$, имеет наименьшую площадь.

4. Пусть a, b, c — длины некоторых отрезков.
   а) Докажите, что если $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{4}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.
   б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a = 19^{20}$, $b = 20^{20}$, $c = 21^{20}$.
   в) Докажите, что для любого натурального числа $n > 8$ существует треугольник со сторонами $(n-1)^4$, n^4, $(n+1)^4$ и почти все эти треугольники (т. е. кроме их конечного числа) остроугольные.
   г) Пусть φ_n — угол треугольника со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[n]{3}$, $c = \sqrt[n]{9}$ $(n \geqslant 2)$, лежащий против меньшей стороны. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

Вариант 58 (1995 год)

1. Дана функция $f(x)=\sqrt{\log_2 x}$.
   а) Решите уравнение $f\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{x}\right)=f\left(4x+\frac{1}{x}\right)$.
   б) Решите неравенство $f\left(\frac{4-x^2}{1+x^2}\right)\leqslant f\left(\frac{7}{2}-x\right)$.
   в) Решите уравнение $f(2x^a)=f(4x)$ при всех $a\in\mathbb{R}$.
   г) Числа a,b,c образуют возрастающую геометрическую прогрессию ($a\geqslant 1$). Докажите, что
$$\frac{\sqrt{2}}{c-a}\int_a^c f(x)\,dx\geqslant f(b).$$

2. Дана функция $f(x)=\frac{a}{\cos x}+\frac{b}{\sin x}$.
   а) Пусть $a=1, b=\sqrt{3}$. Решите уравнение $f(x)=4$.
   б) При тех же значениях a и b решите неравенство $f(x)\geqslant 0$.
   в) Пусть $a=1$. Найдите все такие значения b, что данная функция убывает на интервале $(0;\frac{\pi}{3})$.
   г) Пусть $a>0, b>0$. Докажите, что уравнение $f(x)=1$ имеет ровно три решения на отрезке $[0;2\pi]$ тогда и только тогда, когда $a^{2/3}+b^{2/3}=1$.

3. Дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$, $a_1=c>0$.
   а) Докажите, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполнены неравенства $\sqrt{2}\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 2$.
   б) Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ убывает, и вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
   в) Пусть $c=1$. Докажите, что все числа a_n, $n\geqslant 2$, иррациональные.
   г) Пусть $c=2$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n=2\pi$.

4. Пусть $A(u)$, $B(v)$, $C(w)$ — точки плоскости, изображающие комплексные числа u, v, w.
   а) Пусть $u=0$, $v=1+i$. Найдите все такие w, что треугольник ABC равносторонний.
   б) Пусть $u=0$, $v=1+2i$, а число w является корнем уравнения $z^2=(1+2i)z+3-4i$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
   в) Известно, что треугольник ABC равносторонний. Могут ли действительные и мнимые части всех чисел u, v и w быть рациональными одновременно?
   г) Докажите, что если $u^2+v^2+w^2=uv+vw+wu$, то треугольник ABC равносторонний.

5. Дана функция $f(x)=4+ax-x^2$, прямая ℓ, заданная уравнением $y=2x+8$, и точка $A(0,4)$.
   а) Найдите все значения a, при которых прямая ℓ касается графика функции f.
   б) Пусть P и Q — точки касания прямой ℓ с графиками $y=f(x)$ (при найденных в предыдущем пункте значениях a). Вычислите площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком PQ и дугами AP, AQ этих графиков.
   в) Пусть $a=2$. Найдите точку графика функции f, ближайшую к точке $M(-3,\frac{3}{2})$.
   г) Найдите наименьшее значение площади сегмента, ограниченного графиком функции f и осью абсцисс.

Вариант 59 (1995 год)

1. Дана функция $f(x)=\sqrt{\log_3 x}$.

   а) Решите уравнение $f\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)$.

   б) Решите неравенство $f\left(\dfrac{5-2x^2}{2+x^2}\right)\leqslant f\left(\dfrac{2x+7}{4}\right)$.

   в) Решите уравнение $f(\sqrt{3}x^a)=f\left(\dfrac{9}{x}\right)$ при всех $a\in\mathbb{R}$.

   г) Числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию ($a\geqslant 1$). Докажите, что

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,dx\leqslant f(b).$$

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{a}{\cos x}-\dfrac{b}{\sin x}$.

   а) Пусть $a=\sqrt{3}$, $b=1$. Решите уравнение $f(x)=4$.

   б) При тех же значениях a и b решите неравенство $f(x)\leqslant 0$.

   в) Пусть $a=3$. Найдите все такие значения b, что данная функция убывает на интервале $(\frac{5\pi}{6};\pi)$.

   г) Пусть $a>0, b>0$. Докажите, что уравнение $f(x)=8$ имеет ровно три решения на отрезке $[0;2\pi]$ тогда и только тогда, когда $a^{2/3}+b^{2/3}=4$.

Задачи 3–5 — см. вариант 58.