Профильно-элитарный экзамен 1996-2000. Из книги «Практикум по элементарной математике». МЦНМО, Москва 2001.

Решения и ответы к вариантам, приведенным ниже, можно найти в книге на стр. 260-289

1996

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{4^x - a\cdot 2^x}{2^x - 1}$.
   а) Пусть $a = -2$. Решите уравнение $f(x+1) = f(x)$.
   б) Пусть $a = \frac{7}{2}$. Решите неравенство $f(x) + f(-x) \leqslant 0$.
   в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на луче $(-\infty; 0)$.
   г) Найдите все a при которых существует b, такое что уравнение $f(x) = b$ не имеет решений.

2. Пусть $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$.
   а) Найдите все $x \in [1; 2]$, для которых $f_5(x) \leqslant f_3(x)$.
   б) Решите уравнение $f_5(x) = 2f_3(x)$.
   в) Найдите все a, такие что уравнение $f_3(x) = f_3(a)$ имеет ровно два решения на отрезке $[0; \pi]$.
   г) Существует ли многочлен q, для которого $q(\sin x) = f_{1996}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

3А. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 7} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.
   а) Решите неравенство $f(x) \leqslant 1$.
   б) Найдите множество значений функции f.
   в) Докажите неравенство

$$\int_0^1 \frac{2}{f(x)}\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 3.$$

   г) Найдите все $k \in \mathbb{Z}$, такие что $f(k) \in \mathbb{Q}$.

3Б. Будем обозначать через $M(z)$ точку плоскости, соответствующую комплексному числу z. Рассмотрим точки $A_i(z_i)$, $i = 1, 2, 3$, где $z_1 \neq -z_2$ и $z_3 = \dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$.
   а) Докажите, что если $z_1, z_2 \neq 0$, то точки $B_i(z_i^{-1})$, $i = 1, 2, 3$, лежат на одной прямой.

б) Докажите, что если $z_2 = \overline{z}_1$ и $z_1 \neq z_2$, то треугольник OA_1A_3 — прямоугольный (O — начало координат).

в) Пусть $z_2 = \overline{z}_1$, $|z_1 - 2| \leqslant 1$. Найдите наибольшее значение отношения площадей треугольников OA_1A_3 и OA_1A_2.

г) Докажите, что точки A_i, $i = 1, 2, 3$, и O лежат на одной окружности.

3В. Положим $p_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$.

а) Докажите, что многочлен p_n имеет вещественные корни тогда и только тогда, когда число n нечетно.

б) Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные корни многочлена p_n. Докажите, что $(1 - z_1)(1 - z_2)\ldots(1 - z_n) = n + 1$.

в) Найдите все n, при которых многочлен p_n делится на $1 + x^3$.

г) Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} p_k(x) = 2^n p_n\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{a \cdot 2^x + 1}{4^x - 2^x}$.

а) Пусть $a = -\frac{5}{8}$. Решите уравнение $f(x - 1) = f(x)$.

б) Пусть $a = -\frac{21}{4}$. Решите неравенство $f(x) + f(-x) \geqslant 0$.

в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на луче $(0; +\infty)$.

г) Найдите все a, при которых существует b, такое что уравнение $f(x) = b$ не имеет решений.

2. Пусть $f_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Найдите все $x \in [1; 2]$, для которых $f_5(x) \geqslant f_3(x)$.

б) Решите уравнение $f_5(x) + 2f_3(x) = 0$.

в) Найдите все a, такие что уравнение $f_3(x) = f_3(a)$ имеет ровно два решения на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$.

г) Существует ли многочлен q, для которого $q(\sin x) = f_{1995}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

1997

Вариант 1.

1. Дана функция $f(x) = \log_3^2 x + \log_x 4$.
   а) Решите уравнение $f(x) = 3$.
   б) Решите неравенство $f(x) \geqslant -1$.
   в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет единственное решение.
   г) Определите число корней уравнения $f(x) = f(2x)$.
2. Дана функция $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 2a \sin x \cos x$.
   а) Пусть $a = -13/8$. Найдите корни функции f.
   б) Найдите все a, такие что $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$.
   в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на отрезке $[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}]$.
   г) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k\pi}{n})$.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \log_x^2 3 + \log_{1/3} 3x^2$.
   а) Решите уравнение $f(x) = 2$.

   б) Решите неравенство $f(x) \geqslant -2$.
   в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет три решения.
   г) Определите число корней уравнения $f(\frac{x}{3}) = f(x)$.
2. Дана функция $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 2a \cos^2 x$.
   а) Пусть $a = -\frac{7}{8}$. Найдите корни функции f.
   б) Найдите все a, такие что $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 0$.
   в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на отрезке $[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}]$.
   г) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k\pi}{n} - x)$.

3А. Последовательность $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, задана соотношениями $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, $x_0 = c$.

а) Найдите все c, при которых $x_2 > 0$.

б) Докажите, что если $c > 1$, то эта последовательность монотонна.

в) Найдите все непостоянные конечные арифметические прогрессии, образованные последовательными членами указанной последовательности.

г) Докажите, что существуют последовательности данного вида, имеющие сколь угодно большой период.

3Б. Известно, что ученик подготовил ответы не на все из 16 выносимых на зачет вопросов.

а) Сколько вопросов он выучил, если известно, что вероятность того, что он сможет ответить на оба из случайно выбранных им двух вопросов, не меньше, чем $\frac{7}{8}$?

б) Сколько вопросов он выучил, если известно, что вероятность того, что он сможет ответить только на один из случайно выбранных им двух вопросов, равна $\frac{1}{2}$?

в) В каком случае вероятность того, что он сможет ответить на один случайно выбранный им вопрос, больше, чем вероятность того, что ему удастся ответить на два (по его выбору) из случайно выбранных им трех вопросов?

г) Учитель распределил случайным образом вопросы по восьми билетам (по два вопроса в каждом). Какова вероятность того, что ученик в состоянии ответить хотя бы на один вопрос каждого из билетов, если известно, что он подготовил ответы на 10 вопросов?

3В. Дано число $\varepsilon \neq 1$, такое что $\varepsilon^3 = 1$. Сопоставим точкам $A(a), B(b), C(c)$ плоскости (здесь a, b, c — комплексные числа) числа $u = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ и $v = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon$.

а) Известно, что $a = 0$, $c = -2$, $u = 0$. Определите вид треугольника ABC.

б) Докажите, что числа u и v не изменятся, если треугольник ABC подвергнуть параллельному переносу.

в) Докажите, что треугольник ABC является равносторонним тогда и только тогда, когда $uv = 0$.

г) Найдите множество значений u для всех треугольников ABC, накрываемых кругом радиуса 1.

1998

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \log_{x+1} ax$.
   а) Известно, что $x = 1$ — корень уравнения $f(x) = 3$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.
   б) Пусть $a = \frac{9}{2}$. Решите неравенство $f(x) \geqslant f(\frac{1}{x})$.
   в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение.
   г) Докажите, что если уравнение $f(x) = n+1$ (n — натуральное) имеет положительный корень, то $a > ne$.
2. Дана функция $f(x) = \sin ax \sin x$.
   а) Пусть $a = 3$. Решите уравнение $\dfrac{f(2x)}{f(x)} = -2$.
   б) Найдите все a, при которых $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx \geqslant 0$.
   в) Пусть x_a — наименьший положительный корень уравнения $f(x) = \cos x$. Найдите наименьшее значение x_a.
   г) Найдите все a, при которых $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ при всех $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \log_{1-x} \frac{a}{x}$.
   а) Известно, что $x = \frac{1}{2}$ — корень уравнения $f(x) = 2$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.
   б) Пусть $a = -\frac{3}{16}$. Решите неравенство $f(x) \geqslant f(\frac{1}{x})$.
   в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 2$ имеет единственное решение.
   г) Докажите, что если уравнение $f(x) = n$ (n — натуральное) имеет положительный корень, то $na < e^{-1}$.
2. Дана функция $f(x) = \cos ax \cos x$.
   а) Пусть $a = 2$. Решите уравнение $\dfrac{f(3x)}{f(x)} = 1$.
   б) Найдите все a, при которых $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx \geqslant 0$.
   в) Пусть x_a — ближайший к $\frac{\pi}{2}$ корень уравнения $f(x) = \sin x$. Найдите наименьшее значение $|x_a - \frac{\pi}{2}|$.
   г) Найдите все a, при которых $f(x) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ при всех $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$.

3А. Даны многочлены $p(x) = ax^{1998} + b$ и $q(x) = cx^{1917} + d$, $a \neq 0$.

а) Найдите наибольшее возможное число действительных корней уравнения $p(x) = q(x)$.

б) Пусть $a = 71$, $b = 3$, $c = 74$ и $d = 0$. Решите уравнение $p(x) = q(x)$.

в) Пусть $b = 0$, $c = 1$. Найдите все целые a, d, при которых число $p(n)$ делится на $q(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

г) Пусть $d = 0$. Найдите все целые a, b, c, при которых разность $p(n) - q(n)$ делится на $(n-1)^2$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

3Б. Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Двое людей по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй из них может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

3В. Дан многочлен $p(z) = z^3 + az + b$, $a, b, z \in \mathbb{C}$.

а) Пусть $a = -i$, $b = 1 - i$. Найдите корни многочлена $p(z)$ (и запишите их в алгебраической форме).

б) Найдите все пары (a, b), при которых один из корней многочлена $p(z)$ совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и в следующем пункте мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

в) Найдите все пары (a, b), при которых корни многочлена $p(z)$ лежат в вершинах равностороннего треугольника.

г) Докажите, что если $|p(z)| \leqslant 1$ при всех $|z| = 1$, то $a = b = 0$.

1999

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2^x - ax$.

   а) Решите неравенство $f(3x) \geqslant f(2x) + f(x)$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $f(2x) = f(x) + f(x+1)$ имеет единственное решение.

   в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Решите уравнение $\sqrt{f(x)} + x = 0$.

   г) Пусть $a = 1$. Найдите с точность до 0,03 положительный корень уравнения $f(x) = 1024$.

2. Дана функция $f(x) = \cos^3 x + a\cos^2 x \sin x + b\cos x \sin^2 x + \sin^3 x$.

   а) Найдите a и b, если известно, что числа $\pm\frac{\pi}{4}$ являются корнями функции f.

   б) Пусть $a = b = -1$. Решите неравенство $f(x) \leqslant 0$.

   в) Пусть $b = -3$. Решите уравнение $f(x) = \cos 3x$.

   г) Найдите все пары (a, b), при которых период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = ax - 3^x$.

   а) Решите неравенство $f(3x) \geqslant f(2x) + f(x)$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $f(2x) = f(x) + f(x+1)$ имеет единственное решение.

   в) Пусть $a = \frac{2}{3}$. Решите уравнение $\sqrt{-f(x)} = -x$.

   г) Пусть $a = 1$. Найдите с точность до 0,01 положительный корень уравнения $f(x) = -729$.

2. Дана функция $f(x) = \cos^3 x - a\cos^2 x \sin x + b\cos x \sin^2 x - \sin^3 x$.

   а) Найдите a и b, если известно, что числа $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ являются корнями функции f.

   б) Пусть $a = b = -1$. Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.

   в) Пусть $a = -3$. Решите уравнение $f(x) = \sin 3x$.

   г) Найдите все пары (a, b), при которых период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$.

3А. Комплексное число $z = a + bi$ называется *гауссовым*, если a и b — целые числа. Говорят, что гауссово число z *кратно* числу w, если $z = wu$, где w и u — гауссовы числа. Пусть $\mathcal{K}$ — множество всех гауссовых чисел, кратных $1 + 2i$.

а) Найдите все натуральные a, такие что $a \leqslant 20$ и $2 + ai \in \mathcal{K}$.

б) Докажите, что если $z \in \mathcal{K}$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то z кратно $3 - i$.

в) Существуют ли числа $u, v \in \mathcal{K}$, такие что $\arg \frac{u}{v} = \frac{\pi}{8}$?

г) Докажите, что для всякого гауссова числа z найдется число $w \in \mathcal{K}$, такое что $|z - w| \leqslant 1$.

3Б. Будем считать, что Земля имеет форму шара радиусом $R = 6400$ км. Известно, что радиоволны, на которых ведется телевещание, распространяются по прямой. Предположим, что телепередатчик расположен на высоте h от земной поверхности. Обозначим через $l(h)$ расстояние по поверхности Земли от основания телебашни (или от той точки Земли, которая расположена ближе всего к ретрансляционному спутнику) до самой дальней точки, в которой возможен прием телепередачи.

а) Найдите наименьшее значение h, при котором прием возможен во всех точках некоторого меридиана севернее 60° ю.ш. и южнее 60° с.ш., если спутник висит над экватором?

б) Докажите, что $\lim\limits_{h \to 0} \frac{l(h)}{\sqrt{2Rh}} = 1$.

в) Предположим, что передатчик размещен на Луне (т. е. на расстоянии 400 000 км от центра Земли). Покажите, что в этом случае $l(h)$ меньше четверти длины экватора по крайней мере на 100 км.

г) Для того, чтобы обеспечить связь между двумя пунктами, расположенными на расстоянии 1600 км друг от друга, решено построить радиорелейную линию. Докажите, что если высота мачт этой линии равна 31,25 м, то потребуются не менее 41 таких мачт.

3В. Пусть $p_n(x)$ — многочлен степени n.

а) Известно, что числа 3 и 7 являются корнями многочлена $p_2(x)$ и что $p_2'(3) = 11$. Найдите $p_2'(7)$.

б) Известно, что числа 1 и 2 являются корнями многочлена $p_3(x)$. Пусть $p_3'(1) = k$ и $p_3'(2) = l$, причем $kl > 0$. Докажите, что число, делящее отрезок $[1; 2]$ в отношении $k : l$, является третьим корнем этого многочлена.

в) Пусть $p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Найдите все a, при которых многочлен $p_3(x) + ax$ имеет ровно два действительных корня.

г) Пусть $p_{1000}(x) = x(x-2)...(x-1998)$. Найдите все $a \geqslant 0$, при которых уравнение $p_{1000}(x) = a$ имеет 1000 различных действительных корней.

2000

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \log_2(2^x + a)$.
   а) При каком a прямая $y = \frac{x+1}{2}$ касается графика функции f?
   б) Докажите, что $f(0) \leqslant \frac{a}{\ln 2}$.
   в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Сколько решений (в зависимости от b) имеет уравнение $f(x) = \frac{x}{2} + b$?
   г) Пусть $a > 0$ и $t > 0$. Докажите, что $\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| < 4a$.
2. Дана система $4\cos x - 3\cos y = a$, $4\sin x + 3\sin y = b$.
   а) Решите систему при $a = b = 0$.
   б) Решите систему при $a = 3, b = 4$.
   в) Найдите наибольшее значение площади четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 1, 3, 1 и 4.
   г) Изобразите на плоскости множество всех точек $M(a, b)$, таких что данная система имеет решение.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \log_3(3^x + a)$.
   а) При каком a прямая $y = \frac{x+1}{3}$ касается графика функции f?
   б) Докажите, что $f(0) \leqslant \frac{a}{\ln 3}$.
   в) Пусть $a = \frac{2}{3}$. Сколько решений (в зависимости от b) имеет уравнение $f(x) = \frac{x}{3} + b$?
   г) Пусть $a > 0$ и $t > 0$. Докажите, что $\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| < a$.
2. Дана система $4\cos x - \cos y = a$, $4\sin x + \sin y = b$.
   а) Решите систему при $a = b = 0$.
   б) Решите систему при $a = 4, b = -1$.
   в) Найдите наибольшее значение площади четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 3, 1, 3 и 4.
   г) Изобразите на плоскости множество всех точек $M(a, b)$, таких что данная система имеет решение.

3А. Пусть $p(z) = z^2 + az + b$, $z \in \mathbb{C}$. В следующих далее формулировках мы для краткости будем отождествлять комплексные числа с их изображениями как точек плоскости.

а) Пусть $b = 1$. Верно ли, что при всех $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leqslant 2$, корни многочлена $p(z)$ лежат на единичной окружности?

б) Пусть $b = 1$, $a \in \mathbb{C}$ и $|a| \leqslant 1$. Найдите наименьшее значение модуля разности корней многочлена $p(z)$.

в) Пусть z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, — вершины квадрата с центром u. Докажите, что $\sum_{k=1}^{4} p(z_k) = 4p(u)$.

г) Пусть m — наибольшее значение $|p(z)|$ при $|z| = 1$. Докажите, что $|p(z)| \leqslant m$ при всех $|z| \leqslant 1$.

3Б. Рассматриваются последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых $x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$, $n \geqslant 1$.

а) Пусть $x_0 = \frac{1}{2}$. Вычислите x_{2000}.

б) Докажите, что если $x_0 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ монотонна.

в) Найдите множество C_0 всех чисел, которые не могут являться начальными членами x_0 таких (бесконечных) последовательностей.

г) Найдите множество начальных членов x_0 монотонных последовательностей $\{x_n\}$.

3В. Некоторое устройство может находится в одном из трех состояний (обозначаемых далее a, b и c). Если оно в некоторый момент находится, к примеру, в состоянии a, то через одну секунду оно перейдет в одно из состояний b или c (вероятность перехода в каждое из которых равна $\frac{1}{2}$). Обозначим через $p_n(x)$, где $x \in \{a, b, c\}$, вероятность того, что через n секунд устройство будет находится в состоянии x; в начальный момент оно находится в состоянии a.

а) Вычислите $p_3(x)$, $x \in \{a, b, c\}$.

б) Может ли при некотором n вероятность $p_n(x)$, $x \in \{a, b, c\}$, быть равной $\frac{1}{3}$?

в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = \frac{1}{3}$.

г) Докажите, что утверждение, сформулированное в предыдущем пункте, равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k \equiv i \pmod 3} C_n^k = \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, 2.$$

В 2000-2001 годах в углубленном варианте (не Профильно-элитарном) кроме трех задач на выбор предлагался еще и дополнительный геометрический сюжет.

Единый выпускной экзамен. Дополнительная задача

4. **Три ребра треугольной пирамиды имеют длину 10, 20 и 30 см.**
   а) Каков наибольший объем такой пирамиды?
   б) Сколько существует различных пирамид наибольшего объема? (Две пирамиды считаются одинаковыми, если одну из них можно совместить с другой, перемещая ее в пространстве.)
   в) Найдите наибольший радиус сферы, которую можно вписать в одну из пирамид наибольшего объема.
   г) Найдите наименьший радиус сферы, в которую можно поместить одну из пирамид наибольшего объема.

а) *Ответ*: $V_{\max} = 1000$ см^3. Три ребра данной длины либо выходят из одной вершины, либо образуют незамкнутую ломаную. В том и другом случае объем наибольший, если они попарно перепендикулярны. **б)** *Ответ*: 8 пирамид (учитывая их ориентацию!). **в)** *Ответ*: $r = \frac{10}{3}$. В силу формулы $r = \frac{3V}{S}$, наибольший радиус вписанной сферы имеет пирамида с наименьшей полной поверхностью. В силу неравенства

$$ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} < ab + bc + c\sqrt{a^2 + b^2} + a\sqrt{b^2 + c^2}$$

наименьшую полную поверхность имеет пирамида, в которой ребра данной длины исходят из одной вершины. **г)** *Ответ*: $R = \frac{25}{7}\sqrt{26}$. Нетрудно видеть, что радиус описаной сферы одинаков у всех пирамид наибольшего объема. Однако в случае, когда ребра данной длины образуют незамкнутую ломаную, одно из других ребер совпадает с диаметром сферы. Если же три ребра исходят из одной вершины, то можно доказать, что эта вершина лежит внутри сферы, экватор которой описан около треугольника, образованного тремя оставшимися ребрами этой пирамиды.