Математический анализ для первокурсников

О. Иванов, С. Климчук

Предисловие

Книга, предлагаемая вниманию читателя, состоит из двух формально независимых текстов, дополняющих как друг друга, так и стандартный курс математического анализа (как часть курса «высшей математики») для первокурсников нематематических специальностей вузов. С точки зрения хронологии первой была написана и издана (на английском языке) ее вторая часть — «Контрпримеры в курсе математического анализа» (S. Klymchuk, Counter-Examples in Calculus, Maths Press, Auckland, New Zealand, 2004). Ее автор Сергей Климчук (кандидат физико-математических наук, специалист в области дифференциальных уравнений, доцент Технологического университета в г. Окленд, Новая Зеландия) давно и активно интересуется проблемами преподавания математики. Развиваемая автором педагогическая идея состоит в том, что построение контрпримеров к математическим утверждениям будет способствовать как более глубокому пониманию математики, так и развитию математического мышления учащихся, чего трудно достичь при традиционной постановке преподавания математики в (нематематическом) вузе. С этой мыслью, приводимыми автором примерами, а также аргументацией будет полезно познакомиться преподавателям математики российских вузов.

В результате размышлений пришло понимание того, что подход С. Климчука интересен, но его книгу имеет смысл дополнить. В результате дальнейших размышлений и был написан текст «200 задач по курсу математического анализа», ставший первой частью данной книги. Для того чтобы решить эти задачи, совершенно не обязательно много вычислять, однако надо уметь применить определение, правильно воспользоваться известными утверждениями и, наконец, просто понять поставленный вопрос. Некоторые из них предлагались автором на (письменных) экзаменах для студентов экономического факультета СПбГУ.

Иванов Олег Александрович
Октябрь 2011 *года, Санкт-Петербург*

200 задач по курсу математического анализа

О. А. Иванов

От автора

Автор начинает это предисловие с одного воспоминания. Немногим более 10 лет назад он включил в «олимпиаду выпускников», проводившуюся мат-мехом СПбГУ, задачу, прочитав условие которой один из коллег отреагировал на него так: «А в чем же, собственно, состоит задача?» Однако после проверки работ участников олимпиады его реакция изменилась: «Да, теперь я вижу, что это действительно — задача». Дело в том, что некоторые утверждения, абсолютно очевидные для математиков, могут представлять серьезные трудности для учащихся или студентов со слабой математической подготовкой. И дело даже не в том, что эти студенты могут испытывать трудности, например, при проведении тождественных преобразований. Трудность часто состоит в необычной для них постановке самого вопроса. Вузовский курс математического анализа (высшей математики) во многом состоит из *определений* понятий, *доказательств* их свойств и *взаимосвязей* между ними. А много ли математических понятий вводится в средней школе? Какие доказательства имеются в школьном курсе «Алгебра и начала анализа»?

Думаю, что большинство математиков, ознакомившись с приведенными ниже задачами, тоже могут отреагировать так же, как мой коллега. Поэтому хочу сразу предупредить, что эти задачи не предназначены для обучения будущих математиков. Автор использовал их в процессе преподавания математического анализа студентам экономического факультета. Большинство из этих заданий содержатся в учебных пособиях[1], написанных совместно с доцентом мат-меха Б. М. Беккером, которому автор выражает свою искреннюю благодарность.

---

[1]Курс математического анализа. Семестр 1 (учебное пособие). 2-е издание, испр. и дополн. ЭФ СПбГУ, СПб, 2010. — 226 с. Семестр 2 (учебно–методическое пособие). ЭФ СПбГУ, СПб, 2010.— 236 с.

Более всего автор желал бы, чтобы те, кто преподает высшую математику студентам нематематических специальностей вузов, изменили свою точку зрения на цели своей работы. По мнению автора, бессмысленно учить, например, разнообразным подстановкам для вычисления интегралов или же требовать вычисления пределов искусственно нагроможденных функций. Двадцать лет назад автор вел на математико-механическом факультете СПбГУ семинар для студентов мат-меха — будущих школьных преподавателей. На этом семинаре каждый из них представлял свою точку зрения на изложение определенного раздела школьной математики, представляя, в том числе, и задачи, которые он бы предложил учащимся на своем уроке. Практически всегда я, как руководитель этого семинара, задавал выступающему один и тот же вопрос: «А какова цель включения этой задачи; постановки того или иного вопроса?» Когда я смотрю на задачи из стандартных задачников, то достаточно часто цели-то и не вижу.

Поэтому специальным полиграфическим образом выделены комментарии педагогического характера, обращенные к преподавателям.

Объем включенного материала примерно соответствует первому семестру обучения. Именно этот семестр является ключевым *в обучении нематематиков математическим методам рассуждения.* Ко всем задачам даны подробные решения, для того чтобы эту книжку могли использовать и студенты. Совет студентам: даже если вы уверены, что задача вами решена, все равно взгляните на ее «авторское» решение — вдруг вы на что-то не обратили внимание.

Условия задач

§1. Последовательности: первые свойства

Поскольку следующие термины иногда используются в разных смыслах, дадим определение, используемое ниже. Итак, будем называть последовательность x_n *возрастающей* (*убывающей*), если $x_{n+1} \geqslant x_n$ (соответственно $x_{n+1} \leqslant x_n$) при всех $n \in \mathbb{N}$. Если же при всех натуральных n верно неравенство $x_{n+1} > x_n$ (или же неравенство $x_{n+1} < x_n$), то эту последовательность будем называть *строго возрастающей* (соответственно *строго убывающей*).

1. Выясните, являются ли следующие числа c членами данной последовательности: а) $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$, $c = \frac{9}{5}; \frac{10}{7}; \frac{22}{9}$; б) $y_n = 2^n + n^2$, $c = 17; 177; 1017$; в) $z_n = n - \sqrt{n^2 - 3n + 6}$, $c = 1; 3; 5$.

2. Первые члены x_1, x_2 и x_3 некоторой последовательности равны $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{4}$ и $\frac{16}{5}$ соответственно. Напишите естественную формулу для общего члена x_n этой последовательности и выясните, является ли данная последовательность: а) монотонной; б) ограниченной.

3. Дана последовательность $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Вычислите несколько ее первых членов. Сформулируйте предположение о формуле для ее общего члена и докажите его.

4. Найдите все значения a, при которых является монотонной последовательность: а) $x_n = n^2 + an$; б) $y_n = \frac{an+1}{n+2}$. Выясните, являются ли эти последовательности возрастающими или же убывающими.

5. Верно ли, что: а) сумма двух монотонных последовательностей является монотонной последовательностью; б) произведение двух

возрастающих последовательностей есть возрастающая последовательность?

6. Какие из следующих последовательностей являются монотонными: а) $x_n = \frac{n^2+n+1}{n+2}$; б) $y_n = \sqrt{n^2+1} - n$; в) $z_n = \sin n$?

7. Верно ли, что: а) сумма двух ограниченных последовательностей есть ограниченая последовательность; б) сумма двух неограниченных последовательностей есть неограниченная последовательность? в) А что можно сказать про сумму неограниченной и ограниченной последовательностей?

8. Найдите наибольший член последовательности: а) $x_n = \frac{n}{2^n}$; б) $y_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$; в) $z_n = \frac{n^2-2}{n^2-n+1}$.

9. Найдите все значения a, при которых является ограниченной последовательность: а) $x_n = \frac{an^2+1}{n+1}$; б) $y_n = \sqrt{n^2+1} - an$; в) $z_n = \sin(an^2+1)$.

10. Верно ли, что: а) произведение двух неограниченных последовательностей есть неограниченная последовательность; б) частное двух неограниченных последовательностей есть неограниченная последовательность?

11. Для последовательностей $x_n = \sqrt[n]{2}$ и $y_n = \frac{2^n}{2^{n-1}-1}$ укажите некоторый номер, начиная с которого верно неравенство: а) $|x_n - 1| < 0{,}1$; б) $|y_n - 2| < 0{,}1$.

§2. Пределы последовательностей

1. Укажите все номера n, для которых справедливо неравенство: а) $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| < 0{,}3$; б) $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - \dfrac{3}{2}\right| < 0{,}3$.

2. Пусть последовательность x_n является бесконечно малой. Для каких из следующих последовательностей y_n верно, что произведение $x_n y_n$ также является бесконечно малой последовательностью: а) $y_n = (-1)^n$; б) $y_n = \sin n^2$; в) $y_n = n$?

3. Приведите примеры, показывающие, что если x_n — бесконечно малая, а y_n — бесконечно большая последовательность, то произведение $x_n y_n$: а) может быть бесконечно малой последовательностью; б) может быть бесконечно большой последовательностью; в) может быть ограниченной последовательностью, не имеющей предела; г) может быть неограниченной, но не являющейся бесконечно большой последовательностью: д) может иметь своим пределом любое заданное действительное число.

4. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

5. Известно, что $x_n \to 1$ и $y_n \to 2$. Что можно утверждать о последовательностях: а) $z_n = 2x_n - 3y_n$; б) $u_n = \frac{x_n}{y_n}$; в) $v_n = \frac{x_n}{y_n - 2}$; г) $w_n = \frac{x_n - 1}{y_n - 2}$?

6. Найдите предел последовательности $y_n = \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n^2 - 1}$, если известно, что: а) $x_n \to 2$; б) $x_n \to 1$; в) $x_n \to -1$; г) $x_n \to \infty$.

7. а) Найдите (в зависимости от числа a) предел последовательности $x_n = 1 + a + \ldots + a^{n-1}$. б) Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$, равную пределу последовательности $x_n = 0,2323\ldots23$ (после десятичной запятой стоят $2n$ цифр).

8. Найдите предел последовательности $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$.

9. Известно, что $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1}$ и $x_1 = 1$. Найдите формулу для вычисления значений общего члена x_n этой последовательности и вычислите ее предел.

10. Что можно сказать о поведении последовательности $y_n = x_n^n$, если известно, что: а) $x_n \to \frac{1}{2}$; б) $x_n \to 1$; в) $x_n \to 2$?

11. Докажите, что неравенство $11^n > 10^n + 9^n$ справедливо для всех достаточно больших натуральных чисел n.

12. Верно ли, что если $x_{n+1} - x_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность x_n является сходящейся?

13. Вычислите предел последовательности $\dfrac{\sqrt[4]{x_n} - 1}{\sqrt[3]{x_n} - 1}$, если известно, что $x_n \to 1$.

14. Про последовательность x_n известно, что $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$, если $n \geqslant 1$, и при этом $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Докажите, что: а) $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$; б) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ при $n \geqslant 1$. в) Найдите предел этой последовательности.

15. В символической записи определение предела выглядит следующим образом:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon\;\exists\,k : \forall\,n \geqslant k\;|x_n - a| < \varepsilon.$$

В этом определении есть три места, на которых располагаются (определенным образом) «квантор всеобщности» $\forall$ и «квантор существования» $\exists$. Таким образом, всего имеется 8 способов расположить эти кванторы. Рассмотрите семь оставшихся способов и в каждом из них дайте описание последовательностей и числа a, удовлетворяющих соответствующему определению.

§3. Существование пределов

1. Верно ли, что неравенство $x \leqslant y$ справедливо $\forall\,x \in \mathcal{L}$ и $\forall\,y \in \mathcal{R}$, где: а) $\mathcal{L} = \{x \mid |x+1| \leqslant 2\}$ и $\mathcal{R} = \{y \mid |y-2| \leqslant \frac{3}{2}\}$;
б) $\mathcal{L} = \{x \mid |x+1| \leqslant 2\}$ и $\mathcal{R} = \{y \mid |y-2| \leqslant 1\}$;
в) $\mathcal{L} = \{x \mid |x+1| \leqslant 2\}$ и $\mathcal{R} = \{y \mid |y-2| \leqslant \frac{1}{2}\}$?
В случае, если утверждение верно, укажите множество всех таких чисел z, для которых $\forall\,x \in \mathcal{L}$ и $\forall\,y \in \mathcal{R}$ справедливы неравенства $x \leqslant z \leqslant y$.

2. Найдите множество $\mathcal{U}$ всех верхних границ множеств:
а) $\mathcal{A} = (0;1)$; б) $\mathcal{B} = (0;1) \cup [2;3]$; в) $\mathcal{C} = \{2^x \mid x \in [0;1]\}$; г) $\mathcal{D} = \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

3. Найдите точную верхнюю и точную нижнюю границы множеств:
а) $\mathcal{A} = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; б) $\mathcal{B} = \left\{\frac{2n+1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Предположим, что требуется найти предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Найдите ошибку в следующем рассуждении.
Пусть $x_n \to a$. Переходя к пределу в данном соотношении, получим, что $a = 2a + 1$, откуда находим $a = -1$. Следовательно, независимо от значения первого члена такой последовательности, ее пределом является число -1.

5. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = 2x_n + 1$, и докажите, что в зависимости от значения ее первого члена она либо постоянна, либо же стремится к бесконечности.

6. Рассмотрим последовательность $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ Докажите, что эта последовательность: а) возрастает; б) ограничена сверху. в) Найдите предел этой последовательности.

7. Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big)$, $x_1 = 2$. Докажите, что эта последовательность: а) ограничена снизу; б) убывает. в) Найдите предел этой последовательности.

8. Обозначим через p_n размер рыбной популяции в n-м году.[2] Простейшая модель изменения популяции приводит к рекуррентному соотношению
$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n} \ ,$$
где a и b — некоторые положительные константы. Пусть p_0 — размер популяции в начальный момент.
а) Докажите, что если последовательность p_n сходится, то ее предел равен либо 0, либо $b - a$.
б) Докажите, что $p_{n+1} < \frac{b}{a}\, p_n$.
в) Докажите, что если $a > b$, то $p_n \to 0$ и, таким образом, популяция вымирает.
г) Предположим, что $a < b$. Докажите, что если $p_0 < b - a$, то последовательность p_n является возрастающей, если же $p_0 > b - a$, то она убывающая. Найдите в обоих случаях предел этой последовательности.

9. Найдите пределы последовательностей: а) $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; б) $y_n = \sqrt{2^n + n}$. в) Обобщите результат решения задания пункта а) этой задачи.

10. Докажите неравенства $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$.

11. Пусть $x_n \to 1$. Что можно сказать о поведении последовательности $y_n = x_n^n$?

[2]Эта задача заимствована автором из книги J. Stewart. Calculus, 5^{th} Edition, Brooks/Cole–Thomson Learning, 2003.

§4. Общие свойства функций

Автор придерживается следующих определений. Функция $f(x)$, определенная на множестве $D \subset \mathbb{R}$, называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любых чисел $x, y \in D$ из того, что $x < y$, следует, что $f(x) \leqslant f(y)$ (соответственно что $f(x) \geqslant f(y)$). В каждом из таких случаев говорят, что функция является *монотонной на* D. Если из того, что $x < y$, следует, что $f(x) < f(y)$ (соответственно что $f(x) > f(y)$), то будем называть такую функцию *строго возрастающей* (*строго убывающей*). В таких случаях функция называется *строго монотонной*.

1. Какие из следующих функций являются монотонными на всей своей области определения: а) $f(x) = x^3 + 3x + 1$; б) $g(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$; в) $h(x) = \log_2(x+1) - \log_2 x$?

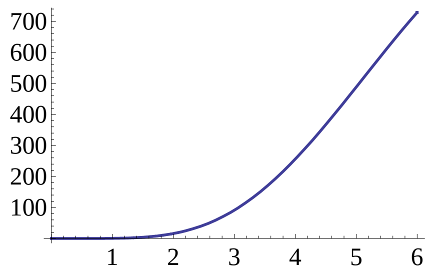
2. Сформулируйте причины, по которым из того, что $2^x = 1$ при $x = 0$, следует, что решением неравенства $2^x \geqslant 1$ является промежуток $[0; +\infty)$, однако из того, что $\sin x = 0$ при $x = 0$, не следует, что решением неравенства $\sin x \geqslant 0$ является промежуток $[0; +\infty)$.

3. Предположим, что каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ задана и монотонна на $\mathbb{R}$. Верно ли, что будет монотонна(-о) также: а) композиция $f\bigl(g(x)\bigr)$; б) сумма $f(x)+g(x)$; в) произведение $f(x)g(x)$ этих функций. Если в общем случае некоторое из сформулированных утверждений неверно, то сформулируйте естественное предположение, при котором оно окажется верным.

4. Известно, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ и убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $g(x) = f(x^2)$.

5. Какие из следующих функций являются ограниченными на всей своей области определения: а) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$; б) $g(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$; в) $h(x) = \log_2(x+1) - \log_2 x$?

6. На следующем рисунке изображен эскиз графика $y = x^6 \cdot 2^{-x}$ при $x \geqslant 0$.



Верно ли, что эта функция является: а) возрастающей; б) неограниченной?

7. Найдите множества значений следующих функций на отрезке $[-1;3]$: а) $f(x) = x^2 - x$; б) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$; в) $h(x) = \sin \pi x$; г) $u(x) = (2x+1)^2$.

8. Известно, что $f(2x+1) = x^2$. Найдите: а) $f(5)$; б) $f(x)$.

9. Даны функции $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = 2x + 1$. Задайте формулами следующие их композиции: а) $f\big(f(x)\big)$; б) $g\big(f(x)\big)$; в) $f\big(g(x)\big)$; г) $g\big(g(x)\big)$.

10. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на $\mathbb{R}$ и таковы, что функция $h(x) = f\big(g(x)\big)$ является обратимой. Верно ли, что каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ будет обратимой?

11. Сколько существует определенных на $\mathbb{R}$ обратимых функций, совпадащих со своими обратными?

12. Известно, что множеством значений функции $f(x)$, определенной на всей числовой прямой, является отрезок $[-1;4]$. Что можно сказать о множестве значений функции: а) $\big(f(x)\big)^2$; б) $f\big(x^2\big)$; в) $f(2x+1)$; г) $2f(x)+1$?

13. Найдите множества значений функций: а) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$; б) $g(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$; в) $h(x) = \log_2(x+1) - \log_2 x$.

14. Известно, что $f\big(g(x)\big) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$. а) Верно ли, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными? б) Найдите естественное дополнительное предположение, при котором функции $f(x)$ и $g(x)$ будут взаимно обратными.

15. Исследуйте данные функции на монотонность, после чего изобразите эскизы их графиков: а) $f(x) = 2^{2x-x^2}$; б) $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$; в) $h(x) = \dfrac{1}{2x - x^2}$.

16. Последовательности x_n заданы посредством рекуррентного соотношения $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Исследуйте зависимость пределов этих последовательностей от значения их первого члена x_0.

§5. Непрерывные функции

Скажем несколько слов о существующей терминологии. Иногда говорят, что у функции $y = \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва (второго рода), а про саму эту функцию — что она имеет разрыв в нуле. Однако по определению непрерывности функция *должна быть определена* в той точке, в которой она исследуется на непрерывность. Поэтому функция $y = \frac{1}{x}$ является непрерывной во всех точках своей области определения, т. е. непрерывной на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Другое дело, что можно ставить вопрос о том, можно ли доопределить данную функцию в, условно говоря, граничных точках ее области определения так, чтобы новая функция оказалась непрерывной в этих точках.

1. Является ли непрерывной функция
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, \text{ при } & x = 0? \end{cases}$$

2. Верно ли, что найдется такое положительное число δ, что $\left|\frac{\operatorname{tg} x}{x^5+1}\right| < 0{,}01$ при всех $x \in [-\delta; \delta]$?

3. Укажите такое положительное число δ, что $|x^2 - 4| < 0{,}01$ при всех $x \in (2 - \delta; 2 + \delta)$.

4. Являются ли непрерывными на $\mathbb{R}$ функции, определенные посредством равенств: а) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$; б) $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$?

5. Определите число решений уравнений:
а) $x^3 + x = 1$; б) $x(x-1)(x-2)(x-5) = 1$; в) $1 + \sin x = 2x$.

6. Верно ли, что если функция является непрерывной и обратимой, то обратная к ней функция также является непрерывной?

7. Верно ли, что: а) функция, заданная на отрезке $[a;b]$, но не являющаяся непрерывной, не достигает на нем ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения; б) функция, заданная и непрерывная на промежутке $(a;b)$, не достигает на нем ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения?

8. Какие из следующих функций достигают своего наибольшего значения на заданном множестве $\mathcal{E}$:
а) $f(x) = x^2$, $\mathcal{E} = [0;1)$; б) $g(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^2)}$, $\mathcal{E} = [1;2]$;
в) $h(x) = \begin{cases} x, \ x \in [0;1], \\ 3 - x^2, \ x \in (1;2]? \end{cases}$

9. Приведите пример функции, заданной на отрезке $[0;3]$, множеством значений которой на этом отрезке является: а) трехточечное множество; б) объединение двух непересекающихся отрезков; в) вся числовая прямая.

10. Существует ли определенная и непрерывная на всей числовой прямой функция, совпадающая с данной функцией $f(x)$ во всех точках области определения этой функции?
а) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$; б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; в) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

11. Докажите, что если существует такое число $q \in (0;1)$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant q|x-y|$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$, то уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение.

12. Верно ли, что если множеством значений функции $f(x)$ на любом отрезке числовой прямой является некоторый отрезок, то функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

§6. Пределы функций

Практически каждое из предлагаемых ниже заданий состоит из нескольких пунктов. Методическая мысль состояла в том, чтобы при нахождении пределов приучить студентов смотреть не только на выражение для функции, но и на предельное значение аргумента. А то иногда приходится читать, что $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to \infty$, «поскольку это замечательный предел». Идеологически этот параграф непосредственно связан со следующим параграфом, поскольку суть «замечательных пределов» состоит в вычислении значений *производных* основных элементарных функций. Отметим, что при решении предлагаемых здесь задач кроме определения непрерывности функции, а также замечательных пределов, иногда надо использовать то, что «логарифмическая функция растет медленнее любой степенной функции», т. е. что

$$\text{если} \quad p > 0, \quad \text{то} \quad \frac{\ln x}{x^p} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty\,.$$

1. Найдите предел функции $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$ при: а) $x \to -1$; б) $x \to 1$; в) $x \to \infty$.

2. Найдите предел функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при: а) $x \to 0$; б) $x \to \pi$; в) $x \to \infty$.

3. Найдите предел функции $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ при: а) $x \to 0$; б) $x \to 1$; в) $x \to +\infty$.

4. Найдите предел функции $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x}$ при: а) $x \to 0$; б) $x \to 1$; в) $x \to +\infty$.

5. Вычислите пределы при $x \to 1$ функций: а) $\frac{\sin \pi x}{x}$; б) $\frac{\sin \pi x}{x-1}$; в) $\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x-1}}$.

6. Пусть $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$ при $x \to \alpha$ (здесь α может быть как произвольным действительным числом, так и символом ∞), где A и B — это некоторые числа, при этом $A > 0$. Докажите, что $f(x)^{g(x)} \to A^B$ при $x \to \alpha$.

7. Найдите предел функции $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ при: а) $x \to 0$; б) $x \to 2$; в) $x \to +\infty$.

8. Вычислите пределы при $x \to 1$ функций: а) $x^{\frac{1}{x-1}}$; б) $(1+\cos 2\pi x)^x$; в) $\left(1 + \sqrt[3]{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

9. Докажите, что периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса r, стремится к $2\pi r$ при $n \to \infty$.

§7. Пределы и производные

1. Пусть $f(x) = \sqrt{4x+1}$. Найдите значение $f'(2)$, используя определение производной.

2. Найдите значение производной:
а) функции $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2+3}\,\operatorname{arctg} x$ при $x=1$;
б) функции $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}\ \ln\bigl(1+\sqrt{x+1}\bigr)\sin^2 x$ при $x=0$.

3. Найдите все значения p, при которых: а) функция

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin\frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема на $\mathbb{R}$; б) производная этой функции непрерывна на $\mathbb{R}$.

4. а) Выясните, существует ли касательная к параболе $y = x^2 - x + 5$, параллельная прямой $y = 2011x$. б) Найдите множество углов наклона к оси абсцисс касательных к графику $y = \sqrt{1+x^2}$.

5. а) Выведите уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, лежащую на этой параболе. б) Докажите, что треугольники, ограниченные осями координат и касательными к гиперболе $y = \frac{1}{x}$, являются равновеликими.

6. Проверьте непосредственным вычислением, что если $a > 0$, то график $y = ax^2 + bx + c$ квадратичной функции лежит над любой своей касательной.

7. Даны функции $f(x) = e^{x^2+2x}$ и $g(x) = \ln(3x+1)$. Найдите производную при $x = 0$ композиции $f\bigl(g(x)\bigr)$ этих функций.

8. Обозначим через $g(x)$ функцию, являющуюся обратной к функции $f(x) = x^3 + 3x$. Найдите значение $g'(4)$.

9. Вычислите пределы при $x \to 0$ функций: а) $\frac{\sqrt[5]{\cos x}-1}{x^2}$; б) $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; в) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}$.

10. Найдите значение p, при котором следующий предел конечен и отличен от нуля:
а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^p}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^p}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} x^p \left(\sqrt[3]{x^3+x+1} - x\right)$.

11. Можно ли найти наибольшее значение функции $f(x) = \arcsin(\sin x)$ на $[0;\pi]$ при помощи теоремы Ферма?

§8. Приложения дифференциального исчисления

1. а) Найдите производные функций $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. б) Являются ли эти функции постоянными? в) Нет ли противоречия между сделанными вами выводами?

2. Найдите все значения a, при которых данная функция является монотонной: а) $y = ax^3 + x^2 + x$: б) $y = ax + \sin 2x$.

3. Найдите все значения a, при которых являются выпуклыми на своей области определения функции: а) $f(x) = ax^2 + bx + c$; б) $g(x) = a^x$; в) $h(x) = \log_a x$.

4. а) Определите в зависимости от значения a число корней уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = a$. б) Определите число решений уравнения $x^6 = 6^x$.

5. Докажите неравенства:
   а) $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ при $x > -1, x \neq 0$; б) $\sqrt[5]{1+x} \leqslant \frac{x+5}{5}$ при $x \geqslant -1$.
   в) Верно ли, что $\sqrt[4]{1+x} \leqslant \frac{x+5}{5}$ при всех $x \geqslant -1$?

6. Из углов листа картона размером $50\,\text{см}\times 80\,\text{см}$ нужно вырезать одинаковые квадраты, чтобы, согнув этот лист, получить коробку наибольшей вместимости. Какой должна быть сторона этого квадрата?

7. Найдите наибольший член последовательности: а) $x_n = \frac{2n-5}{n^2+1}$; б) $y_n = n^4 \cdot 2^{-n}$.

8. а) Пусть $f(x)$ — квадратичная функция, про которую известно, что $f(-2) = f(11) = 0$, а $f'(-2) = -3$. Найдите $f'(11)$. б) Пусть $g(x)$ — кубическая функция, про которую известно, что $g(1) = g(3) = 0$, при этом $g'(1) = a$ и $g'(3) = b$. Найдите третий корень этой функции.

9. Найдите условие на коэффициенты уравнения $x^3+px+q = 0$, при выполнении которого оно имеет три различных действительных корня.

10. Найдите соотношение между радиусом r и высотой h прямого кругового цилиндра, который при заданном объеме имеет наименьшую полную поверхность.

11. Рассмотрим лежащую в первом координатном угле часть кривой, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$. Найдите наибольшее возможное значение ординат точек этой части кривой.

12. Докажите неравенство $\sin\frac{\pi}{30} > \frac{1}{10}$, обратив внимание на то, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

13. Докажите, что трехчлен степени n имеет не более $k = \min\{n, 5\}$ действительных корней.

§9. Исследование функций и построение их графиков

Одним из основных навыков, которые должны приобрести студенты в процессе изучения курса математического анализа в течение первого семестра, является *построение графиков функций.* Во всех приводимых ниже задачах требуется построить график данной функции и найти множество ее значений. Исследование функции на выпуклость проводить не обязательно. Однако при построении эскизов графиков учитывать направление выпуклости функции на различных промежутков необходимо.

> Автор намеренно группировал задачи так, чтобы студенты могли увидеть, как изменение значений параметров влияет на поведение функции и вид ее графика, или же почувствовать сходство рассуждений, используемых при построении графиков совсем различных на первый взгляд функций.

1. а) $y = x^3 + x$; б) $y = x^3 - 3x$; в) $y = x^3 - 3x + 2$.

2. а) $y = x^4 - 5x^2 + 4$; б) $y = (x-1)^2(x-3)^2$; в) $y = (x-1)^3(x-3)$.

3. а) $y = \sqrt{2x - x^2}$; б) $y = \sqrt{2x + x^2}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

4. а) $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x + 2}$; б) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 2}$; в) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

5. а) $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x}$; б) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 2x}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}$.

6. а) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x}$; в) $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

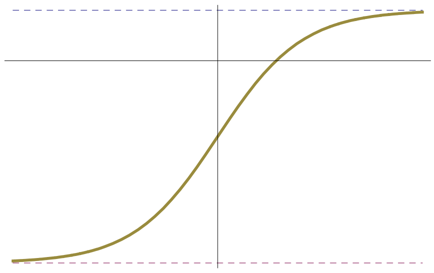
7. а) $y=\sqrt{2x+1}-x$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-x}{x+1}$; в) $y=(x-1)\sqrt{2x+1}$.

8. а) $y=(x+2)e^{-x}$; б) $y=(x-1)^2e^{x}$; в) $y=x^3e^{-x}$.

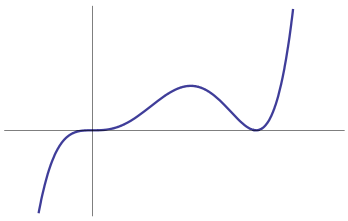
9. а) $y=x\ln x$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; в) $y=x^x$.

10. а) $y=x+2\sin x$; б) $y=2^{\sin x}$; в) $y=3\cos^{10}x+3\sin^{10}x$.

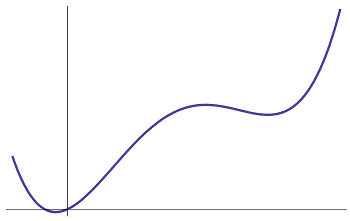
11. Выясните, может ли график некоторой рациональной функции (т. е. частного двух многочленов) иметь изображенный на следующем рисунке вид.



12. Задайте формулой какие-нибудь функции, эскизы графиков которых имеют следующий вид:



а)



б)

Решения, комментарии, обсуждения

§1. Последовательности: первые свойства.

1.1. Все, что надо сделать, — это решить в натуральных числах уравнение $x_n = c$. Для последовательности из п. а) это сделать совсем просто. Во-первых, ясно, что $x_4 = \frac{9}{5}$. Решая уравнение $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{10}{7}$, получим, что $4n = 3$, а это уравнение натуральных решений не имеет. Далее полезно отметить, что $\frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$, поэтому число $\frac{22}{9}$ уж никак не может быть одним из значений данной последовательности. В случае последовательности из п. б) нет никакого способа решать полученное уравнение. Нетрудно увидеть, что $y_3 = 17$ и $y_7 = 177$. То, что число 1017 не является значением, следует из того, что данная последовательность является возрастающей, а $y_9 < 1017 < y_{10}$. Начнем исследовать последовательность из п. в). Уравнение $n - \sqrt{n^2 - 3n + 6} = 1$ можно просто решить, записав его в виде $n - 1 = \sqrt{n^2 - 3n + 6}$ и возведя в квадрат обе его части. Получим, что $n = 5$, таким образом, $z_5 = 1$ (а отличие от предыдущих примеров, это число так просто не подберешь). Применив этот способ для решения уравнения $z_n = 3$, получим, что оно решений не имеет. Далее, вместо того чтобы затем решать уравнение $z_n = 5$, разумнее оценить значения этой последовательности. Так как $n^2 - 3n + 6 > n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$, получаем, что $z_n < n - (n-2) = 2$ при $n \geqslant 2$. Поэтому числа, бóльшие 2, никак не могут являться значениями последовательности z_n.

> Полезно показать студентам разные способы рассуждений. Уверен, что до рассуждений, основанных на оценках значений последовательностей, они не додумаются. А это — часто используемый и очень «математический» способ рассуждения.

1.2. Нетрудно видеть, что подойдет формула $x_n = \frac{(n+1)^2}{n+2}$.

> Обратите внимание студентов на то, что кроме этой формулы данные числа являются и первыми членами последовательности, заданной формулой $y_n = x_n + (n-1)(n-2)(n-3)p(n)$, где $p(x)$ — это *произвольная* функция!

Для исследования монотонности рассмотрим разность соседних членов (стандартный способ). Поскольку

$$x_n - x_{n-1} = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+1-n^2-2n^2}{(n+1)(n+2)} = \\ = \frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

получаем, что $x_n > x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 2$. Следовательно, данная последовательность возрастающая.

> Интересно, сколько студентов сочтут, что ответ на второй вопрос задания следует из ответа на его первый вопрос?

С точки зрения «здравого смысла» данная последовательность ограниченной не является (однако автор не раз замечал, что применять здравый смысл в математических задачах студенты не привыкли). Доказать ее неограниченность проще всего, написав неравенство

$$x_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} = \frac{n^2+2n+1}{n+2} > \frac{n^2+2n}{n+2} = n.$$

Последовательность натуральных чисел не является ограниченной сверху, значит, не является ограниченной сверху и данная последовательность.

1.3. Сначала надо просто взять и посчитать. Имеем, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, $x_3 = x_2 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$. Теперь уже видно, что, по-видимому, $x_n = \frac{n}{n+1}$. Доказать это равенство можно по индукции. Поскольку $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, из справедливости при заданном числе n равенства $x_n = \frac{n}{n+1}$ следует, что

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Таким образом, доказано, что равенство имеет место и для натурального числа, следующего за n. Так как равенство уже было получено для $n = 1, 2, 3$, оно будет верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

> Вполне возможно, что разговор о методе математической индукции должен быть существенно более длинным.

С другой стороны, очень полезно сразу показать другой подход к поиску явной формулы для общего члена этой последовательности. Так как $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, получаем, что

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\ .$$

> Автор надеется, что после разбора задачи 1.2 следующую задачу большинство студентов уже будет в состоянии решить самостоятельно.

1.4. а) Разность $x_{n+1} - x_n = 2n+1+a$ не может быть неположительной при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, если данная последовательность монотонна, то она, конечно, является возрастающей. Наименьшее значение разности равно $a + 3$. Значит, при $a \geqslant -3$ эта последовательность — возрастающая, а при $a > -3$ — строго возрастающая.

> Смогут ли ваши студенты угадать ответ задания п. б), не проводя вычислений?

б) Самый простой способ решения основан на преобразовании формулы, задающей эту последовательность. Имеем

$$y_n = \frac{an+1}{n+2} = \frac{an+2a+1-2a}{n+2} = a + \frac{1-2a}{n+2}\ .$$

Последовательность $\frac{1}{n+2}$ — убывающая, поэтому если $1 - 2a > 0$, то и данная последовательность является убывающей. Итак, получаем ответ: если $a < \frac{1}{2}$, то y_n — убывающая последовательность, если $a > \frac{1}{2}$, то она является возрастающей. При $a = \frac{1}{2}$ эта последовательность постоянна.

> Решение «без вычислений» основано на использовании графической интерпретации. График $y = \frac{ax+1}{x+2}$ представляет собой гиперболу, горизонтальной асимптотой которой является прямая $y = a$. Вертикальной асимтотой является прямая $x = -2$, поэтому на промежутке $[0; +\infty)$ эта функция заведомо монотонна. Ее значение в нуле равно $\frac{1}{2}$, поэтому если $\frac{1}{2} < a$, то, конечно, функция возрастающая.

1.5. а) Конечно, сумма двух последовательностей, одна из которых возрастающая, а другая убывающая, не обязана быть монотонной. Самый простой пример — сумма последовательностей $x_n = n^2$ и $y_n =$

$-4n$. С другой стороны, конечно, сумма возрастающих последовательностей есть возрастающая последовательность, а сумма убывающих последовательностей есть убывающая последовательность. Для доказательства достаточно сложить неравенства $x_n < x_{n+1}$ и $y_n < y_{n+1}$. б) Как известно, если $a < b$ и $c < d$, то не всегда $ac < bd$, без дополнительных предположений этот вывод неправомерен.

> Предложите своим студентам найти эти условия самостоятельно. Стандартное предположение о положительности всех чисел можно ослабить.

Проанализируем стандартное доказательство. Для перехода от неравенства $a < b$ к неравенству $ac < bc$ надо, чтобы выполнялось условие $c > 0$. Для перехода от неравенства $c < d$ к неравенству $bc < bd$, надо, чтобы выполнялось условие $b > 0$. Значит, если числа b и c являются положительными, то $ac < bc < bd$. Положительность числа d вытекает из неравенства $c < d$. Итог рассуждения таков: достаточна положительность трех из чисел a, b, c и d.

Конечно, неверно, что произведение возрастающих последовательностей есть возрастающая последовательность. Простейший пример — произведение последовательностей $x_n = n$ и $y_n = n-4$. Как следует из проведенного доказательства, дополнительным условием, при выполнении которого утверждение будет верным, является положительность всех членов этих последовательностей за исключением, возможно, первого члена одной из них.

1.6. Решение первых двух пунктов задачи основано на удачном преобразовании. Конечно, монотонность последовательности x_n можно исследовать и «в лоб», но в таком случае считать придется больше.

а) Поделив n^2+n+1 на $n+2$ «с остатком», получим, что $n^2+n+1 = (n-1)(n+2)+3$, таким образом, $x_n = n - 1 + \frac{3}{n+2}$. Значит,

$$x_{n+1} - x_n = 1 - \left(\frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3}\right) = 1 - \frac{3}{(n+2)(n+3)} \ .$$

Поскольку $(n+2)(n+3) \geqslant 12$ при $n \in \mathbb{N}$, получаем что $x_{n+1} - x_n > 0$, таким образом, данная последовательность возрастающая.

б) То, что последовательность y_n убывающая, следует из формулы

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \ .$$

в) Поскольку, например, $z_1 = \sin 1 > 0$, $z_4 = \sin 4 < 0$, а $z_7 = \sin 7 > 0$, эта последовательность не является монотонной.

> Отмечу ошибочные рассуждения, которые могут быть даны студентами. Из того, что последовательность x_n, конечно, является неограниченной, никак не следует, что она является возрастающей. А из того, что синус не является монотонной функцией, никак не следует, что не является монотонной последовательность z_n.

1.7. а) Конечно, верно, это простое утверждение, обычно доказываемое в курсе анализа. Именно, если $|x_n| \leqslant a$ и $|y_n| \leqslant b$, то $|x_n+y_n| \leqslant a+b$. б) Конечно, неверно: возьмите $x_n = n$ и $y_n = -n$. в) Конечно, сумма ограниченной и неограниченной последовательностей является неограниченной последовательностью. Интересно то, что этот факт является прямым следствием утверждения п. а). Действительно, если x_n — ограниченная последовательность, а y_n — неограниченная последовательность, то предположение об ограниченности последовательности $z_n = x_n + y_n$ противоречит утверждению п. а), так как $y_n = z_n - x_n$.
1.8. а) Данная последовательность начинается с чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$. Похоже, что остальные ее члены будут еще меньше. Осталось это доказать. Т. е. доказать, что данная последовательность убывающая. Имеем

$$x_{n+1} \leqslant x_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n}{2^n} \Leftrightarrow n+1 \leqslant 2n.$$

Значит, наибольшим значением этой последовательности является $\frac{1}{2}$. б) Поскольку стандартное преобразование (вы с ним уже встречались) приводит к формуле

$$y_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} ,$$

эта последовательность также является убывающей и ее наименьшее значение — это число $\sqrt{3}-1$. в) Эта задача хороша тем, что в ней главное — не испугаться вычислений. Так как

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1+5n-n^2}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)} ,$$

эта разность положительна при $n = 1, 2, \ldots, 5$ и отрицательна при $n = 6, 7, \ldots$ Следовательно,

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_5 < x_6 > x_7 > \ldots$$

Поэтому наибольшим членом этой последовательности является ее шестой член $x_6 = \frac{34}{31}$.

Конечно, для решения этой задачи было бы естественным построить график функции и при этом для исследования ее поведения использовать производную. Поэтому аналогичные задачи естественно давать позже — как задачи на применение дифференциального исчисления.

> Предыдущая задача очень хороша для домашнего задания. А следующая задача хороша тем, что по ней можно проверить, насколько студенты поняли предыдущие идеи. Ведь ответы в ней очевидны! Более того, автор не уверен, что от студентов-нематематиков стоит требовать формального решения заданий двух первых ее пунктов.

1.9. а) Ответ: при $a = 0$. А как же иначе, ведь при $a \neq 0$ в числителе дроби находится квадратичное относительно n выражение, тогда как в ее знаменателе — линейное. Приведем формальное рассуждение (при тех знаниях, которыми на этот момент обладают студенты). Так как

$$x_n = an - a + \frac{a+1}{n+1}\ ,$$

из того, что последовательность $\frac{a+1}{n+1}$, очевидно, является ограниченной, следует, что последовательность x_n ограничена тогда и только тогда, когда является ограниченной последовательность $an - a$, что имеет место только при $a = 0$. б) Ответ: при $a = 1$. Рассуждение аналогично предыдущему и основано на преобразовании

$$y_n = (1-a)n + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\ .$$

в) Ясно, что $|z_n| \leqslant 1$ при произвольном значении параметра a.

1.10. а) Конечно, утверждение неверно. Из неограниченности последовательности не следует, что велики все ее члены с достаточно большими номерами. Пусть $x_n = n$, если число n нечетно, и $x_n = 0$, если оно четно. Последовательность y_n определим, положив, наоборот, $y_n = 0$, если n нечетно, и $y_n = n$ для четных номеров n. Тогда $x_n y_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, хотя каждая из этих последовательностей ограниченной не является. б) Конечно, утверждение неверно. Здесь примеры построить еще проще: $x_n = n$, $y_n = n^2$, а $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \in [0;1]$.

1.11. а) Бояться нечего, а надо немного преобразовать. Так как $\sqrt[n]{2} > 1$, данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt[n]{2} < 1{,}1$, или $1{,}1^n > 2$. В силу неравенства Бернулли $1{,}1^n > 1 + n/10$. А $1 + n/10 \geqslant 2$ при $n \geqslant 10$. Значит, и данное неравенство заведомо верно при $n \geqslant 10$.

> Компьютерные вычисления показывают, что это неравенство верно при всех $n \geqslant 8$.

б) В этом пункте вычисления проще. Так как

$$y_n - 2 = \frac{2^n}{2^{n-1}-1} - 2 = \frac{2}{2^{n-1}-1} < 0{,}1 \Leftrightarrow 2^{n-1} > 21,$$

получаем ответ: $n \geqslant 6$.

§2. Пределы последовательностей.

2.1. а) Поскольку $\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$, получаем, что

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3n > 7 \Leftrightarrow n \geqslant 3.$$

б) Поскольку $\frac{2n+1}{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{n-1}{2(n+1)}$, получаем, что

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow 4n < 16 \Leftrightarrow n = 1, 2, 3.$$

Таким образом, первое неравенство справедливо для всех натуральных чисел n начиная с некоторого номера, тогда как второе — наоборот, только для нескольких первых натуральных чисел.

> Конечно, после решения этой задачи стоит задать студентам вопрос: «А как изменится ответ, если мы, к примеру, заменим число 0,3 в правых частях неравенств этой задачи на одну сотую?»

2.2. Используем тот факт, что произведение двух последовательностей, одна из которых является бесконечно малой, а другая — ограниченной, есть бесконечно малая последовательность. Каждая из последовательностей y_n, заданных формулами из п. а) и б), является ограниченной, поскольку все ее члены удовлетворяют неравенству $|y_n| \leqslant 1$. Последовательность из п. в) ограниченной не является, поэтому указанная теорема неприменима. С другой стороны, мы не можем утверждать, что в этом случае произведение $x_n y_n$ не является бесконечно малой последовательностью. Все зависит от характера стремления к нулю последовательности x_n. Таким образом, требуется дополнительная информация об этой последовательности. Действительно, если $x_n = \frac{1}{n^2}$, то $x_n y_n = \frac{1}{n}$, а эта последовательность является бесконечно малой. С другой стороны, к примеру, если $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, то $x_n y_n = (-1)^n$, таким образом, эта последовательность предела не имеет (см. также следующую задачу).

2.3. Автор обычно в такой ситуации говорит следующим образом: «Ничего нельзя сказать о поведении произведения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей — информации недостаточно».

Примеры того, что возможны случаи а) и в), были приведены в решении предыдущей задачи. Если $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = n^2$, то произведение $x_n y_n = n$ является бесконечно большой последовательностью, таким образом, возможен случай б). Положив

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{если число } n \text{ четно,} \\ \frac{1}{n}, & \text{если число } n \text{ четно,} \end{cases}$$

и $y_n = n^2$, мы получим, что произведение $x_n y_n$ является неограниченной последовательностью, которая, однако, не является бесконечно большой, — пример, когда имеет место случай г). Наконец, если $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = an$, то $x_n y_n$ есть постоянная последовательность, которая, следовательно, имеет своим пределом (произвольно заданное отличное от нуля) число a.

2.4. Вычисления, аналогичные проведенным при решении задачи 1.3, показывают, что

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{6}\ .$$

2.5. Ответы на задания п. а) и б) очевидны, поскольку надо просто воспользоваться стандартными теоремами о пределах при арифметических операциях над последовательностями. Если $x_n \to 1$ и $y_n \to 2$, то $z_n = 2x_n - 3y_n \to 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$, а $u_n = \frac{x_n}{y_n} \to \frac{1}{2}$. Ответ на задание в) также несложен и следует из того, что произведение последовательности, стремящейся к числу, отличному от нуля, и бесконечно большой последовательности также является бесконечно большой последовательностью. Таким образом, $v_n \to \infty$.

О последовательности w_n «ничего утверждать нельзя». Так как $x_n - 1 \to 0$ и $y_n - 2 \to 0$, для последовательности w_n возможны все варианты поведения, перечисленные в условии задачи 2.3. Например, если $x_n = 1 + \frac{a}{n}$ и $y_n = 2 + \frac{1}{n}$, то $w_n = a \to a$.

Мы и говорим, что «имеет место неопределенность», в случае, когда информации о пределах последовательностей недостаточно для того, чтобы сделать вывод о пределе зависящего от них выражения.

2.6. а) Если $x_n \to 2$, то $x_n^2 + x_n - 2 \to 4$, $x_n^2 - 1 \to 3$, поэтому $y_n \to \frac{4}{3}$. б) В этом случае «имеет место неопределенность». Но отсюда не следует, что «ничего сказать нельзя», а следует то, что надо попробовать провести дополнительное исследование. Действительно, так как

$$y_n = \frac{(x_n+2)(x_n-1)}{(x_n+1)(x_n-1)} = \frac{x_n+2}{x_n+1}$$

получаем, что $y_n \to \frac{3}{2}$.

> По сути дела произошло следующее. Мы представили числитель дроби в виде $u_n v_n$, ее знаменатель в виде $u_n w_n$, где $u_n \to 0$, а последовательности v_n и w_n имеют пределы, отличные от нуля. Собственно говоря, в этом и заключается «раскрытие неопределенностей», только в будущем для этого можно будет использовать формальную технику, например *правило Лопиталя*.

в) В этом случае $y_n \to \infty$, поскольку знаменатель дроби стремится к нулю, а числитель — к -2. г) Сделаем стандартное преобразование. Так как

$$y_n = \frac{1+\frac{1}{x_n}-\frac{2}{x_n^2}}{1-\frac{1}{x_n^2}}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{x_n} \to 0, \quad \text{то} \quad y_n \to 1.$$

2.7. а) Проще всего было бы поступить следующим образом. Рассмотрим тождество

$$x_{n+1} = 1 + a + \ldots + a^n = 1 + a x_n.$$

Если перейти к пределу при $x_n \to c$ в обеих его частях, мы получим, что $c = 1 + ac$, откуда находим $c = \frac{1}{1-a}$. Все хорошо и просто, но при $a = 2$ получается, что пределом положительной последовательности является число -1?! С таким парадоксом мы еще встретимся. Пока же вывод таков: если вычислять предел в предположении, что он есть, то, когда он не существует, результатом проведенных вычислений может оказаться полная бессмыслица.

> По существу это задача о нахождении формулы суммы геометрической прогрессии — школьная задача. Однако автор не раз и не два видел, что студенты не знакомы с ее выводом. Здесь приятно бывает предложить им продолжить набор следующих формул — «формул сокращенного умножения».

Итак, хорошо известно, что

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad \text{и} \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Далее,

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x-1)(x^3+x^2+x+1).$$

Теперь легко догадаться, что должно быть верно алгебраическое тождество

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1),$$

следствием которого и является формула для суммы (конечной) геометрической прогрессии (конечно, в предположении, что $a\neq 1$)

$$1+a+\ldots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a}\ .$$

Теперь ясно, что ответ на вопрос о пределе последовательности x_n зависит от поведения последовательности a^n. Если $|a|<1$, то $a^n\to 0$, поэтому $x_n\to\frac{1}{1-a}$. Если $a=1$, то $x_n=n\to\infty$. То же самое имеет место, если $|a|>1$. Наконец, при $a=-1$ последовательность x_n не имеет предела, так она имеет вид $1,0,1,0,\ldots$. Таким образом, ответ состоит в том, что последовательность x_n является сходящейся, только если $|a|<1$, а ее предел равен $\frac{1}{1-a}$.
б) Поскольку

$$x_n=0{,}23\cdot\left(1+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100^{n-1}}\right),$$

в силу формулы из предыдущего пункта пределом последовательности x_n является число

$$0{,}23\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{23}{99}\ .$$

2.8. Так как $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to 1$, получаем, что $x_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\to 2^1=2$.

> В этом месте хорошо бы сделать паузу для того, чтобы хотя бы один из студентов задал вопрос: «А почему из того, что $x_n\to a$, следует, что $2^{x_n}\to 2^a$?» Вопрос этот вполне содержателен, так как ответ на него не следует ни из каких предыдущих утверждений о действиях с пределами. Как понимают все преподаватели, ответ на него можно дать лишь после того, как будет введено понятие степени с произвольным показателем. И, по существу, он непосредственно связан с *непрерывностью* показательной функции.

В связи с предыдущим замечанием давайте подойдем к решению этой задачи с другой стороны. Последовательность x_n можно задать рекуррентным образом: $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$. Если $x_n < 2$, то $2x_n < 4$, значит, $x_{n+1} < 2$. Таким образом, эта последовательность ограничена сверху. Очевидно также, что она является возрастающей. В силу теоремы Вейерштрасса (о которой речь пойдет дальше) эта последовательность имеет предел. Обозначим его через a. Тогда, перейдя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, получим, что $a = \sqrt{2a}$. Поскольку $a \neq 0$ (так как $x_n > 1$), получаем, что $a = 2$.

> Автор придерживается того принципа, что обманывать нехорошо. Конечно, если начать первую лекцию с аксиоматики действительных чисел, то это приведет к полному непониманию, на первых порах *нельзя и заикаться* о доказательствах абсолютно очевидных для ребят утверждений. Например, доказывать, что существуют квадратные корни из положительных чисел (об этом можно и нужно сказать позже — тогда, когда будет доказана теорема о промежуточном значении). Однако при изложении *нового* материала логика должна быть безупречна, хотя доказывать надо не все. Автор обычно говорит на лекциях: «Это есть математическое занудство, посему доказывать мы его не будем.»

2.9. Вычисления показывают, что $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$. Далее, если предположить, что $x_n = \frac{1}{n}$, то получим, что

$$x_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} .$$

Значит, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$.

2.10. Вопрос для читателя: почему приводимые далее рассуждения являются не просто неверными, а даже *бессмысленными*?

а) Из того, что $x_n \to \frac{1}{2}$, следует, что $x_n^n \to \frac{1}{2^n} \to 0$. б) Из того, что $x_n \to 1$, следует, что $x_n^n \to 1^n = 1$. в) Из того, что $x_n \to 2$, следует, что $x_n^n \to 2^n \to +\infty$.

Ответ на поставленный вопрос таков: предел последовательности по своему определению есть число (или символ ∞ в случае, если последовательность является бесконечно большой). Поэтому писать, что $x_n^n \to \frac{1}{2^n}$ бессмысленно! Конечно, два из приведенных ответов верны, но третий — неверен!

> Эта задача важна тем, что она показывает, насколько нужен опыт, чтобы избегать стандартных ошибок. Интуиция без опыта может обманывать. При этом, как видно, неверное рассуждение может дать верный ответ. Но, поскольку оно неверно, в других случаях оно может дать *неверный ответ.*

Как же следовало рассуждать в действительности? а) Так как $x_n \to \frac{1}{2}$, найдется номер, начиная с которого $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{3}$. Поэтому начиная с этого номера верно неравенство $0 \leqslant x_n^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Поскольку $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, получаем также, что $x_n^n \to 0$. в) Рассуждаем аналогичным образом. Так как $x_n \to 2$, найдется номер, начиная с которого $x_n \geqslant \frac{3}{2}$. Поэтому начиная с этого номера верны неравенства $x_n^n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Поскольку $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$, получаем также, что $x_n^n \to +\infty$.

Однако в случае б) рассуждать аналогичным образом невозможно. Давайте избавимся от степени, прологарифмировав выражение x_n^n. В результате мы получим произведение $n \cdot \log_2 x_n$. А теперь внимание: из того, что $x_n \to 1$, следует, что $\log_2 x_n$ есть бесконечно малая последовательность. Поэтому логарифм последовательности x_n^n является произведением бесконечно малой последовательности и бесконечно большой последовательности, про которое *ничего утверждать нельзя*! Таким образом, ответ на вопрос п. б) состоит в том, что имеющейся информации недостаточно для того, чтобы найти искомый предел.

> А почему из того, что $x_n \to b$, следует, что $\log_a x_n \to \log_a b$?

О последовательностях такого сорта речь пойдет далее при определении числа e. Пока же можно ограничиться следующим соображением. В силу неравенства Бернулли справедливо неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$, поэтому предел этой последовательности, если он существует, будет никак не меньше 2, потому заведомо не может быть равен 1.

2.11. Для доказательства проще всего переписать данное неравенство в виде

$$1 > \left(\tfrac{10}{11}\right)^n + \left(\tfrac{9}{11}\right)^n$$

и далее воспользоваться тем, что его правая часть стремится к нулю, откуда и следует (в силу известного утверждения), что оно будет верно для всех достаточно больших натуральных чисел n.

> Студенты часто говорят, что это неравенство верно, поскольку 11^n *растет быстрее, чем* 10^n *и* 9^n. Однако из того, что $5n$ растет быстрее, чем $3n$ и $4n$, не следует, что $5n > 3n + 4n$. Термину «растет быстрее» необходимо придать *точный смысл*, чего в данный момент лучше не делать.

2.12. Эта задача сложнее, чем все предыдущие, и, в общем-то, нельзя ожидать, что студенты будут в состоянии решить ее самостоятельно. Хотя идея, на которой основано решение, ранее уже встречалась.

> Кстати, понятно, что эта задача непосредственно связана с темой «Ряды», о чем при изучении этой темы и стоит будет напомнить.

Положим $x_n = \sqrt{n}$. Ясно, что $x_n \to +\infty$, хотя, как уже было показано, $x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$.

2.13. Сделаем замену $y_n = \sqrt[12]{x_n}$.

> Полезно предварительно доказать, что если $x_n \to a$, то $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{a}$. Автор обычно доказывает этот факт для квадратных корней и делает ссылку «вперед», говоря, что в будущем общий факт будет следствием некоторой общей теоремы.

Следовательно, $y_n \to 1$, а сама дробь имеет вид

$$\frac{\sqrt[4]{x_n} - 1}{\sqrt[3]{x_n} - 1} = \frac{y_n^3 - 1}{y_n^4 - 1} = \frac{y_n^2 + y_n + 1}{(y_n^2 + 1)(y_n + 1)} \to \frac{3}{4}\ .$$

> Смысл этой задачи понятен. Она представляет собой частный случай одного из так называемых «замечательных пределов», потому полезно познакомить студентов с одним из них заранее.

2.14. а) Простое упражнение:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\big(x_n + x_{n-1}\big) - x_n = \frac{1}{2}\big(x_{n-1} - x_n\big) = -\frac{1}{2}\big(x_n - x_{n-1}\big).$$

б,в) Имеем

$$\begin{aligned} x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\,(x_1 - x_0) + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}\,(x_1 - x_0) + \ldots + (x_1 - x_0) = \\ &\qquad\qquad = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \to \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\ . \end{aligned}$$

> Полезно обратить внимание студентов на то, что, перейдя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ в предположении, что $x_n \to a$, мы получим равенство $a = a$, т. е. тождество.

2.15. Перечислим варианты видоизменения определения предела последовательности, поместив их в следующую таблицу (для краткости записи опустим условие положительности числа ε).

А. $\forall\,\varepsilon\,\forall\,k\,\forall\,n \geqslant k\ |x_n - a| < \varepsilon$	**Б.** $\exists\,\varepsilon\,\forall\,k\,\forall\,n \geqslant k\ |x_n - a| < \varepsilon$
В. $\forall\,\varepsilon\,\forall\,k\,\exists\,n \geqslant k : |x_n - a| < \varepsilon$	**Г.** $\exists\,\varepsilon : \forall\,k\,\exists\,n \geqslant k\ |x_n - a| < \varepsilon$
Д. $\forall\,\varepsilon\,\exists\,k\,\exists\,n \geqslant k : |x_n - a| < \varepsilon$	**Е.** $\exists\,\varepsilon\,\exists\,k : \forall\,n \geqslant k\ |x_n - a| < \varepsilon$
Ж. $\exists\,\varepsilon\,\exists\,k\,\exists n \geqslant k : |x_n - a| < \varepsilon$	

А. Дано, что $\forall\,\varepsilon$ и $\forall\,n$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В частности, $\forall\,\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_1 - a| < \varepsilon$, откуда следует, что $x_1 = a$. Аналогичным образом, $x_n = a$ для любого натурального числа n. Следовательно, данному определению. удовлетворяют только постоянные последовательности, а число a — это общее значение членов такой последовательности.

Б. Дано, что существует такое число ε, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Этому определению удовлетворяет любая ограниченная последовательность, при этом a есть произвольное действительное число.

> Как видно из разобранных примеров, варианты А и Б вполне бессмысленны.

В. В отличие от предыдущих, этот вариант дает осмысленное определение. Именно, у последовательности, удовлетворяющей этому определению, имеется подпоследовательность, сходящаяся к числу a. При этом множество всех возможных пределов этих подпоследовательностей может быть «очень большим», например, оно может совпадать со всем множеством $\mathbb{R}$.

Г. Определение означает, что у данной последовательности есть ограниченная подпоследовательность. Таким образом, в этом определении есть смысл. Оно означает, что данная последовательность не является бесконечно большой.

Д. Определение вполне бессмысленно. Ему удовлетворяет произвольная последовательность. Попробуйте сами понять, что будет из себя представлять множество всех возможных чисел a.

Е. Формально здесь говорится, что начиная с некоторого номера последовательность является ограниченной. Но тогда и сама последовательность является ограниченной. Таким образом, это определение совпадает с определением Б.

Ж. Совершенно бессмысленное определение. И последовательность произвольна, и число a произвольно.

§3. Существование пределов.

3.1. а) Поскольку $\mathcal{L} = [-3; 1]$ и $\mathcal{R} = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$, утверждение места не имеет. Действительно, если $x = 1 \in \mathcal{L}$ и $y = \frac{1}{2} \in \mathcal{R}$, то $x > y$. б) В данном случае снова $\mathcal{L} = [-3; 1]$, но теперь $\mathcal{R} = [1; 3]$. Поэтому утверждение верно, и единственным числом z, для которого для любых чисел $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{R}$ верны неравенства $x \leqslant z \leqslant y$, является $z = 1$. в) В последнем случае $\mathcal{R} = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$, утверждение верно, а множеством чисел z с требуемыми свойствами является отрезок $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.

> Если мы что-то хотим доказывать о последовательностях, а далее о непрерывных функциях, то нам не обойтись без *аксиомы полноты*. Существует большое разнообразие в выборе утверждений, которые можно назвать аксиомой полноты. Можно, например, сказать, что *всякая фундаментальная последовательность имеет предел.* Конечно, такое определение в определенном смысле самое верное (поскольку в метрическом пространстве иначе и не скажешь). Однако на первых порах, особенно — для нематематиков, такая формулировка будет непонятна, так как она сама основана на определении предела. Поскольку пока речь идет о числовой прямой, можно выбрать в качестве исходной аксиомы так называемую *аксиому о разделяющей точке.* Она, с одной стороны, очень естественна, а с другой стороны, из нее легко выводятся все основные утверждения: существование точной верхней и точной нижней границ, теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности и т. д. и т. п. Предыдущая задача и предназначена для того, чтобы студенты осознали формулировку этой аксиомы.

3.2. а) $\mathcal{U} = [1; +\infty)$. б) $\mathcal{U} = [3; +\infty)$. в) $\mathcal{U} = [2; +\infty)$. г) Поскольку множество $\mathcal{D}$ не является ограниченным сверху, множество его верхних границ является пустым.

3.3. а) $\inf \mathcal{A} = \min \mathcal{A} = -1$, а $\sup \mathcal{A} = \max \mathcal{A} = \frac{1}{2}$. Все остальные элементы этого множества лежат в интервале $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. б) Поскольку последовательность $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ является строго возрастающей, а ее предел равен двум, получаем, что $\sup \mathcal{B} = 2$, при этом $\inf \mathcal{B} = \min \mathcal{B} = \frac{3}{2}$.

3.4. Вы уже встречались с ситуацией, когда предположение о существовании предела ведет к ошибочному заключению. Дело в том, что рассматриваемая в задаче последовательность x_n «почти никогда» не имеет предела (см. решение следующей задачи).

3.5. В некоторых случаях вид последовательности x_n абсолютно ясен. Например, если $x_1 = -1$, то $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ и т. д., таким образом, в этом случае последовательность x_n постоянна. Или же если $x_1 = 1$, то $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, откуда сразу видна общая формула $x_n = 2^n - 1$. Однако если $x_1 = 2$, то следующими членами этой последовательности будут числа $5, 11, 23$, таким образом, общая формула сразу не видна. Для ее вывода давайте перепишем данное рекуррентное соотношение как соотношение между членами последовательности $y_n = x_n + 1$. Получаем, что

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 1 = 2x_n + 1 + 1 = 2(x_n + 1) = 2y_n,$$

откуда очевидно, что $y_n = 2^{n-1}y_1$, значит, $x_n = 2^{n-1}(x_1 + 1) - 1$. Таким образом, последовательность x_n является ограниченной в единственном случае, а именно при $x_1 = -1$. Во всех остальных случаях $x_n \to \infty$.

3.6. Запишем рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют члены x_n этой последовательности: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. а) Если $x_{n-1} < x_n$, то и $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2 + x_n} = x_{n+1}$. Так как $x_1 = \sqrt{2} < x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, получаем, что $x_n < x_{n+1}$ при всех натуральных n, что и означает, что последовательность — возрастающая. б) Из предположения, что $x_n < 2$, следует, что $x_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$. Поскольку $x_1 = \sqrt{2} < 2$, неравенство $x_n < 2$ справедливо для всех ее членов. Таким образом, эта последовательность ограничена сверху. В силу теоремы Вейерштрасса данная последовательность сходящаяся. Обозначим через a ее предел. в) Перейдя к пределу в определяющем последовательность рекуррентном соотношении, получим, что $a^2 = 2 + a$, т. е. $a = 2$ или $a = -1$. Но $x_n > 0$, значит, $x_n \to 2$.

> Полезно сообщить студентам, что для членов этой последовательности существует явная формула $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Поэтому то, что ее предел равен 2, следует также из непрерывности косинуса: $\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 0$, следовательно, $x_n \to 2\cos 0 = 2$.

3.7. а) Очевидно, что все члены этой последовательности положительны. Значит, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = 2$. б) Имеем

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} > 0,$$

так как $x_n > \sqrt{2}$. Поэтому $x_n > x_{n+1}$. в) Как обычно, перейдя к пределу в данном рекуррентном соотношении, получим, что $a = \frac{1}{2}\big(a + \frac{2}{a}\big)$, следовательно, $a^2 = 2$. Но $a > 0$, значит, $x_n \to \sqrt{2}$.

> А теперь давайте взглянем на конкретные значения. Четвертый член этой последовательности равен $\frac{577}{408}$. Насколько это число близко к $\sqrt{2}$, показывает следующая таблица.
>
> | | |
> |---|---|
> | $\frac{577}{408}$ | 1,4142156863... |
> | $\sqrt{2}$ | 1,4142135624... |
>
> Что же мы видим — уже у четвертого члена этой последовательности пять знаков после запятой совпадают со знаками ее предела! Это какая-то «сверхсходимость»! К этому эффекту можно вернуться в будущем, а пока можно предложить студентам доказать следующую оценку. А именно, если положить $\Delta_n = x_n^2 - 2$, то $\Delta_{n+1} < \frac{\Delta_n^2}{2\sqrt{2}}$.

3.8. Обозначим через c предел последовательности p_n. а) Перейдя к пределу в соотношении, определяющем эту последовательность, получим, что $c = \frac{bc}{a+c}$, откуда следует, что $c = 0$ или $a + c = b$, т. е. $c = b - a$. б) Так как $p_n > 0$, получаем, что $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n} < \frac{bp_n}{a}$. в) Если $a > b$, то $b - a < 0$, следовательно, это число не может быть пределом последовательности p_n. С другой стороны, в силу предыдущего пункта эта последовательность является убывающей и ограниченной снизу нулем. Значит, у нее есть предел, который в силу п. а) может только быть равным нулю. Конечно, рассуждать можно было иначе. А именно, справедливы неравенства $0 < p_n < \left(\frac{b}{a}\right)^n p_0$. Поскольку $\frac{b}{a} < 1$, получаем, что $\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$, а значит, и $p_n \to 0$.

> Последний пункт этой задачи является переходом к следующему разделу книги, поскольку то, что требуется доказать, — это, по существу, суть свойства *функции* $y = \frac{bx}{a+x}$.

г) Докажем, что если $b > a$, то из того, что $0 < x < b - a$, следует, что $x < \frac{bx}{a+x} < b - a$, а из того, что $x > b - a$, следует, что $b - a < \frac{bx}{a+x} < x$. Действительно,

$$\frac{bx}{a+x} - x = \frac{bx - ax - x^2}{a+x} = \frac{x(b-a-x)}{a+x} ,$$

поэтому, так как $x > 0$, эта разность положительна, если $x < b - a$, и отрицательна, если $x > b - a$. Далее,

$$b - a - \frac{bx}{a+x} = \frac{ab - a^2 - ax}{a+x} = \frac{a(b-a-x)}{a+x} ,$$

поэтому эта разность положительна, если $x < b - a$, и отрицательна, если $x > b-a$. Поскольку $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n}$, получаем, что

$$\begin{aligned} &p_n < p_{n+1} < b-a, \quad \text{если} \quad 0 < p_n < b-a, \quad \text{и} \\ &p_n > p_{n+1} > b-a, \quad \text{если} \quad p_n > b-a. \end{aligned}$$

Рассуждая по индукции, получаем, что если $p_0 < b-a$, то последовательность p_n является возрастающей, причем $p_n < b-a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если же $p_0 > b-a$, то, наоборот, эта последовательность убывающая, причем $p_n > b-a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В обоих случаях существует предел этой послдеовательности, которой может быть равен только числу $b-a$.

> Задайте студентам вопрос: «А что, собственно, мы доказали с точки зрения приложения рассмотренной математической модели?»

3.9. а) Так как $3 < x_n < 3\sqrt[n]{2}$, а $\sqrt[n]{2} \to 1$, получаем, что $x_n \to 3$ в силу «принципа двух милиционеров». б) Воспользуемся тем, что, как было доказано ранее, последовательность $\frac{n}{2^n}$ является убывающей, значит, $\frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{2} < 1$, поэтому $n < 2^n$ при всех натуральных n. Дальнейшее рассуждение аналогично только что проведенному. в) Обобщение выглядит следующим образом: если $0 < a < b$, то $\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b$, а для его доказательства надо повторить рассуждение, проведенное при решении задания п. а).

3.10. При определении *числа e* было доказано, что

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Прологарифмировав эти неравенства, получим, что

$$n \ln \tfrac{n+1}{n} < 1 < (n+1) \ln \tfrac{n+1}{n}\ ,$$

откуда и следуют требуемые неравенства.

3.11. Если $x_n \to 1$, то про поведение последовательности $y_n = x_n^n$ «ничего сказать нельзя». Например, если $x_n = 1 + \frac{a}{n}$, то $y_n \to e^a$. Значит, предел последовательности y_n может быть любым положительным числом. Если $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, то $y_n \to 0$, а если $y_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$, то $y_n \to \infty$. Наконец, если $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, то последовательность y_n ограничена, но не является сходящейся.

> Вопрос студентам: а все ли типы поведения последовательности y_n были уже рассмотрены? Пока забыт вариант неограниченной последовательности, не являющейся бесконечно большой. Конечно, пример последовательности x_n, для которой y_n имеет подобное поведение, построить несложно. Важно, чтобы студенты поняли, что не все варианты были рассмотрены.

§4. Общие свойства функций.

4.1. а) Конечно, функция $f(x)$ является строго возрастающей как сумма двух строго возрастающих функций и константы.

> Интересно, многие ли студенты смогут объяснить (доказать), что функция $y = x^3$ является возрастающей?

б) Пусть $x < y$. Тогда

$$g(y) - g(x) = \frac{2^y - 1}{2^y + 1} - \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = \frac{2^y - 2^x}{(2^x + 1)(2^y + 1)} > 0.$$

Значит, $g(x)$ — возрастающая функция.
в) Областью определения функции $h(x)$ является луч $(0 : +\infty)$. Так как

$$h(x) = \log_2(x + 1) - \log_2 x = \log_2\bigl(1 + \tfrac{1}{x}\bigr),$$

то функция $h(x)$ строго убывающая как композиция убывающей функции $y = 1 + \frac{1}{x}$ и возрастающей функции $y = \log_2 x$.

> Методические замечания. Полезно попросить студентов дать ответ на вопросы этой задачи «по интуиции», т. е. без предварительных вычислений. Далее, полезно отметить, что функция из п. б) — отношение двух возрастающих функций — оказывается возрастающей, а функция из п. в) — разность двух возрастающих функций — есть убывающая функция. Наконец, полезно также представить функцию $g(x)$ в виде композиции двух стандартных функций.

Итак, положив $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$, получаем, что $g(x) = u(2^x)$. То, что функция $u(x)$ возрастает на множестве значений функции $y = 2^x$ — луче $(0; +\infty)$, — практически очевидно. Ведь ее график есть гипербола с горизонтальной асимптотой $y = 1$, а значение в нуле равно -1. Как иначе она может себя вести, если не возрастать на этом луче?!
4.2. Причина проста. Поскольку функция $y = 2^x$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}$, из того, что она равна 1 при $x = 0$, и следует, что решением неравенства $2^x \geqslant 1$ является луч $[0; +\infty)$. Синус не является возрастающей функций (хотя бы потому, что он есть периодическая функция), поэтому из того, что $x > 0$, никоим образом не следует, что $\sin x > 0$.
4.3. а) Утверждение верно. При этом композиция будет возрастающей функцией, если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ является либо возрастающей, либо убывающей. Если же эти функции являются «разномонотонными», то их композиция будет убывающей функцией. Доказательства этих утверждений очень просты — докажем одно из

них. Предположим, что обе функции являются убывающими. Пусть $x < y$. Так как $g(x)$ — убывающая функция, $a = g(x) \geqslant g(y) = b$. Поскольку и функция $f(x)$ является убывающей, $f(a) \leqslant f(b)$, т. е. $f\big(g(x)\big) \leqslant f\big(g(y)\big)$, что и означает, что композиция $f\big(g(x)\big)$ является возрастающей функцией.
б) Конечно, утверждение неверно. Сумма убывающей функции $f(x)$ и возрастающей функции $g(x)$ совсем не обязана быть монотонной функцией.

> Смогут ли ваши студенты самостоятельно построить такие примеры? А если смогут, то насколько разнообразными они будут?

Видимо, самый простой пример — это сумма функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = -x$. То, что функция $y = x^3 - x$ не является монотонной, сразу следует из того, что она имеет три корня. в) То, что произведение монотонных функций не является монотонной функцией, совсем очевидно. Действительно, квадрат функции $f(x) = x$ не является монотонной функцией.

Ясно, что сумма двух возрастающих (убывающих) функций является возрастающей (соответственно убывающей) функцией. Как было видно из приведенного выше примера, соответствующее утверждение для произведения функций неверно. Однако оно будет верно, если дополнительно предположить, что эти функции положительны.

> Какой вопрос в этом месте можно задать студентам?

4.4. Разобъем числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty; -1]$, $[-1; 0]$, $[0, 1]$ и $[1; +\infty)$. На первых двух из них квадратичная функция $g(x) = x^2$ является убывающей, на последних двух — возрастающей. Если $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, то $x^2 \in [1; +\infty)$. Поэтому если $x < y \leqslant -1$, то $x^2 > y^2 \geqslant 1$, значит, $f(x^2) < f(y^2)$, поскольку функция $f(x)$ убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Следовательно, функция $g(x)$ на промежутке $(-\infty; -1]$ является возрастающей. Более кратко: при $x \in (-\infty; -1]$ функция $g(x)$ является возрастающей как композиция двух убывающих функций. Если $x \in [-1; 0]$, то $x^2 \in [0; 1]$, поэтому $g(x)$ — убывающая функция как композиция убывающей функции и возрастающей функции. Далее, на $[0; 1]$ функция $g(x)$ возрастающая, а на $[1; +\infty)$ — убывающая.

> Возможно, что студентам будет проще решить эту задачу, если вначале предложить им найти промежутки монотонности функции $h(x) = f(|x|)$, поскольку ее график получается из графика $y = f(x)$ при помощи стандартного преобразования.

4.5. а) Функция определена при $0 \leqslant x \leqslant 2$, поэтому $0 \leqslant 2x - x^2 \leqslant 1$, значит, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. б) Покажите, что $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$. в) Так как $h(x) = \log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)$, при малых значениях аргумента x выражение $1+\frac{1}{x}$ может быть сколь угодно большим, поэтому и его логарифм может быть сколь угодно большим. Таким образом, функция $h(x)$ ограниченной не является. Тому, кто не будет удовлетворен проведенным рассуждением, предлагается найти значение $h\left(\frac{1}{2^n-1}\right)$, где n — произвольное натуральное число.

4.6. Конечно, оба утверждения неверны хотя бы потому, что последовательность $x_n = n^6 \cdot 2^{-n}$ является бесконечно малой. К этой задаче можно будет вернуться, для того чтобы исследовать поведение данной функции при помощи дифференциального исчисления.

> Понятно, что поставленная задача связана с проблемами использования компьютерных технологий, в частности пакетов *компьютерной алгебры*, при решении математических задач.

4.7. а) Функция $f(x)$ принимает свое наименьшее значение при $x = \frac{1}{2}$. Ее наибольшим значением на отрезке $[-1; 3]$ является наибольшее из ее значений на концах этого отрезка. Поэтому множество ее значений на $[-1; 3]$ есть отрезок $\left[-\frac{1}{4}; 6\right]$. б) Функция $g(x)$ возрастает на $(-\infty; 0]$ и убывает на $[0; +\infty)$. Ее наибольшее значение есть $f(0) = 1$, а так как $f(-1) = \frac{1}{2} > f(3) = \frac{1}{10}$, ее наименьшим значением является $\frac{1}{10}$. Таким образом, множеством значений функции $g(x)$ на данном отрезке является отрезок $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$. в) Конечно, множество значений функции $h(x)$ совпадает с отрезком $[-1; 1]$ — множеством значений синуса, поскольку πx меняется от $-\pi$ до 3π при $x \in [-1; 3]$. г) Так как $x \in [-1; 3] \Leftrightarrow 2x + 1 \in [-1; 7]$, множеством значений функции $u(x)$ является отрезок $[0; 49]$.

> По мнению автора, обязательно следует спросить студентов, удовлетворены ли они проведенными рассуждениями.

В приведенном решении автор сознательно допустил логический «ляп». Действительно, откуда следует, что если, к примеру, число 1 является наименьшим значением данной функции, а число 3 — ее наибольшим значением на данном множестве, то множеством всех ее значений на нем будет отрезок $[1; 3]$? Вообще-то говоря, это просто неверно! Подробнее об этом будет говориться в следующем параграфе, а пока можно ограничиться следующим соображением. Если мы рассматриваем *квадратичную функцию, заданную на некотором отрезке*, то, безусловно, она будет принимать все значения в промежутке между ее наименьшим и наибольшим значениями.

4.8. а) Подставив $x = 2$ в равенство $f(2x+1) = x^2$, получим, что $f(5) = 4$. б) Если $f(2t+1) = t^2$ и $x = 2t+1$, то $t = \frac{x-1}{2}$, поэтому $f(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$.

4.9. Имеем

а) $f\bigl(f(x)\bigr) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$;

б) $g\bigl(f(x)\bigr) = 2(x^2-1) + 1 = 2x^2 - 1$;

в) $f\bigl(g(x)\bigr) = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x$;

г) $g\bigl(g(x)\bigr) = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$.

4.10. Предположим, что $g(a) = g(b)$ при некоторых значениях $a \neq b$. Тогда также и $h(a) = f\bigl(g(a)\bigr) = f\bigl(g(b)\bigr) = h(b)$, что невозможно, так как по условию функция $h(x)$ является обратимой. Таким образом, функция $g(x)$ обязана быть обратимой. Однако про функцию $f(x)$ этого утверждать нельзя. Идея построения соответствующего примера проста, другое дело, что не так-то просто построить естественный пример подобных функций.

> Возможно, что его построение находится за гранью предъявляемых к студентам требований.

Положим $g(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$. Как было показано при решении задачи 4.1, эта функция является строго возрастающей. Как было показано при решении задачи 4.4, множество ее значений лежит в отрезке $[-1;1]$. Положим $f(x) = x$ при $x \in [-1;1]$ и $f(x) = 0$ при $x \notin [-1;1]$. Конечно, функция $f(x)$ обратимой не является, однако композиция $f\bigl(g(x)\bigr) = g(x)$ — обратимая функция.

4.11. Конечно, таких функций бесконечно много, хотя может показаться, что кроме функций $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ и $y = -x$ других и нет. Однако если немного подумать, то ясно, что таковыми являются все функции вида $y = a - x$ при любых $a \in \mathbb{R}$. А сможете ли вы найти еще функции с требуемым свойством?

> Устройте «конкурс» по поиску большего числа таких функций. Понятно, что закончиться он не может, так как даже «типов» этих функций будет бесконечно много...

4.12. а) Так как по условию значение $f(x)$ может быть любым числом из промежутка $[-1;4]$, его квадрат является любым числом из промежутка $[0;16]$, который и будет множеством значений функции $y = \bigl(f(x)\bigr)^2$. б) Данных недостаточно, чтобы можно было сделать какой-то вывод о множестве значений данной функции, так как нам неизвестно, какие значения принимает функция $f(x)$ на промежутке

$[0;+\infty)$. в) Поскольку множеством значений функции $y = 2x+1$ является вся числовая прямая, множество значений функции $f(2x+1)$ совпадает с множеством значений функции $f(x)$, т. е. с отрезком $[-1;4]$. г) В последнем случае искомое множество совпадает с множеством значений функции $y = 2x+1$ на отрезке $[-1;4]$, т. е. с отрезком $[-1;9]$.
4.13. Будем проводить рассуждения двумя способами. Первый из них состоит в том, что мы, условно говоря, найдем наименьшее и наибольшее значение данной функции.
а) Из графика $y = 2x - x^2$ видно, что множеством значений этой функции при $x \in [0;2]$ является отрезок $[0;1]$. Поэтому множеством значений функции $f(x)$ также является этот отрезок. б) Графиком функции $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ является гипербола, из чего следует, что множеством значений этой функции на промежутке $(0;+\infty)$ является промежуток $(-1;1)$. Поскольку $g(x) = u(2^x)$ и множеством значений показательной функции является промежуток $(0;+\infty)$, множеством значений данной функции и является промежуток $(-1;1)$. в) Так как $h(x) = \log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)$, а множеством значений функции $y = 1 + \frac{1}{x}$ при $x > 0$ является луч $(1;+\infty)$, множеством значений функции $h(x)$ является промежуток $(0;+\infty)$.

> Общая идея состоит в следующем. Пока у нас нет определения непрерывности и теоремы о промежуточном значении, можем ли мы пользоваться ею, так сказать, неявно? Автор считает, что следует решить задачи двумя способами. Ведь, например, тот факт, что областью определения логарифма (или даже квадратного корня!) является луч, нельзя установить без этой теоремы. Однако с точки зрения здравого смысла «как может быть иначе». Автор придерживается той точки зрения, что слишком формальное следование принципу «полных доказательств» может довести студентов до полного непонимания. Ведь как можно доказывать то, что очевидно!

Второй способ основан на явном решении уравнений $y = a$ и нахождении условий на значение параметра a, при котором оно имеет решение.
а) Имеем

$$\sqrt{2x - x^2} = a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - 2x + a^2 = 0, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$$

Так как полученнное квадратное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $4 - 4a^2 \geqslant 0$, или $|a| \leqslant 1$, эта система имеет решение только при $a \in [0;1]$. Таким образом, отрезок $[0;1]$ и является множеством значений данной функции.

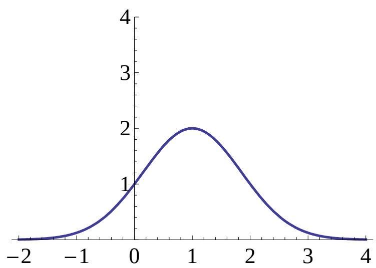
б) Уравнение $g(x) = a$ равносильно уравнению $2^x = \frac{1+a}{1-a}$, которое имеет решение тогда и только тогда, когда $\frac{1+a}{1-a} > 0$, т. е. при $a \in (-1; 1)$.

в) Рассуждая аналогичным образом, приходим к уравнению $x = \frac{1}{2^a-1}$. Областью определения данной функции является промежуток $(0 : +\infty)$, поэтому $x > 0$, значит, $2^a - 1 > 0$, что равносильно тому, что $a > 0$.

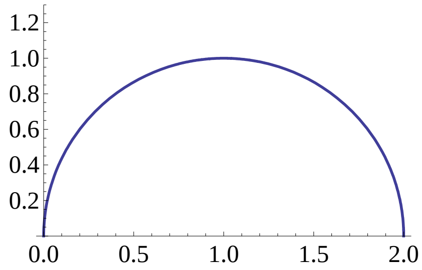
4.14. а) Конечно, утверждение неверно. Для этого достаточно модифицировать пример, построенный при решении задачи 4.10. Пусть $g(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$. Множеством значений этой функции является промежуток $(-1; 1)$. Положим $f(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ при $x \in (-1; 1)$ и $f(x) = 0$ на всей оставшейся части числовой оси. Проверьте (полезным) прямым вычислением, что действительно $f\big(g(x)\big) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$. б) Идея построения предыдущего примера была основана на том, что множеством значений функции $g(x)$ не является вся числовая прямая. Если же множество значений функции $g(x)$ совпадает с $\mathbb{R}$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ будут взаимно обратными.

Это утверждение уж точно строго доказывать не стоит...

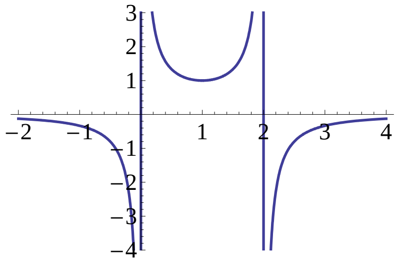
4.15. а) Так как функция $y = 2x - x^2$ возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$, а функция $y = 2^x$ возрастает на $\mathbb{R}$, функция $f(x)$ также возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$. Для построения ее графика осталось понять, что при больших по модулю значениях аргумента значения функции $f(x)$ будут сколь угодно малыми. Ее график изображен на следующем рисунке.



б) Функция $g(x)$ возрастает на $[0; 1]$ и убывает на $[1; 2]$, а ее графиком является верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в точке с координатами $(1, 0)$.



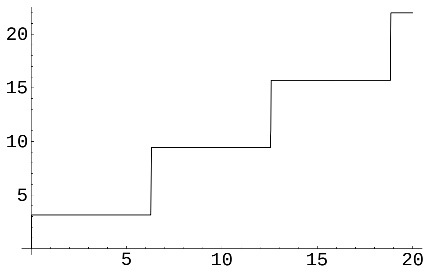
в) Поскольку функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, функция $h(x)$ будет убывать на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$ и возрастать на $[1; 2)$ и $(2; +\infty)$. Ее график изображен на следующем рисунке.



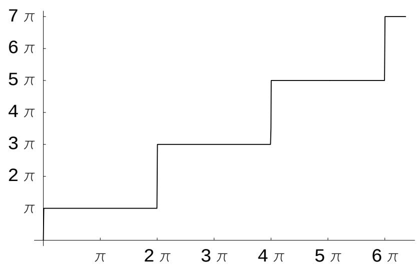
4.16. Подсказка для читателя: функция $y = x + \sin x$ является возрастающей на $\mathbb{R}$. Идея решения по существу та же, что была использована при решении задачи 3.8, однако вместо алгебраических преобразований следует провести логические рассуждения.

> Для большей интриги можно вначале показать студентам результат «компьютерного эксперимента».

На следующем рисунке представлен график зависимости десятого члена последовательности x_n от значения ее начального члена. Опишем эту зависимость более подробно. Для этого определим функцию $f(x)$ следующим образом: для каждого числа a рассмотрим последовательность x_n, у которой $x_0 = a$, и положим $f(a) = x_{10}$.



На этой картинке изображен график функции, очень похожей на кусочно постоянную. Другое дело, что пока непонятно, в каких точках происходит «перескок» с одного ее значения на другое. В действительности до этого несложно догадаться, если вспомнить, что в определении наших последовательностей участвуют тригонометрические функции. А теперь посмотрите на тот же график в осях координат, на которых расставлены значения $\pi, 2\pi, \ldots$



Хорошая задача для хороших студентов...

Для полноты приведем ее решение. Положим $f(x) = x + \sin x$, тогда $x_{n+1} = f(x_n)$. Ясно, что $f(x) > x$ при $x \in (2\pi k; \pi(2k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, и $f(x) < x$ при $x \in (\pi(2k-1); 2\pi k)$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $f(x) = x$ при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому при $x_0 = \pi k$ мы будем получать постоянные последовательности. Рассмотрим теперь случай, когда $x_0 \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $x_0 \in (2\pi k; \pi(2k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция $f(x)$ возрастающая, поэтому $2\pi k < f(x_0) = x_1 < \pi(2k+1)$. Рассуждая далее так же, получаем, что $x_n \in (2\pi k; \pi(2k+1))$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$. Значит, последовательность x_n возрастающая и ограничена сверху числом $\pi(2k+1)$. Следовательно, $x_n \to a$. Перейдя к пределу в равенстве $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$, получим равенство $a = a + \sin a$, а значит, $a = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В нашем случае $a \in (2\pi k; \pi(2k+1)]$, откуда следует, что $a = \pi(2k+1)$.

Если $x_0 \in (\pi(2k-1); 2\pi k)$, то рассуждение аналогично. Вся разница в том, что в этом случае последовательность x_n является убывающей и ее пределом будет число $\pi(2k-1)$.

> Хороший вопрос: как можно изменить определение последовательности x_n, чтобы возможными пределами непостоянных последовательностей были числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

§5. Непрерывные функции.

5.1. Ясно, что функция $f(x)$ непрерывна во всех отличных от нуля точках. Ее непрерывность в нуле является следствием неравенства $|f(x)| \leqslant |x|$.

5.2. Конечно, утверждение верно, оно следует из непрерывности функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^5+1}$ в нуле.

> Автор неоднократно отмечал, что подобная задача повергает студентов в шоковое состояние.

5.3. К примеру, можно взять $\delta = 0{,}002$. Действительно, будем считать, что $x \in (1; 3)$. Тогда $|x^2 - 4| = |x+2| \cdot |x-2| \leqslant 5|x-2|$. Поэтому если $|x-2| < 0{,}002$, то $|x^2-4| \leqslant 5|x-2| < 0{,}01$.

5.4. а) Подставив $x = \pm 1$, получим, что $\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}$, поэтому $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$. Если $|x| < 1$, то $x^n \to 0$, значит, $\frac{1}{1+x^{2n}} \to 1$, так что $f(x) = 1$. Если же $|x| > 1$, то $x^n \to \infty$, откуда следует, что $f(x) = 0$. В результате получаем, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при} \quad x = \pm 1, \\ 1 & \text{при} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Конечно, функция $f(x)$ не является непрерывной.

> Главное, чтобы студенты поняли, что сначала надо вычислить сами пределы.

б) Аналогичные вычисления значений функции $g(x)$ дают следующий результат:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при} \quad x = 1, \\ 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty), \end{cases}$$

а в точке $x = -1$ функция $g(x)$ не определена. В результате получаем, что в точке $x = 1$ эта функция не является непрерывной.

5.5. а) Функция $f(x) = x^3 + x$ является строго возрастающей, поэтому более одного решения данное уравнение иметь не может. Одно решение заведомо есть в силу теоремы о промежуточном значении. Действительно, так как $f(0) = 0 < 1 < 2 = f(1)$, единица является значением данной функции.

б) Положим $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-5)$. Так как $f(-1) = 36$, $f(6) = 120$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{16} > 1$, а числа $0, 1, 2$ и 5 являются корнями этой функции, уравнение $f(x) = 1$ имеет хотя бы по одному корню в каждом из промежутков $(-1; 0)$, $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ и $(5; 6)$. Таким образом, данное уравнение имеет по меньшей мере четыре корня. А больше корней у него быть не может, так как $f(x)$ — это многочлен степени 4.

в) Данное уравнение имеет один корень. То, что он есть, следует из того, значение функции $f(x) = 2x - \sin x$ при $x = 2$ больше 3, а $f(0) = 0$. Для доказательства единственности корня надо показать, что функция $f(x)$ возрастающая. Конечно, это моментально следует из исследования функции при помощи производной. В данный момент можно воспользоваться неравенством $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, из которого будет следовать, что при $x < y$ справедливо неравенство

$$f(y) - f(x) = 2(y - x) - (\sin y - \sin x) \geqslant 2(y - x) - |\sin y - \sin x| \geqslant \\ \geqslant 2(y - x) - |y - x| = y - x > 0.$$

5.6. Утверждение неверно. Рассмотрим функцию, определенную равенством

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in [0; 1], \\ x - 1 & \text{при} \quad x \in (2; 3]. \end{cases}$$

Обратной к ней является функция $g(x)$, определенная равенством

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in [0; 1], \\ x + 1 & \text{при} \quad x \in (1; 2], \end{cases}$$

которая непрерывной не является: отсутствует непрерывность в точке $x = 1$.

5.7. Конечно, оба утверждения неверны! а) Функция $\operatorname{sign} x$ не является непрерывной, однако принимает как свое наименьшее значение, равное -1, так и наибольшее значение 1. б) Синус на промежутке $(0; 2\pi)$ принимает как свое наименьшее значение, равное -1, так и наибольшее значение 1.

5.8. а) Множеством значений функции $f(x)$ на данном множестве является промежуток $[0;1)$, поэтому эта функция не имеет наибольшего значения на указанном множестве. б) Функция $g(x)$ достигает своего наибольшего значения на отрезке $[1;2]$ в силу теоремы Вейерштрасса. в) Данная функция не является непрерывной, однако отсюда не следует, что она не достигает своего наибольшего значения. Общие соображения здесь не работают, поэтому надо просто честно посчитать. Множеством значений функции $h(x)$ является промежуток $[-1;2)$, в котором нет наибольшего числа.

5.9. а) К примеру, это функция, заданная посредством равенств

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0;1], \\ 2, & \text{если } x \in (1;2], \\ 3, & \text{если } x \in (2;3]. \end{cases}$$

б) К примеру, это функция, заданная посредством равенств

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0;1] \cup [2;3], \\ 2, & \text{если } x \in (1;2). \end{cases}$$

в) К примеру, это функция, заданная посредством равенств

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}, & \text{если } x \in \left[0;\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};3\right], \\ 0, & \text{если } x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

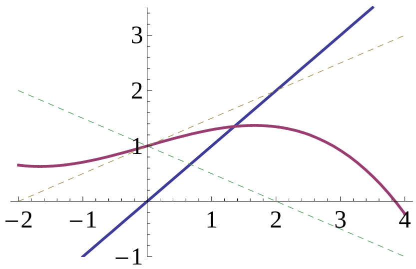
5.10. а) Так как $\frac{x^2+x-2}{x-1} = x+2$ при $x \neq 1$, функция $y = x+2$ и является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией, совпадающей с $f(x)$ при всех $x \neq 1$. б) Функция $f(x)$ определена при всех $x \neq 0$. Рассмотрим последовательность ее значений в точках $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $f(x_n) = 2^n \to \infty$. Если бы существовала непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ при $x \neq 0$, то последовательность $f(x_n) = g(x_n)$ стремилась бы к $g(0)$, а не к бесконечности. в) И в данном случае функция $f(x)$ определена при всех $x \neq 0$. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{\pi/2+\pi n} \to 0$. Последовательность $f(x_n)$ имеет вид $-1, 1, -1, 1, \ldots$ и не является сходящейся. Как и в предыдущем пункте, если бы существовала непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ при $x \neq 0$, то последовательность $f(x_n) = g(x_n)$ имела бы предел, чего не наблюдается.

5.11. Докажем, что более одного решения уравнение не имеет. Действительно, если $f(x) = x$ и $f(y) = y$, где $x \neq y$, то $|x-y| = |f(x) -$

$f(y)| \leqslant q|x-y|$, где $0<q<1$, чего быть не может. Теперь докажем существование решения. Если $f(0)=0$, то $x=0$ и является решением уравнения $f(x)=x$. Предположим для определенности, что $f(0)>0$. Рассмотрим число $c=\frac{f(0)}{1-q}>0$ и докажем, что $f(c)<c$. Действительно, $f(x)-f(0)\leqslant qx$ при $x>0$, следовательно,

$$f(c)\leqslant f(0)+qc=f(0)+\frac{qf(0)}{1-q}=\frac{f(0)}{1-q}=c.$$

Таким образом, разность $f(x)-x$ положительна при $x=0$ и является неположительной при $x=c$. Значит, уравнение $f(x)=x$ на промежутке $(0;c]$ имеет корень. Графическая иллюстрация приведенного решения приведена на следующем рисунке.



5.12. Утверждение неверно. Функция, определенная равенствами

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 \quad \text{при} \quad x=0,\end{cases}$$

непрерывна всюду, кроме нуля. Если отрезок $[a;b]$ не содержит нуль, то множество значений функции на нем является отрезком. Если же $0\in[a;b]$, то множество значений функции на этом отрезке совпадает с отрезком $[-1;1]$.

§6. Пределы функций.

6.1. Так как $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ при $x\neq\pm1$, получаем, что

$$f(x)\to\begin{cases}\frac{3}{2} \quad \text{при} \quad x\to-1,\\ \infty \quad \text{при} \quad x\to 1,\\ 2 \quad \text{при} \quad x\to\infty.\end{cases}$$

6.2. а) Как известно, $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$. б) Если $x \to \pi$, то $\frac{\sin x}{x} \to 0$ в силу свойств пределов функций и того, что $\sin x \to 0$ при $x \to \pi$. в) Если $x \to \infty$, то $\frac{\sin x}{x} \to 0$, так как функция $\sin x$ ограничена, а функция $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.
6.3. а) Имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ в силу непрерывности данной функции.
б) Имеем

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} = \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} \to \frac{3}{4} \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

в) Аналогичным образом,

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

6.4. а) Воспользовавшись очередным замечательным пределом, получаем, что

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\ln(2x+1)}{2x} \to 2 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

б) В силу непрерывности $f(x) \to \ln 3$ при $x \to 1$. в) Поскольку, как было отмечено, логарифмическая функция растет медленнее степенной, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.
6.5. а) При $x \to 1$ получаем, что $\frac{\sin \pi x}{x} \to \sin \pi = 0$. б) Так как $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, получаем, что $\sin \pi x = \sin(\pi - \pi x) = -\sin \pi(x-1)$, поэтому $\frac{\sin \pi x}{x-1} = -\pi \cdot \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} \to -\pi$ при $x \to 1$. в) При $x \to 1$ получаем, что

$$\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \cdot \frac{\sin \pi x}{x-1} \to 0 \cdot (-\pi) = 0.$$

6.6. Воспользуемся тождеством $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$. В силу непрерывности логарифма $\ln f(x) \to \ln A$ при $x \to \alpha$, откуда следует, что $g(x)\ln f(x) \to B\ln A$ при $x \to \alpha$. В силу непрерывности экспоненты $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \to e^{B\ln A} = A^B$.
6.7. Положим $g(x) = \ln f(x) = \frac{\ln x}{x}$ и найдем вначале пределы функции $g(x)$. Имеем

$$g(x) \to \begin{cases} -\infty \quad \text{при} \quad x \to 0, \\ \frac{\ln 2}{2} \quad \text{при} \quad x \to 1, \\ 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \end{cases} \qquad \text{следовательно, } f(x) = e^{g(x)} \to \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \to 0, \\ \sqrt{2} \quad \text{при} \quad x \to 1, \\ 1 \quad \text{при} \quad x \to +\infty \end{cases}$$

в силу непрерывности экспоненты.

6.8. Из утверждения задачи 6.6 сразу следует решение п. б) данной задачи. б) Если $x \to 1$, то $(1+\cos 2\pi x)^x \to 2$. Для решения заданий п. а) и в) проще всего вначале прологарифмировать данные функции. а) Так как $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1+t)}{t}$, где $t = x-1 \to 0$, предел данной дроби при $x \to 1$ равен 1. Поэтому $x^{\frac{1}{x-1}} \to e$ при $x \to 1$. в) При $x \to 1$ имеем

$$\frac{\ln\bigl(1+\sqrt[3]{x-1}\bigr)}{\sqrt[3]{x-1}} \to 1,$$

поэтому

$$\frac{\ln\bigl(1+\sqrt[3]{x-1}\bigr)}{x-1} \to +\infty\,.$$

6.9. Длина стороны вписанного в окружность радиуса r правильного n-угольника равна $2r\sin\frac{\pi}{n}$, а его периметр равен $p_n = 2rn\sin\frac{\pi}{n}$. Так как

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{при } x \to 0,$$

то

$$p_n = 2\pi r\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \to 2\pi r \quad \text{при } n \to \infty.$$

§7. Пределы и производные.

7.1. По определению

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{4x-8}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{2}{3}\ .$$

> В отличие от предыдущей задачи, перед решением следующей постарайтесь внушить студентам, что считать надо совсем мало, а надо записать решение, по-возможности обобщив эту задачу.

7.2. а) Разумно обозначить $\alpha(x) = \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{arctg}\,x$, так что $f(x) = (x-1)\alpha(x)$. Тогда

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\alpha(x) = \alpha(1) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Обратите внимание на то, что дифференцируемость функции $\alpha(x)$ при $x = 1$ нам не потребовалась. Достаточно было знать, что она непрерывна в этой точке.
б) Положим $g(x) = u(x)v(x)$, где $v(x) = \sin^2 x$. Так как $v(0) = v'(0) = 0$, получаем, что $g'(0) = u'(0)v(0) + u(0)v'(0) = 0$. Здест опять можно было рассуждать иначе. Именно, вновь воспользуемся определением производной,

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{2x+1}\,\ln(1+\sqrt{x+1})\sin x\,\frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

в силу того что $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$.
7.3. а) Так как функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \neq 0$, надо выяснить, при каких p эта функция имеет производную в нуле. Так как

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} x^{p-1}\sin\tfrac{1}{x},$$

этот предел существует тогда и только тогда, когда $x^{p-1} \to 0$ при $x \to 0$, т. е. при $p > 1$. б) Заметим, что из вычислений предыдущего пункта следует, что если производная данной функции в нуле существует, то она равна нулю. Если $x \neq 0$, то $f'(x) = px^{p-1}\sin\frac{1}{x} - x^{p-2}\cos\frac{1}{x}$, поэтому производная, опять-таки, заведомо непрерывна во всех отличных от нуля точках. Функция $f(x)$ всюду дифференцируема, поэтому $p > 1$ и, в частности, $f'(0) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(px^{p-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{p-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} x^{p-2}\cos\tfrac{1}{x}\ .$$

Осталось заметить, что последний предел существует тогда и только тогда, когда $p > 2$, и при выполнении этого условия он равен нулю.
7.4. а) Спрашивается, существует ли решение уравнения $f'(x) = 2011$. Конечно, существует и его нетрудно указать: $2x - 1 = 2011$, так что $x = 1006$. Другое дело, что нарисовать эту касательную будет затруднительно... б) По геометрическому смыслу производных $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Значения функции $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ по модулю меньше единицы, и очевидно, что множеством ее значений будет промежуток $(-1; 1)$. Поэтому множеством значений углов наклона касательных к графику данной функции будет промежуток $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.
7.5. а) Положим $f(y) = \frac{y^2}{2p}$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид $x - x_0 = f'(y_0)(y - y_0)$, или $x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0)$, или $px - px_0 =$

$y_0 y - y_0^2$. Поскольку по условию $y_0^2 = 2px_0$, окончательно получаем уравнение $y_0 y = p(x + x_0)$.

> Обязательно покажите студентам это решение. Все-таки дифференцировать квадратичную функцию приятнее, чем квадратный корень, не говоря уже о том, что при указанном подходе не приходится рассматривать три случая: $y_0 > 0$, $y_0 < 0$ и $y_0 = 0$.

Кстати, вас не удивило, что к «лежащей на боку» параболе можно провести касательную в начале кординат? б) Касательная, проходящая через точку $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ графика $y = \frac{1}{x}$, задается уравнением $y = y_0 - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$, или $xy_0 + yx_0 = 2$. Точками ее пересечения с осями координат являются точки $A\left(\frac{2}{y_0}, 0\right)$ и $B\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$. Таким образом, площадь треугольника OAB равна $\frac{2}{x_0 y_0} = 2$, т. е. она не зависит от выбора точки на гиперболе.

7.6. Касательная к графику функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой $x = x_0$ задается уравнением

$$y = ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0),$$

или

$$y = (2ax_0 + b)x + c - ax_0^2.$$

Обозначим через $\ell(x)$ правую часть последнего уравнения. Так как при $a > 0$ разность

$$f(x) - \ell(x) = ax^2 + bx + c - 2ax_0x - bx - c + ax_0^2 = a(x - x_0)^2$$

является неотрицательной, отсюда и следует искомое утверждение.

> Следующее рассуждение стоит провести тогда, когда речь пойдет о формуле Тейлора.

Как всегда, можно рассуждать проще. В силу формулы Тейлора для многочленов для всякого квадратичного многочлена $f(x)$ справедливо тождество

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Заметим, что $y = \ell(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — это в точности уравнение касательной. Поэтому $f(x) = \ell(x) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 = a(x - x_0)^2$. Наконец, утверждение задачи прямо следует из свойств графика выпуклой функции.

> Следующую задачу пусть студенты решат сначала так, как сумеют. А потом желательно показать приводимое ниже более простое решение.

7.7. Положим $x_0 = 0$. Тогда $y_0 = g(x_0) = 0$. В силу формулы для производной сложной функции искомая производная есть произведение $f'(0)g'(0) = 2 \cdot 3 = 6$.
7.8. Так как $f(1) = 4$, получаем, что $g(4) = 1$. В силу формулы для производной обратной функции справедливо равенство

$$g'(4) = \frac{1}{f'(1)} \ .$$

Тем самым, так как $f'(1) = 6$, получаем, что $g'(4) = \frac{1}{6}$.
7.9. Для вычисления двух первых пределов проще всего воспользоваться правилом Лопиталя. а) Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{10x\sqrt[5]{\cos^4 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{10x} = -\frac{1}{10}.$$

б) Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \ .$$

в) Поскольку $1+\frac{2}{x} \to 1$ и $x^2 \to 0$ при $x \to 0$, получаем, что $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2} \to 1$. Обратите внимание на то, что число e здесь ни при чем!
7.10. а) По правилу Лопиталя достаточно найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{p\,x^{p-1}}$. Применив его еще раз, получим, что надо найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{p\,(p-1)x^{p-2}}$. Так как предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^k}$ конечен и отличен от нуля только при $k = 1$, получаем, что $p = 3$, а значение данного предела равно $\frac{1}{6}$.
б) По правилу Лопиталя достаточно найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}}{p\,x^{p-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}{p\,x^{p-1}}.$$

Применив правило Лопиталя еще раз, приходим к пределу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{3x+1}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{p\,(p-1)x^{p-2}} \ .$$

Поскольку числитель полученной дроби стремится к 1 при $x \to 0$, то этот предел конечен и отличен от нуля тогда и только тогда, когда $p = 2$, при этом равен он числу $\frac{1}{2}$.
в) Имеется много способов решения этой задачи. К примеру, удобно будет сделать замену $t = \frac{1}{x}$, получив в результате предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+t^2+t^3}-1}{t^{p+1}} \ .$$

Применив правило Лопиталя, получим предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t+3t^2}{3(p+1)t^p\sqrt[3]{(1+t^2+t^3)^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{2+3t}{3(p+1)t^{p-1}\sqrt[3]{(1+t^2+t^3)^2}} \ .$$

Поскольку числитель полученной дроби стремится к 2, этот предел конечен и отличен от нуля тогда и только тогда, когда $p = 1$. При этом предел равен $\frac{1}{3}$.
7.11. Если значение $f(x_0)$ определенной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ является наибольшим и при этом существует производная $f'(x_0)$ в этой точке, то в силу теоремы Ферма эта производная равна нулю. Наибольшее значение данной функции равно $\frac{\pi}{2}$. Если $f(x) = \frac{\pi}{2}$, то $\sin x = 1$, так что $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Однако функция $y = \arcsin x$ не имеет производной при $x = 1$. Конечно, отсюда не следует, что, к примеру, в точке $x = \frac{\pi}{2}$ не имеет производной и функция $f(x)$. Рассуждать надо аккуратно, к примеру, следующим образом. Если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $f(x) = x$, и если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то $f(x) = \pi - x$. Значит, в точке $x = \frac{\pi}{2}$ односторонние производные функции $f(x)$ равны соответственно 1 и -1. Следовательно, рассматриваемая функция не имеет производной в этой точке. В результате мы получаем, что данная функция не имеет производных в точках ее максимума, поэтому обнаружить их при помощи теоремы Ферма не удается.

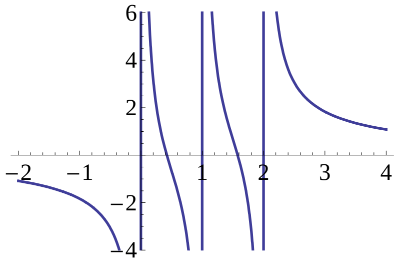
§8. Приложения дифференциального исчисления.

8.1. а) Непосредственное вычисление показывает, что $f'(x) = 0$ при всех $x \in (-1; 1)$ и $g'(x) = 0$ при всех $x \neq 0$. б) Конечно, надо воспользоваться условием постоянства функции в терминах ее производной. Однако надо верно учесть все условия соответствующей теоремы. К примеру, про функцию $f(x)$ можно утверждать, что она постоянна на промежутке $(-1; 1)$. Но что можно сказать о ее значениях при $x = \pm 1$? Напомним также, что из равенства нулю производной некоторой функции следует, что она постоянна на каждом *промежутке* из ее области определения. Поэтому рассуждаем дальше. Функция $f(x)$ постоянна на $(-1;1)$, поэтому $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$ при всех $x \in (-1;1)$. Ясно, что $f(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ и также $f(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$. А как можно было рассуждать в случае, если бы мы не могли так просто подсчитать значения в этих точках? в) Если вы решили, что функция $g(x)$ является постоянной, то обратите внимание на то, что $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$, а $g(1) = \frac{\pi}{2}$. Дело в том, что эта функция, конечно, постоянна на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Ее значения при $x < 0$ равны $-\frac{\pi}{2}$, а ее значения при $x > 0$ равны $\frac{\pi}{2}$.

8.2. а) Производная данной функции равна $3ax^2 + 2x + 1$. Поскольку она положительна при $x = 0$, она должна быть неотрицательна при всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, найденный квадратный трехчлен должен быть неотрицателен, что имеет место, если его дискриминант неположителен. Получаем, что $1 - 3a \leqslant 0$. т. е. $a \geqslant \frac{1}{3}$. б) Производная данной функции равна $a + 2\cos 2x$. Она неотрицательна при всех $x \in \mathbb{R}$, если $a \geqslant 2$, и неположительна при всех $x \in \mathbb{R}$, если $a \leqslant -2$. Таким образом, данная функция монотонна на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $|a| \geqslant 2$.

8.3. Поскольку все три функции являются дважды дифференцируемыми на своей области определения, можно воспользоваться условием выпуклости функции, выраженным в терминах второй производной, а именно, функция является выпуклой, если ее вторая производная неотрицательна. а) Так как $f''(x) = 2a$, данная функция является выпуклой тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$. б) В данном случае $g''(x) = a^x \ln^2 a$, поэтому функция $g(x)$ является выпуклой при всех $a > 0$. в) Имеем $h''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}$, поэтому функция $h(x)$ выпукла при $a \in (0;1)$.

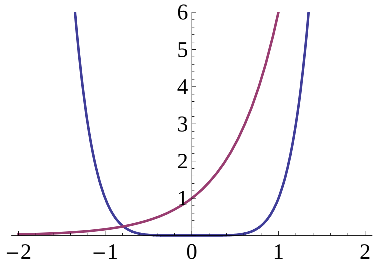
8.4. а) Для решения этой задачи проще всего построить график функции $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$. Ясно, что $f'(x) < 0$ при всех x из области ее определения, поэтому она является убывающей на каждом из промежутков $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$ и $(2;+\infty)$. При этом $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to 1$ и $x \to 2$. Из изображенного на следующем рисунке графика этой функции и следует, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня, а при $a \neq 0$ уравнение имеет три действительных корня.



б) Рассуждение опять-таки должно быть основано на исследовании функции. Вопрос состоит в том, какую функцию удобнее всего исследовать?

> Автор практически уверен, что студенты начнут с того, что будут пытаться рисовать *два* графика $y = x^6$ и $y = 6^x$. Пусть вначале помучаются...

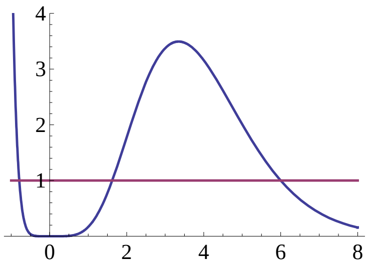
При не очень больших по модулю значениях аргумента графики $y = x^6$ и $y = 6^x$ имеют следующий вид.



Ясно, что данное уравнение имеет один отрицательный корень, но совсем непонятно, сколько же у него положительных корней. Идея состоит в том, чтобы переписать данное уравнение в виде $x^6 \cdot 6^{-x} = 1$ и исследовать функцию $g(x) = x^6 \cdot 6^{-x}$. Имеем

$$g'(x) = 6x^5 \cdot 6^{-x} - x^6 \cdot 6^{-x} \ln 6 = x^5 \cdot 6^{-x}(6 - x \ln 6).$$

Значит, функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{6}{\ln 6}; +\infty\right)$ и является возрастающей на промежутке $\left[0; \frac{6}{\ln 6}\right)$. Таким образом, более трех корней уравнение иметь не может. То, что оно имеет три корня, следует из графика $y = g(x)$:



8.5. а) Рассуждаем стандартным образом. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Так как

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}\ ,$$

эта функция убывает на промежутке $(-1;0]$ и возрастает на промежутке $[0;+\infty)$, значит, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ при всех $x > -1$. При этом $f(x) > 0$ при всех $x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$.

> Предложите студентам решить следующую задачу разными способами, в одном из которых никаких вычислений производить не требуется.

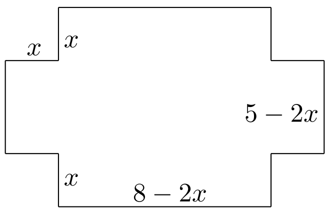
б) Например, можно сделать замену $t = \sqrt[5]{x+1}$, откуда получим $x = t^5 - 1$. В результате замены получаем, что надо доказать справедливость неравенства $t^5 - 5t + 4 \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$. Положим $g(t) = t^5 - 5t + 4$. Так как $g'(t) = 5t^4 - 5$, на промежутке $[0;1]$ данная функция убывает, а на промежутке $[1;+\infty)$ возрастает. Поэтому $g(t) \geqslant g(1) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Однако самое разумное решение состоит в следующем. Функция $y = \sqrt[5]{x+1}$ выпукла вверх на промежутке $[-1;+\infty)$, значит, ее график на этом промежутке лежит под любой касательной к этому графику. Поскольку прямая $y = \frac{x}{5} + 1$ является касательной к графику в точке с абсциссой $x = 0$, она лежит над графиком данной функции, таким образом, $\frac{x}{5} + 1 \geqslant \sqrt[5]{x+1}$, что и требовалось доказать.

> Следуюший пункт задачи интересен тем, что, во-первых, верный ответ может быть получен без всяких вычислений и, во-вторых, попытки нарисовать графики обеих частей неравенства могут студентов обмануть.

в) Приведем вначале формальное решение. Замена $t = \sqrt[4]{1+x}$ приводит к неравенству $t^4 - 5t + 4 \geqslant 0$. Вопрос состоит в том, верно ли оно при всех $t \geqslant 0$. Пусть $g(t) = t^4 - 5t + 4$. Так как $g(1) = 0$, но

$g'(1) = -1$, эта функция будет отрицательной в некотором промежутке правее точки $t = 1$. Значит, это неравенство не имеет места при всех $t \geqslant 0$. Приведем теперь решение без вычислений. Касательная к графику $y = \sqrt[4]{x+1}$ в точке этого графика с абсциссой $x = 0$ задается уравнением $y = x/4 + 1$. Прямая $y = x/5 + 1$ проходит через ту же лежащую на графике точку $(0, 1)$, однако имеет меньший угол наклона к оси абсцисс. Следовательно, часть графика данной функции (справа от нуля) будет лежать выше ее. Значит, данное неравенство верно не при всех $x \geqslant 0$.

8.6. Задача стандартна, тем не менее приведем полное ее решение. Обозначим через x длину сторон вырезаемых квадратов (в дециметрах). Из оставшейся части листа картона (рисунок) можно сложить коробку высотой x, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами $8 - 2x$ и $5 - 2x$ дм.



Объем этой коробки (в литрах) вычисляется по формуле

$$v(x) = x(8 - 2x)(5 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

По смыслу задачи областью определения этой функции является промежуток $\left(0; \frac{5}{2}\right)$, однако, поскольку $v(0) = v\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, мы вправе считать, что $x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$. Так как

$$v'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4(x - 1)(3x - 10),$$

на отрезке $[0; 1]$ эта функция возрастает, а на отрезке $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ — убывает. Следовательно ее наибольшее значение достигается при $x = 1$. Таким образом, размеры вырезаемых квадратов должны составлять 10×10 см.

8.7. Есть два подхода к решению обоих пунктов задачи. Оба из них основаны на исследовании «промежутков монотонности» последовательностей x_n и y_n, однако во втором мы будем исследовать поведение соответствующих *функций*. а) Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$ двух последовательных членов последовательности x_n. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n-3}{(n+1)^2+1} - \frac{2n-5}{n^2+1} = \frac{7+8n-2n^2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \ .$$

Квадратичное выражение, стоящее в числителе дроби, положительно при $n \leqslant 4$ и отрицательно при $n \geqslant 5$. Следовательно, $x_1 < x_2 < \ldots < x_5 > x_6 > \ldots$ Таким образом, наибольшим членом данной последовательности является $x_5 = \frac{5}{26}$. б) Рассуждаем аналогичным образом:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} - \frac{n^4}{2^n} = \frac{4n^3+6n^2+4n+1-n^4}{2^{n+1}} \ .$$

Полученная разность положительна при $n \leqslant 5$, однако уже при $n = 6$ она становится отрицательной. Таким образом, наибольшим членом последовательности является $x_6 = \frac{81}{4}$.

> Конечно, совсем не очевидно, что стоящий в числителе многочлен степени 4 будет отрицательным при всех $n \geqslant 6$.

Перепишем числитель в виде

$$n^4\left(\frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} - 1\right).$$

Очевидно, что если он отрицателен при $n = 6$, то он будет отрицательным и при всех $n \geqslant 6$.

а) Теперь рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$. Так как

$$f'(x) = \frac{2(1+5x-x^2)}{(x^2+1)^2} \ ,$$

она достигает своего наибольшего значения в точке $x_0 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$. Так как $5 < x_0 < 6$, наибольшим членом последовательности является x_5 или x_6. Все, что осталось сделать, — это сравнить их значения. Поскольку $x_5 = \frac{5}{26} > x_6 = \frac{7}{37}$, член x_5 является наибольшим.
б) Положим $g(x) = x^4 \cdot 2^{-x}$. Имеем

$$g'(x) = x^3 \cdot 2^{-x}(4 - x\ln 2).$$

Значит, наибольшее значение этой функции на промежутке $[0; +\infty)$ достигается в точке $x_0 = \frac{4}{\ln 2}$. Осталось оценить x_0. Разумнее всего воспользоваться калькулятором или компьютером, чтобы получить, что $x_0 \approx 5{,}77$. Значит, наибольшим членом данной последовательности является y_5 или y_6. Поскольку $y_5 = \frac{625}{32} < y_6 = \frac{81}{4}$, член y_6 наибольший.

Можно, конечно, оценить x_0 иначе. Так как $2 < e < 2{,}8 < 2\sqrt{2}$, получаем, что $1 < \log_2 e < \frac{3}{2}$. Поэтому $x_0 = 4\log_2 e \in (4; 6)$. В этом случае придется сравнить между члены y_4, y_5 и y_6 данной последовательности.

> Автор советует обязательно разобрать со студентами оба подхода к решению этой задачи и, кроме того, предложить им построить графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

8.8. а) Так как $f(x) = a(x+2)(x-11)$, получаем, что $f'(x) = a(x-11) + a(x+2)$, поэтому $f'(-2) = -13a$, а $f'(11) = 13a = -f'(-2)$. Значит, $f'(11) = 3$. Конечно, то, что $f'(11) = -f'(-2)$, следует из геометрических соображений, поскольку график квадратичной функции симметричен относительно прямой, параллельной оси ординат и проходящей через середину отрезка между корнями этой функции. б) Аналогичным образом, если t — это третий корень многочлена, то $g(x) = k(x-1)(x-3)(x-t)$, откуда находим

$$g'(x) = k(x-3)(x-t) + k(x-1)(x-t) + k(x-1)(x-3),$$

значит, $a = g'(1) = -2k(1-t)$ и $b = g'(3) = 2k(3-t)$. Следовательно, $b(t-1) = a(3-t)$, откуда находим $t = \frac{3a+b}{a+b}$.

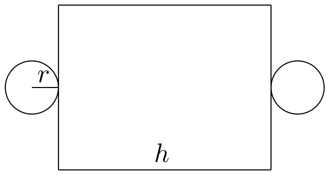
8.9. Положим $p(x) = x^3 + px + q$. Так как $p'(x) = 3x^2 + p$, многочлен будет иметь три корня, только если $p < 0$. В противном случае функция $p(x)$ будет возрастающей на $\mathbb{R}$ и уравнение $p(x) = 0$ будет иметь только один корень. Положим $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. На каждом из промежутков $(-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$ и $[x_2; +\infty)$ многочлен $p(x)$ является строго монотонной функцией, значит, он имеет в каждом из них не более одного корня. Так как $p(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $p(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, уравнение $p(x) = 0$ будет иметь три действительных корня тогда и только тогда, когда $p(x_1)p(x_2) < 0$. Поскольку

$$p(x_1) = \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$
$$p(x_2) = -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

корней будет три тогда и только тогда, когда

$$\left(-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)\left(\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0.$$

8.10. По условию $v = \pi r^2 h$. Полная поверхность цилиндра складывается из площадей двух кругов радиуса r, являющихся его основаниями, и площади прямоугольника со сторонами h и $2\pi r$ (см. рис.).



Значит, $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Обозначим через x радиус основания цилиндра. Поскольку его объем равен v, высота этого цилиндра находится по формуле $h = \frac{v}{\pi x^2}$. Следовательно, площадь его полной поверхности выражается формулой

$$s(x) = 2\pi x^2 + \frac{2v}{x} = 2\left(\pi x^2 + \frac{v}{x}\right).$$

Областью определения функции $s(x)$ является луч $(0; +\infty)$. Ясно, что $s(x) \to +\infty$ при $x \to 0$ и $x \to +\infty$. Поэтому наименьшее значение полной поверхности достигается в одной из тех точек, в которой производная функции $s(x)$ равна нулю. Произведем дифференцирование:

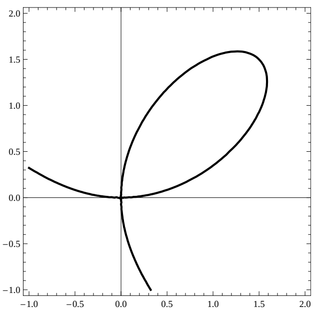
$$s'(x) = 2\left(2\pi x - \frac{v}{x^2}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x = \sqrt[3]{\tfrac{v}{2\pi}}\ .$$

Высота этого цилиндра, тем самым, равна

$$h = \frac{v}{\pi x^2} = \frac{v}{\pi \sqrt[3]{\frac{v^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{v^3}{\pi^3 \frac{v^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4v}{\pi}} = 2x.$$

> Безусловно, следующая задача для студентов чересчур сложна, однако обсудить ее решение полезно. Собственно говоря, она есть пропедевтика для будущего семестра, в котором появятся функции, заданные неявно, условные экстремумы и другие достаточно сложные понятия.

8.11. Вид данной кривой изображен на следующем рисунке.



Построить ее не слишком просто (для только начавших изучать математику), однако это и не является нашей целью. Предположим, что рассматриваемая часть кривой является графиком дифференцируемой функции $f(x)$. Значит, справедливо тождество

$$x^3 + \big(f(x)\big)^3 = 3xf(x),$$

продифференцировав которое мы получим тождество

$$3x^2 + 3f^2(x)f'(x) = 3f(x) + 3xf'(x).$$

Нас интересует наибольшее значение функции $f(x)$ — ординаты точек данной кривой, а оно достигается в тех точках, в которых $f'(x) = 0$, откуда находим $y = f(x) = x^2$. Решая систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^3 + y^3 = 3xy, \end{cases}$$

получаем, что $(x, y) = (0, 0); (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Значит, $\sqrt[3]{4}$ — наибольшее значение ординат точек рассматриваемой части кривой.

Конечно, приведенное решение точным не является.

Какие вопросы надо задать студентам в этом месте?

Придумать следующее решение самостоятельно, конечно, невозможно, но познакомиться с ним полезно. Проведем прямую, лежащую а первом и третьем координатных углах и проходящую через начало координат. Ее уравнение имеет вид $y = tx$, причем $t > 0$. Точки пересечения данной кривой и этой прямой найдем из системы

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3xy, \\ y = tx, \end{cases} \qquad \text{следовательно,} \quad x^3 + t^3x^3 = 3tx,$$

значит, $x = 0$ или $x = \frac{3t}{t^3+1}$. Таким образом, $(x, y) = (0, 0)$; $\left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1}\right)$. Следовательно, ординаты точек рассматриваемой части кривой являются значениями функции $u(t) = \frac{3t^3}{t^3+1}$ при $t > 0$. Все, что осталось сделать, — это найти наибольшее значение функции $u(t)$. Так как $u'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$, наибольшим значением является $u(\sqrt[3]{2}\,) = \sqrt[3]{4}$. Теперь решение закончено.

8.12. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Поскольку на нем синус является выпуклой вверх функцией, его график лежит выше хорды с концами в точках $O(0, 0)$ и $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Эта хорда задается уравнением $y = \frac{3}{\pi}x$, поэтому $\sin x > \frac{3}{\pi}x$ при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Подставив в полученное неравенство $x = \frac{\pi}{30}$, мы и получим искомое неравенство.

8.13. Трехчлены $x^3 - x^2 - 2x$, $x^4 - 5x^2 + 4$ и $x^5 - 5x^3 + 4x$ имеют соответственно три, четыре и пять действительных корней. Поскольку для каждого $n \geqslant 6$ многочлен $x^n - 5x^{n-1} + 4x^{n-2}$ имеет пять корней, остается доказать, что для любого $n \geqslant 6$ трехчлен степени n имеет не более пяти корней.

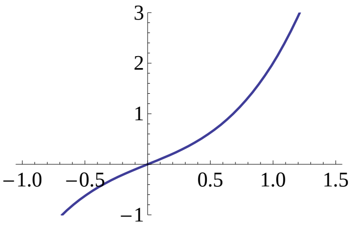
Рассмотрим вначале многочлен $p(x) = ax^n + bx^k + c$, где $c \neq 0$. Так как $p'(x) = nax^{n-1} + bkx^{k-1} = x^{k-1}(nax^{n-k} + kb)$, производная $p'(x)$ этого многочлена обращается в нуль не более чем в трех точках. Следовательно, функция $p(x)$ имеет не более четырех промежутков монотонности, значит, имеет не более четырех корней. Теперь рассмотрим трехчлен $p(x) = ax^n + bx^k + cx^m = x^m(ax^{n-m} + bx^{k-m} + c)$. Как уже доказано, трехчлен, находящийся в скобках, имеет не более четырех корней. Так как число $x = 0$ также является корнем многочлена $p(x)$, всего он имеет не более пяти корней.

§9. Исследование функций и построение их графиков.

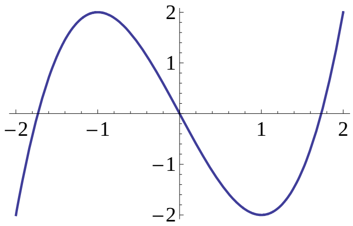
Безусловно, при построении всех графиков надо прежде всего вычислить производную заданной функции и определить промежутки, на которых производная сохраняет знак, определив тем самым промежутки монотонности данной функции. Все функции задаются простыми формулами, поэтому в большинстве случаев автор не приводит вычисления их производных.

> Студенты в своем подавляющем большинстве с удовольствием «берут производные», решают появляющиеся неравенства. Основная сложность для них состоит в том, чтобы на основе полученной ими информации построить искомый график.

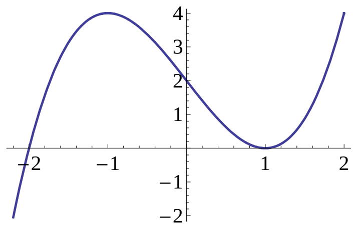
9.1. Множеством значений каждой из данных функций, конечно, является вся числовая прямая. Первая из них возрастает на $\mathbb{R}$, так как она является суммой двух возрастающих функций. Конечно, функции из п. б) и в) имеют одни и те же промежутки монотонности, которые легко найти, определив знаки производной $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Графики данных функций изображены на следующих рисунках.



а)

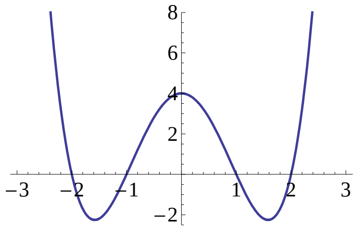


б)

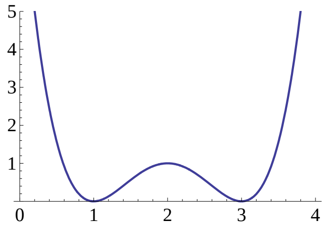


в)

9.2. а) Данная функция является четной. Кроме того, очевидно, что ее корнями являются числа ± 1 и ± 2. Поэтому качественный вид ее графика понятен. Точками минимума данной функции являются точки $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Множество ее значений — промежуток $\left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$.
б) Данная функция имеет два корня кратности два, поэтому ее график касается оси абсцисс в точках $x = 1$ и $x = 3$, а множество значений — это промежуток $[0; +\infty)$.

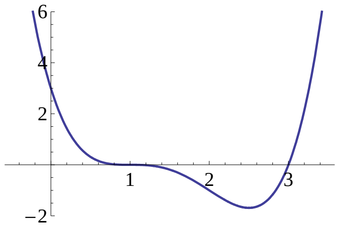


а)



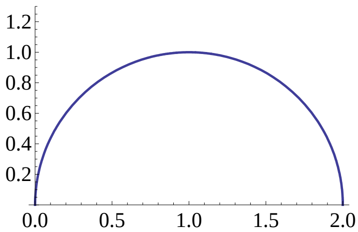
б)

в) Множество значений — промежуток $\left[-\frac{27}{16}; +\infty\right)$; график изображен на рисунке. Обратите внимание на вид графика вблизи точки $(1, 0)$.



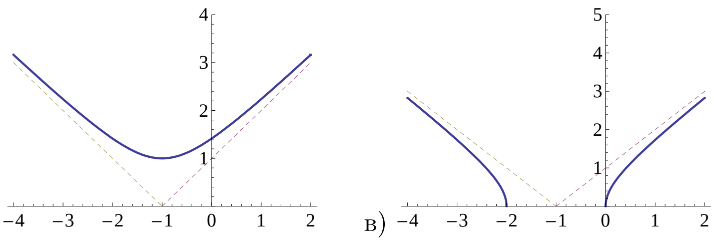
в)

9.3. а) Преобразуем уравнение: $y^2 = 2x - x^2$, или $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Выделив полный квадрат по переменной x, получим уравнение окружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Поэтому графиком данной функции является верхняя половина окружности радиуса 1 с центром в точке $A(1, 0)$. Множество значений этой функции — отрезок $[0; 1]$.



а)

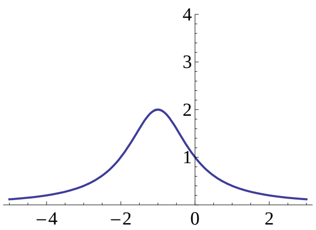
б) Проделав аналогичные преобразования, мы придем к уравнению $(x+1)^2 - y^2 = 1$, задающему гиперболу с асимптотами $y = x + 1$ и $y = -x - 1$. Графиком данной функции является ее часть, лежащая в верхней полуплоскости. Множество значений функции — промежуток $[0; +\infty)$. в) Получаем уравнение гиперболы $y^2 - (x+1)^2 = 1$ (с теми же асимптотами, что и гипербола в предыдущем пункте). Отличие от предыдущего пункта в том, что графиком данной функции является целая ветка этой гиперболы. Множество значений функции — промежуток $[1; +\infty)$.

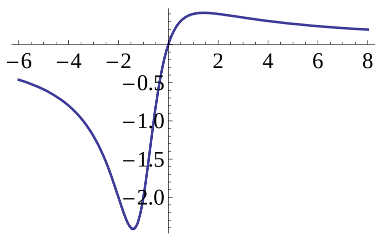


б) в)

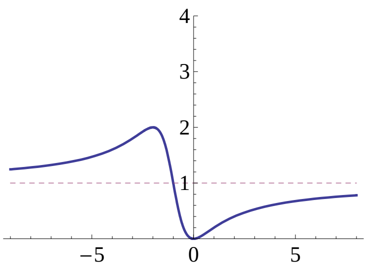
9.4. а) Ясно, что данная функция положительна и ось абсцисс является асимптотой ее графика. Также очевидно, что наибольшим значением этой функции является значение в точке $x = -1$. Множество значений — промежуток $(0; 2]$.

б) Как и в предыдущем пункте, ось абсцисс — асимптота графика функции. Однако график лежит выше этой оси при $x > 0$, а при $x < 0$ он расположен ниже оси абсцисс. Для поиска точки минимума и точки максимума придется искать производную. Абсциссы точек экстремума равны $\pm\sqrt{2}$. Множество значений функции — промежуток $\left[-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1\right]$.

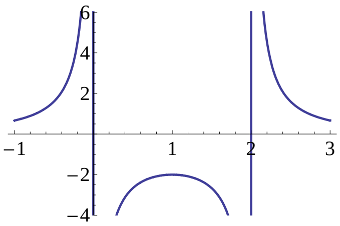
а) 

б) 

в) Асимитотой графика функции является прямая $y = 1$. Множество ее значений — промежуток $[0; 2]$. График изображен на рисунке.

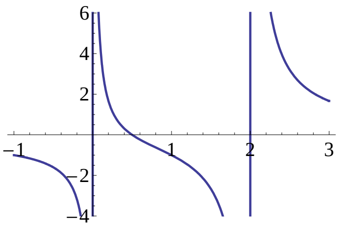
в) 

9.5. а) В отличие от задания 9.4 а), кроме горизонтальной асимптоты — оси абсцисс — график имеет также и две вертикальные асимптоты $x = 0$ и $x = 2$. Множеством значений функции является объединение $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. График изображен на рисунке.

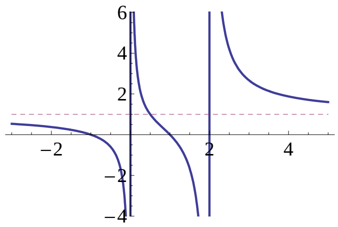


а)

б,в) Множество значений — вся числовая прямая. Графики изображены на рисунках. Кстати, очевидна ли вам связь между изображенными на этих рисунках графиками?

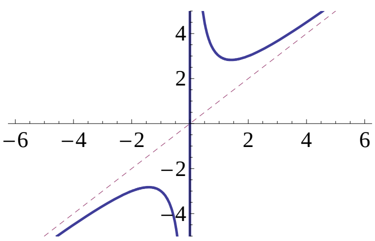


б)

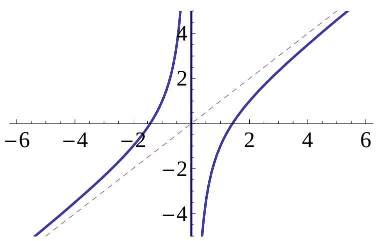


в)

9.6. а) Множество значений — объединение $(-\infty; -2\sqrt{2}\,] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$. б) Множество значений — вся числовая прямая. Графики изображены на рисунках. У обоих графиков прямая $y = x$ является асимптотой.

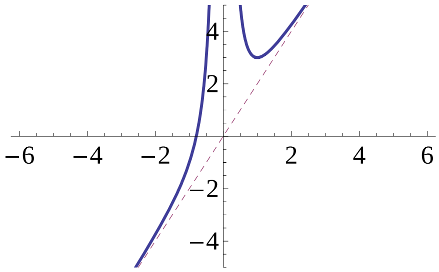


а)



б)

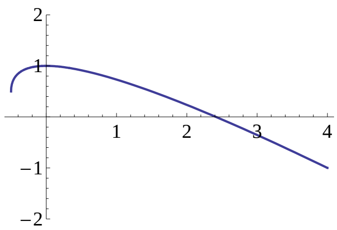
в) Множество значений — вся числовая прямая. График изображен на рисунке; его асимптотой является прямая $y = 2x$.



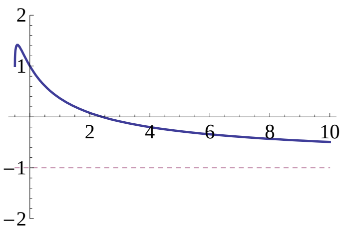
в)

9.7. а) Качественный вид графика очевиден: функция возрастает при x, достаточно близких к $-\frac{1}{2}$, и убывает на некотором луче $[a; +\infty)$. Для нахождения точки максимума $x = 0$, конечно, проще всего найти производную данной функции. Обратите внимание на то, что прямая $y = -x$ не является асимптотой ее графика. Множество значений функции — промежуток $(-\infty; 1]$.
б) Прямая $y = -1$ — асимптота графика функции. Множество ее значений — промежуток $(-1; \sqrt{2}\,]$.

Графики изображенs на рисунках.

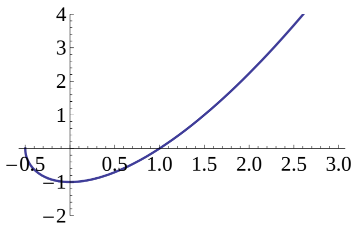


а)



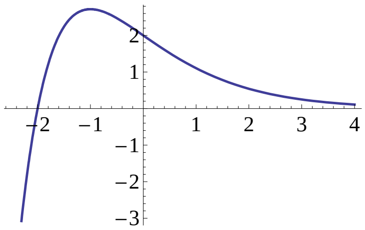
б)

в) Поскольку функция равна нулю при $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$, где-то между этими точками располагается точка минимума этой функции. То, что функция на луче $[1; +\infty)$ является возрастающей, очевидно, так как она есть произведение положительных возрастающих функций. Множество ее значений — промежуток $[-1; +\infty)$, график изображен на рисунке.



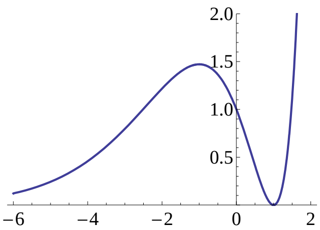
в)

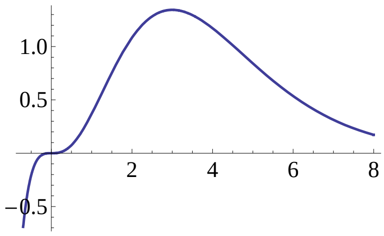
9.8. а) Поскольку $e^{-x} \to +\infty$ при $x \to -\infty$, получаем, что $y \to -\infty$ при $x \to -\infty$. При $x \to +\infty$ ось абсцисс является асимптотой графика этой функции. Поэтому качественный вид ее графика понятен. А точкой максимума является точка $x = -1$. Множество значений — промежуток $(-\infty; e]$; график изображен на рисунке.



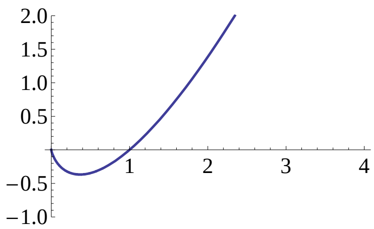
а)

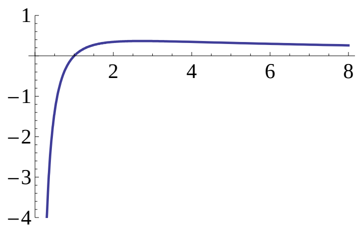
б) Множество значений — промежуток $[0; +\infty)$. в) Множество значений — промежуток $\left(-\infty; \frac{27}{e^3}\right]$ ($\frac{27}{e^3} \approx 1{,}3$). Графики изображены на рисунках.

б) 

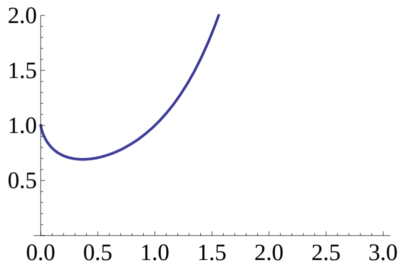
в) 

9.9. а) Прежде всего надо понять поведение функции при $x \to 0$. То, что $x \ln x \to 0$ при $x \to 0$, легко получить, применив правило Лопиталя. Множество значений — промежуток $\left[-\frac{1}{e}; +\infty\right)$. б) Множество значений — промежуток $\left(-\infty; \frac{1}{e}\right]$. Графики изображены на рисунках.

а) 

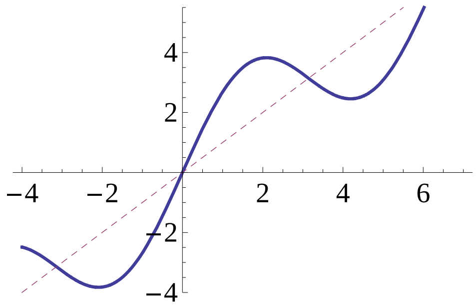
б) 

в) То, что $x^x \to 1$ при $x \to 0$, следует из вычислений, проведенных в п. а), так как $x^x = e^{x \ln x}$. Множество значений — промежуток $\left[\frac{1}{e^{1/e}}; +\infty\right)$ ($\frac{1}{e^{1/e}} \approx 0{,}69$). График изображен на рисунке.



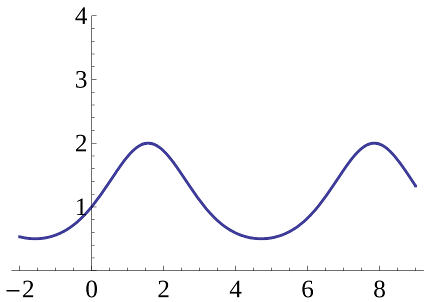
в)

9.10. а) Множество значений — вся числовая прямая; график изображен на рисунке.



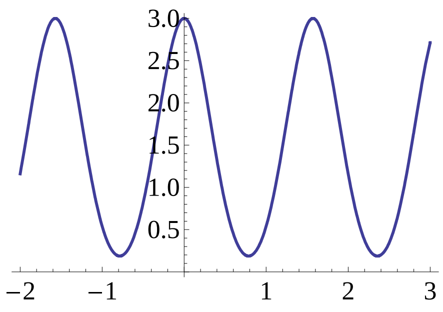
а)

б) Множество значений — отрезок $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; график изображен на рисунке.



б)

в) Множество значений — отрезок $\left[\frac{3}{16}; 3\right]$; график изображен на рисунке.



в)

9.11. Нет, не может. Функция, график которой изображен на рисунке, имеет различные пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, тогда как для любой рациональной функции, если она и имеет пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, эти пределы будут равны друг другу.

9.12. а) Например, график такого типа будет иметь многочлен $p(x) = x^3(x-2)^2$. Дело в том, что искомая функция имеет два корня, одним из которых является значение $x = 0$, другим, например $x = 2$. При этом при $x = 0$ график не только касается оси абсцисс, но начало координат есть точка перегиба графика искомой функции. Простейшей функцией с таким свойством является функция $y = x^3$. При $x = 2$ график касается оси абсцисс, но лежит выше ее в некоторой окрестности этой точки, поэтому можно взять $y = (x-2)^2$. Осталось заметить, что произведение $x^3(x-2)^2$ имеет своими корнями как раз числа 0 и 2, в окрестностях которых его график имеет нужный вид.

б) Например, график такого типа будет иметь многочлен $q(x) = x^2(x-2)^2 + x$.

Контрпримеры в курсе математического анализа

С. Климчук

Перевод с английского О. А. Иванова

Введение

Цель автора состояла в том, чтобы написать книгу, которая могла бы служить дополнительным учебным пособием при изучении курса математического анализа в течение первого года обучения в университете (по мнению автора, ее можно использовать также в старших классах средней школы). Содержание этой книги составляют тщательно сконструированные *неверные* математические утверждения, так что перед студентами стоит задача опровергнуть их путем построения соответствующих *контрпримеров*. Сформулировав теорему, являющуюся обратной к известной теореме курса анализа, мы почти всегда получим неверное утверждение. Другой путь построения неверных утверждений состоит в том, чтобы опустить или изменить часть условий в формулировке верного утверждения. Многие из приведенных в этой книге утверждений на неискушенный взгляд могут показаться верными, часть из них связана со стандартными ошибками, допускаемыми студентами. Тематика книги соответствует стандартному курсу математического анализа функций одной переменной; названия ее параграфов: Функции, Пределы, Непрерывность, Дифференциальное исчисление, Интегральное исчисление.

Большинству преподавателей хорошо известна книга Б. Гелбаума и Дж. Олмстеда «Контрпримеры в анализе»[3]. Она является прекрасным источником задач для будущих математиков, но, безусловно, содержащийся в ней материал лежит вне рамок программы для студентов-первокурсников, изучающих математический анализ, к примеру, по популярной книге Д. Стюарта[4]. По сравнению с книгой «Контрпри-

[3] М.: Мир, 1967; в 2010 году в серии «Физико-математическое наследие» вышло новое издание этой книги.— *Прим. перев.*

[4] J. Stewart, Calculus, 5^{th} Edition, Brooks/Cole, Thomson Learning, Inc., 2003. — 1367 p.

меры в анализе», материал данной книги существенно проще, в этих книгах нет совпадающих заданий, таким образом, они не перекрываются, а дополняют друг друга. Замечу, что, в отличие от книги Гелбаума и Олмстеда, для того чтобы примеры стали более наглядными и легче воспринимались студентами, в данной книге приведены графики всех функций, являющихся контрпримерами к соответствующим утверждениям.

Существует педагогическая стратегия, состоящая в использовании контрпримеров для активизации процесса обучения математическому анализу на его начальном этапе для лучшего понимания студентами как смысла вводимых понятий, так и логики изложения материала. Для реализации этой стратегии и нужна книга, подобная этой. Она будет полезна

- учителям старших классов и преподавателям вузов как методическое пособие, используемое в преподавании математического анализа;
- школьникам старших классов, а также первокурсникам вузов как учебное пособие при изучении математического анализа;
- учителям старших классов и преподавателям вузов как пособие, способствующее повышению их квалификации и как математиков, и как педагогов.

Почему — контрпримеры?

В нашу информационную эру важной способностью человека является умение анализировать информацию и быстро делать вывод о том, является она верной или же ложной. Контрпример есть пример, который показывает, что данное утверждение (предположение, гипотеза, предложение, правило) является ложным. Для того чтобы опровергнуть утверждение, достаточно одного контрпримера. Контрпримеры играют важную роль не только в математике, но и в других науках. Они являются сильным и эффективным орудием в руках научных работников, исследователей и практиков, явно демонстрирующим, что выдвинутая гипотеза или же направление исследований является ложным. Прежде чем начать доказывать некое предположение, часто бывает полезно вначале поискать контрпример к нему, что может сэкономить массу времени и сил.

Контрпримеры издавна играли важную роль в развитии математики, история которой во многом и состоит в выдвижени гипотез и, в дальнейшем, их доказательстве либо же опровержении путем построения соответствующего контрпримера. Вот несколько хорошо известных примеров.

1. В течение долгого периода времени математики старались найти формулу, задающую простые числа. К примеру, высказывалось предположение, что числа вида $2^{2^n}+1$, где n — натуральное число[5], являются простыми. Однако оказалось, что существует контпример[6]. Уже для $n=5$ это число является составным, поскольку $2^{2^5}+1=641\cdot 6700417$.

2. Следующая гипотеза о простых числах — гипотеза Гольдбаха (или Гольдбаха—Эйлера) — еще ждет того, чтобы быть либо доказанной, либо же опровергнутой. Она была высказана Гольдбахом в 1742 г. в письме к Эйлеру. Ее формулировка обманчиво проста: *всякое четное число, большее двух, является суммой двух простых чисел.* К примеру, $12=5+7$, $20=3+17$ и т. д. В 1999 г. для поиска контрпримера к ней были использованы мощные компьютеры, однако проверка всех четных чисел до $4\cdot 10^{14}$ к успеху не привела[7]. В 2000 году издательство Фабер & Фабер предложило приз в 1 миллион долларов тому, кто докажет или же опровергнет гипотезу Гольдбаха. До настоящего времени за этим призом никто не обратился.

3. В XIX в. великий немецкий математик Вейерштрасс построил свой знаменитый контрпример (по сути дела, это был первый фрактал) к следующему утверждению: *непрерывная на промежутке $(a;b)$ функция должна быть дифференцируемой хотя бы в одной точке этого промежутка.* Многие математики того времени посчитали, что построенная им «патологическая» функция, являющаяся непрерывной, но не дифференцируемой ни в одной точке, будет абсолютно бесполезной с точки зрения приложений математики. Однако где-то через сто лет создатель кибернетики Норберт Винер в своей книге «Я — математик» заметил, что

[5]Так называемые *числа Ферма.— Прим. перев.*

[6]Найденный Л. Эйлером.— *Прим. перев.*

[7]К 2008 г. были проверены все четные числа до $1{,}2\cdot 10^{18}$ — контрпримера так и не найдено.— *Прим. перев.*

подобные кривые существуют и в природе. К примеру, ими являются траектории частиц броуновского движения. В последующие десятилетия подобные кривые стали объектом исследования в теории фракталов — активно развивающейся области математики, имеющей многочисленные практические применения.

Цель этой книги состоит в том, чтобы продемонстрировать преподавателям и студентам, что использование контрпримеров в процессе обучения/изучения математического анализа может:

- углубить понимание предмета;
- исключить (или, по крайней мере, свести к минимуму) неверное истолкование формулировок математических утверждений;
- способствовать развитию математического мышления (которое, как известно, не является ни алгоритмическим, ни процедурным);
- усилить развитие таких сторон критического мышления, как способность к анализу, обоснованию, проверке, доказательству, что принесет несомненную пользу во многих областях человеческой деятельности;
- расширить запас известных студентам содержательных примеров функций с интересными свойствами, что облегчит им обмен идеями в области как математики, так и ее приложений;
- сделать процесс обучения более активным и творческим.

1. Углубление понимания предмета

В настоящее время многие студенты привыкли концентрировать свое внимание на технике решения задач, конкретных преобразованиях, методах (рецептах) решений и не уделяют должного внимания определениям (понятий), формулировкам (утверждений), свойствам (математических объектов, например функций), а также обоснованию проводимых рассуждений.

«Когда студентам требуется применить некоторую теорему или же метод, они зачастую не удосуживаются проверить условия, при выполнении которых верна эта теорема или же применим данный метод. Мы предполагаем, что это происходит из-за того, что они просто не задумываются об этом, что происходит в силу того, что они не оперируют свободно математическими терминами и обозначениями или же потому, что они не понимают роли условий в формулировках утверждений[8]». Будущему инженеру чрезвычайно важно развить в себе привычку оценивать границы, в которых будет функционировать новое устройство. Например, самолет должен летать в шторм и в условиях турбулентности, а не только в идеальную погоду. Уделение внимания условиям теорем будет способствовать развитию такой полезной привычки. Заметим, что и в повседневной жизни важно обращать внимание на написанные мелким шрифтом «специальные условия продаж» в рекламных объявлениях.

2. Исключить неверное истолкование

В последние годы, частично в связи с широким использованием современных (компьютерных) технологий, практически исчезла такая компонента традиционного подхода (определение—теорема—доказательство—пример—применения) в преподавании математическиго анализа, как доказательство. Студенты привыкли доверять этим технологиям и не видят особой нужды в логических обоснованиях. Иногда курсы математического анализа построены так, что студенты встречаются в них только с «хорошими» функциями и примерами. Особенно это характерно для преподавания на уровне средней школы. Такой подход может привести к неверному пониманию, что объясняется следующим введенным Толлом принципом «общего продолжения» : «Если некто в определенном контексте имеет дело с объектами, которые всегда обладают некоторым свойством, то при отсутствии контрпримеров он вполне может сделать вывод, что это свойство присуще объектам и в более широком контексте[9]».

Многие неверные формулировки, приведенные в этой книге, построены на типичных студенческих ошибках, связанных с неверным пониманием (определений, формулировок, свойств). Есть разница между ошибками, допускаемыми студентами при изучении алгебры и при изучении анализа. Ни в одном учебнике по алгебре вы не найдете такого «свойства», как, к примеру, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, и ни один учитель

[8] J. Mason, A. Watson, Getting students to create boundary examples, MSOR Connections, 2001, vol. 1, No. 1, pp. 9—11.

[9] D. Tall, The psychology of advanced mathematical thinking. In: Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht, 1991. P. 3—21.

никогда не будет учить подобному «правилу». С другой стороны, в некоторых учебных пособиях по математическому анализу (чаще всего в тех, по которым учат в школе) можно найти некорректные формулировки. Например, «*Если график некоторой функции представляет собой непрерывную и гладкую (не имеющую углов) кривую, то эта функция является дифференцируемой*». Или, «*Касательная к графику есть кривая, которая имеет с кривой общую точку, причем в этой точке касательная не пересекает этот график*». Некоторые студенты действительно *выучивают* математический анализ подобным образом. Практика в построении контрпримеров поможет студентам исключить подобные ошибки, до того как они станут их второй натурой.

3. Развитие математического мышления

Построение примеров и контрпримеров никоим образом не является алгоритмической деятельностью и требует достаточно развитого математического мышления, которое, увы, не так часто формируется в школе. «Умение построить пример основывается на совсем других когнитивных качествах, чем умение действовать по заданному алгоритму, — для этого нужно смотреть на математические объекты через призму их свойств. Студентов часто ставит в тупик задача построения того или иного примера, поскольку нет никакого алгоритма, работая в соответствии с которым они оказались бы *на правильном пути*[10]». Практикуясь в построении примеров и контрпримеров, студенты развивают свой творческий потенциал и математическое мышление.

4. Формирование критического мышления

Построение контрпримеров к неверным утверждениям имеет преимущество перед построением примеров функций с заданными свойствами, поскольку при построении контрпримеров мы имеем дело с опровержением, обоснованием, аргументацией, критическим мышлением, что составляет неотъемлемую часть математического способа мышления. Развитие критического мышления поможет студентам не только во время их обучения в университете, но также и в их дальнейшей жизни.

[10] A. Selden, J. Selden. The role of examples in learning mathematics. *The Mathematical Association of America Online*: www.maa.org/t_and 1/sampler/rs_5.html.

5. Расширение запаса примеров

После того как студенты придумали или хотя бы познакомились с многочисленными примерами функций, обладающими интересными свойствами, им будет проще даже разговаривать друг с другом, обмениваясь идеями, касающимися математики или ее приложений. Посредством деятельности, связанной с построением контрпримеров, студенты много узнают о поведении различных функций и оказываются в состоянии применить свои знания, решая реальные задачи.

Ограничимся двумя следующими примерами.
1. Контрпримерами к утверждению 2.2 и утверждению 4.32 являются соответственно функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right|, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$$

используемые при моделировании колебательных процессов.
2. Контпримером к утверждению 5.12 является функция Френеля $F(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2}\, dt$, которая, уже не говоря об ее использовании в геометрической оптике, недавно была применена в задаче, связанной с проектированием скоростных автомобильных дорог.

Как подчеркнул Генри Поллак, долгое время работавший в лаборатории Белла, «наше общество уделяет так много внимания преподаванию математики в школах, колледжах и университетах не потому, что математика очень красива, а она действительно красива, или же не оттого, что занятия ею способствуют тренировке чеолвеческого мозга, но потому, что она очень полезна».

6. Сделать процесс обучения более активным и творческим

Опыт моих коллег и мой собственный педагогический опыт показывают, что педагогическая стратегия, построенная на использовании контрпримеров, может оживить процесс обучения, сделав его более творческим. Проведенное некоторое время назад международное исследование, в котором принимали участие более 600 студентов из 10 университетов в различных странах мира, показало, что подавляющее большинство его участников (92%) сочли полезным использование контрпримеров в процессе их обучения[11]. Они (студенты) отметили, что это помогло им лучше понять смысл понятий, введенных в курсе анализа, предостерегало их от возможных ошибок, развивало логическое и критическое мышление и что они могли более активно воспринимать лекционный материал. Многие из них подчеркнули также, что построение многочисленных контрпримеров сделало их более критически мыслящими не только применительно к математике, но и в других областях жизни.

Существуют различные способы использования контпримеров в педагогическом процессе:

- предлагать студентам вперемешку как верные, так и неверные формулировки;
- намеренно допускать ошибки на лекциях;
- просить студентов найти ошибку на определенной странице учебника;
- начислять студентам дополнительные баллы, учитывающиеся при выводе окончательной оценки по лекционному курсу, за представленные ими прекрасные контрпримеры к трудным заданиям.

Наконец, их можно использовать с целью оценки знаний студентов.

Структура книги

Первая часть состоит из формулировок неверных утверждений, связанных с материалом пяти основных тем вводного курса математического анализа, а именно: Функции, Пределы, Непрерывность, Дифференциальное исчисление и Интегральное исчисление. В каждом из соответствующих разделов утверждения располагаются в порядке повышения сложности предложенных заданий. Некоторые утверждения, особенно расположенные в начале каждого из разделов книги, являют собой примеры типичных студенческих ощибок, связанных с неверным пониманием определений, условий утверждений или же свойств математических объектов. В некоторых случаях сформулированные в книге утверждения кажутся верными, так что студентам надо серьезно поработать для построения соответствующего контрпримера.

[11] N. Gruenwald, S. Klymchuk, Using counterexamples in teaching Calculus, *The New Zealand Mathematics Magazine*, 2003, vol. 40, No. 2, pp. 33—41.

Я надеюсь, что приводимые в этой книге примеры будут интересны всем ее читателям.

Во второй части книги приведены решения всех заданий. Конечно, автор надеется, что читатели будут также строить и свои контрпримеры. К некоторым из решений даны дополнительные комментарии, адресованные в основном студентам.

В дополнении обсуждаются педагогические идеи и конкретные результаты использования контрпримеров в процессе обучения математическому анализу.

Сергей Климчук, кандидат физико-математических наук, доцент Технологического университета, Окленд (Новая Зеландия)

Формулировки

Подчеркнем еще раз, что все формулировки приводимых далее утверждений являются неверными, что и должен показать читатель путем построения соответствующего примера (т. е. *контрпримера*).

§1. Функции

1. Касательная к кривой в данной точке есть прямая, которая только касается кривой в этой точке, но не пересекает ее[12].
2. Касательная к кривой не может иметь с этой кривой бесконечно много точек касания.
3. Квадратичной относительно переменной x является функция, в выражение для которой переменная x входит с наибольшей степенью, равной 2.
4. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ является непрерывной и монотонной на $\mathbb{R}$ функцией, то их сумма $f(x) + g(x)$ также монотонна на $\mathbb{R}$.
5. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ не является монотонной на $\mathbb{R}$ функцией, то их сумма $f(x) + g(x)$ также не есть монотонная на $\mathbb{R}$ функция.
6. Если $f(x)$ — непрерывная функция, убывающая на промежутке $(0, +\infty)$ и принимающая положительное значение при $x = 1$, то она имеет в точности один корень.

[12] В данном параграфе касательная к кривой понимается как *предельное положение секущей*, т. е. более на интуитивном уровне. В этой задаче имется в виду, что кривая вблизи точки касания лежит по одну сторону от рассматриваемой прямой.— *Прим. перев.*

7. Если заданная на промежутке $(a;b)$ функция $f(x)$ имеет обратную, то $f(x)$ либо является возрастающей на $(a;b)$, либо же убывающей на этом промежутке.

8. Функция $y = f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, если для каждого значения $x \in \mathbb{R}$ найдется такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$.

9. Если $g(a) = 0$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

10. Если $g(a) = 0$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика рациональной функции $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (здесь $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены).

11. Если функция $f(x)$ является неограниченной и неотрицательной на $\mathbb{R}$, то у нее не существует такой последовательности x_n ее корней, что $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

12. Определенная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$, график которой не содержит горизонтальных участков, не может принимать свое наибольшее значение в бесконечном множестве точек.

13. Если функция $f(x)$ является непрерывной и возрастает в точке[13] $x = a$, то найдется такая окрестность $(a - \delta; a + \delta)$, на которой эта функция также является возрастающей.

14. Если функция не является монотонной, то она не является обратимой.

15. Если функция не является монотонной на промежутке $(a;b)$, то ее квадрат также не является монотонной на $(a;b)$ функцией.

§2. Пределы

1. Если $f(x) < g(x)$ при всех $x > 0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

[13]Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке $x = a$, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(a)$ при всех $x \in (a - \delta; a)$ и $f(x) > f(a)$ при всех $x \in (a; a + \delta)$.— *Прим. перев.*

2. Следующие определения наклонной асимптоты являются эквивалентными:

   а) прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$;

   б) прямая линия называется наклонной асимптотой некоторой кривой при $x \to \infty$, если эта кривая становится все ближе и ближе (так близко, как мы только пожелаем) к этой прямой, возможно, касаясь, но не пересекая ее.

3. Прямая, касающаяся графика функции в бесконечном множестве точек, не может быть наклонной асимптотой этого графика.

4. Следующие определения вертикальной асимптоты являются эквивалентными:

   а) прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$ или же $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$;

   б) прямая линия называется вертикальной асимптотой графика $y = f(x)$, если существует бесконечно много значений $f(x)$, являющихся сколь угодно большими (по модулю) при x, приближающихся к a справа или же слева.

5. Если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и не существует предел $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (в силу того что функция $g(x)$ колеблется при приближении аргумента к точке $x = a$), то не существует и предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

6. Если функция $f(x)$ не является ограниченной ни в какой окрестности точки $x = a$, то $\lim\limits_{x\to a-} |f(x)| = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+} |f(x)| = \infty$.

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и существует предел последовательности $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, при $n \to \infty$, равный A, то существует и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, который также равен A.

§3. Непрерывность

1. Если функция $|f(x)|$ непрерывна на промежутке $(a; b)$, то и сама функция $f(x)$ является непрерывной на этом промежутке.

2. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ не является непрерывной в точке a, то не является непрерывной в этой точке и сумма $f(x) + g(x)$ этих функций.

3. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ не является непрерывной в точке a, то не является непрерывной в этой точке и произведение $f(x)g(x)$ этих функций.

4. Между двумя точками локального минимума функции всегда имеется точка ее локального) максимума.

5. Между двумя точками локального минимума непрерывной функции всегда имеется точка ее локального максимума.

6. Если функция определена в некоторой окрестности точки $x = a$, является возрастающей слева от нее и является убывающей справа от этой точки, то $x = a$ — точка локального максимума этой функции.

7. Если функция определена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на промежутке $(a; b)$, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[a; b]$.

8. Всякая непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

9. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = f(b)$ и к ее графику в каждой его точке можно провести касательную прямую, то найдется точка этого графика, в которой касательная к графику является горизонтальной.

10. Если заданная на отрезке $[a; b]$ функция является ограниченной, достигает своих наибольшего и наименьшего значений и принимает все значения между ними, то эта функция непрерывна на $[a; b]$.

11. Если заданная на отрезке $[a; b]$ функция является ограниченной, достигает своих наибольшего и наименьшего значений и принимает все значения между ними, то эта функция непрерывна хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$.

12. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она не может принимать свои наименьшее и наибольшее значения в бесконечном множестве точек.

13. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то она обращается в нуль хотя бы в одной точке этого отрезка.

14. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на промежутке $(a; b)$, то всякое число m, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, является значением этой функции.

15. Если функция является разрывной в каждой точке своей области определения, то ни ее квадрат, ни ее модуль не являются непрерывными функциями.

16. Функция не может быть непрерывной в одной точке своей области определения и быть разрывной во всех других ее точках.

17. Последовательность непрерывных на $[a; b]$ функций всегда сходится к некоторой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции.

§4. Дифференциальное исчисление

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются дифференцируемыми на промежутке $(a; b)$ и $f(x) > g(x)$ при всех $x \in (a; b)$, то и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x \in (a; b)$.

2. Если нелинейная функция дифференцируема и монотонна на $(0; +\infty)$, то и ее производная является монотонной на $(0; +\infty)$ функцией.

3. Если функция непрерывна в некоторой точке, то в этой точке существует и ее производная.

4. Если функция непрерывна на $\mathbb{R}$ и в каждой точке ее графика существует касательная к нему, то эта функция дифференцируема в каждой точке числовой прямой.

5. Если функция непрерывна на промежутке $(a; b)$ и ее график на этом промежутке является *гладкой кривой* (не имеющей углов), то эта функция является дифференцируемой на $(a; b)$.

6. Если в некоторой точке производная функции равна нулю, то она не является ни возрастающей, ни убывающей в этой точке.

7. Если функция является дифференцируемой и строго убывающей на $(a; b)$, то ее производная отрицательна всюду на $(a; b)$.

8. Если функция является непрерывной и строго убывающей на $(a;b)$, то ее производная неположительна в каждой точке этого промежутка.

9. Если производная функции положительна в любой точке ее области определения, то эта функция является строго возрастающей на всей области ее определения.

10. Если функция $f(x)$ определена на $[a;b]$ и точка $c \in (a;b)$ является точкой ее локального максимума, то $f(x)$ возрастает на некотором (достаточно малом) промежутке $(x_1;c)$ и убывает на некотором промежутке $(c;x_2)$.

11. Если функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f(0) = f'(0) = 0$, то $f(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

12. Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка $(a;b)$ и принимает на нем как положительные, так и отрицательные значения, то ее модуль $|f(x)|$ не имеет производной в тех точках, в которых $f(x) = 0$ (примерами тому являются функции $f(x) = x$ и $f(x) = \sin x$).

13. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a;b)$ и при этом их графики пересекаются, то функция $h(x)$, определенная равенством $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, не имеет производной в тех точках, в которых $f(x) = g(x)$.

14. Если функция является дважды дифференцируемой в точке своего локального максимума (минимума), то ее вторая производная в этой точке отрицательна (соответственно положительна).

15. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеет производной в точке $x = a$, то их сумма $f(x)+g(x)$ также не имеет производной в этой точке.

16. Если у функции $f(x)$ существует производная в точке $x = a$, тогда как функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке, то и произведение $f(x)g(x)$ не имеет производной в точке $x = a$.

17. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеет производной в точке $x = a$, то и произведение $f(x)g(x)$ не имеет производной в этой точке.

18. Если функция $g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $f(x)$ недифференцируема в точке $g(a)$, то и композиция $F(x) = f\big(g(x)\big)$ недифференцируема в этой точке.

19. Если функция $g(x)$ недифференцируема в точке $x = a$, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $g(a)$, то и композиция $F(x) = f\big(g(x)\big)$ недифференцируема в этой точке.

20. Если функция $g(x)$ недифференцируема в точке $x = a$, а функция $f(x)$ недифференцируема в точке $g(a)$, то композиция $F(x) = f\big(g(x)\big)$ также недифференцируема в точке $x = a$.

21. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$.

22. Если функция является дважды дифференцируемой в некоторой окрестности точки $x = a$ и ее вторая производная в этой точке равна нулю, то точка $\big((a, f(a))\big)$ является точкой перегиба графика этой функции.

23. Если функция $f(x)$ является дифференцируемо в точке $x = a$ и точка $\big((a, f(a))\big)$ есть точка перегиба ее графика, то вторая производная этой функции обращается в нуль в точке $x = a$.

24. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ и стремятся к бесконечности при $x \to \infty$, то для вычисления предела отношения $f(x)/g(x)$ при $x \to \infty$ можно воспользоваться соотношением
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

25. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = \infty$, то и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$.

26. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $(0; +\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

27. Если функция $f(x)$ дифференцируема и ограничена на промежутке $(0; +\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

28. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то ее производная непрерывна в этой точке.

29. Если производная функции $f(x)$ в точке $x = a$ является положительной, то существует окрестность точки a, на которой эта функция является возрастающей.

30. Если функция $f(x)$ неперерывна на промежутке $(a; b)$ и точка $c \in (a; b)$ является точкой ее локального максимума, то существует окрестность точки c, в которой слева от точки c функция $f(x)$ возрастает, а справа — убывает.

31. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то найдется окрестность точки a, в которой ее производная является ограниченной.

32. Если во всякой окрестности точки a найдется точка, в которой функция $f(x)$ не имеет производной, то эта функция не имеет производной и в самой точке a.

33. Не существует функции, которая является дифференцируемой только в одной точке своей области определения.

34. Всякая непрерывная на промежутке $(a; b)$ функция дифференцируема хотя бы в одной точке этого промежутка.

§5. Интегральное исчисление

1. Если функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то площадь области, ограниченной ее графиком, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3. Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, то $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a; b]$.

4. Если функция $f(x)$ является непрерывной, то для любого числа k справедливо равенство $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

5. При вращении области бесконечной площади вокруг некоторой оси получается тело, объем которого также является бесконечным.

6. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и существует интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, то существует и интеграл[14] $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

7. Если не существует ни один из интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то не существует и интеграл $\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx$.

8. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся.

9. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является расходящимся, то функция $f(x)$ не является ограниченной на промежутке $(a;+\infty)$.

10. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[1;+\infty)$, а сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ является конечной, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся.

11. Если каждый из интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ является расходящимся, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx$.

12. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

13. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a;+\infty)$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

[14] Определенным интегралом автор называет предел римановых сумм. Таким образом, интеграл от данной функции существует, если существует предел сумм Римана при диаметре разбиения, стремящемся к нулю.— *Прим. перев.*

14. Если функция $f(x)$ положительна и неограничена на промежутке $[a;+\infty)$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

15. Если функция $f(x)$ непрерывна и неограничена на промежутке $[a;+\infty)$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

16. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

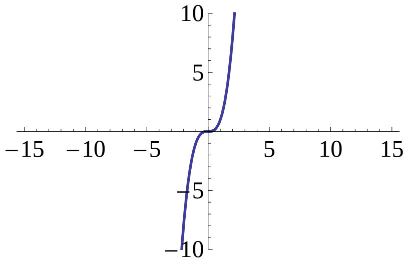
17. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся, а функция $g(x)$ — ограниченной, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$.

Решения

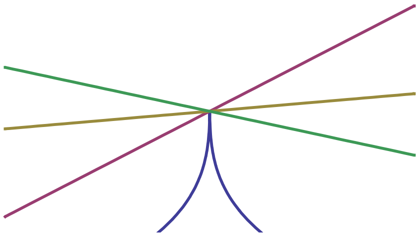
Напомним, что, поскольку все сформулированные утверждения *были неверны*, достаточно указать хотя бы один *противоречащий им пример*. Конечно, таких примеров бесконечно много, но повторяем, что достаточно указать один, что и сделано в приводимых далее решениях. Надеемся, что читатели будут строить свои контпримеры и сравнивать их с примерами, приводимыми ниже.

§1. Функции.

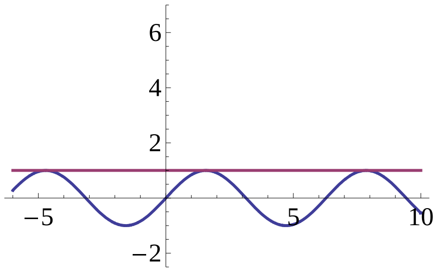
1.1. 1. Ось абсцисс касается графика $y = x^3$, однако она пересекает эту кривую.



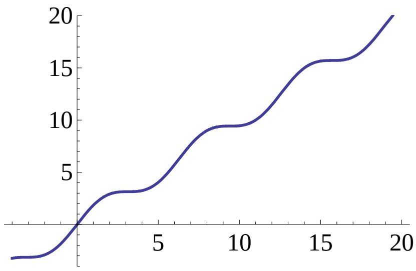
2. Каждая из трех изображенных на рисунке прямых только касается данной кривой и не пересекает ее, однако ни одна из этих прямых не является касательной к данной кривой.



1.2. Прямая $y = 1$ касается графика $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{2}$ и еще в бесконечном множестве точек.



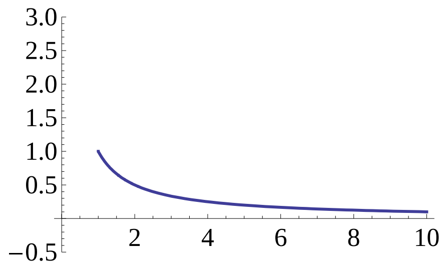
1.3. В выражение, определяющее каждую из функций $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ и $g(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}$, переменная x входит с наибольшей степенью, равной 2, однако ни одна из этих функций не является квадратичной.
1.4. Пусть $f(x) = x + \sin x$ и $g(x) = -x$. Каждая из этих функций непрерывна и монотонна на $\mathbb{R}$, однако их сумма $f(x) + g(x) = \sin x$ не является монотонной функцией[15].



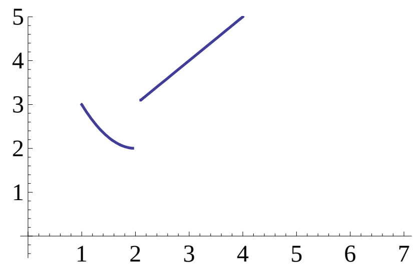
[15]То, что функция $f(x) = x + \sin x$ является возрастающей, еще надо доказать, для чего придется либо использовать производную, либо — неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$. Для построения контпримера проще рассмотреть функции $u(x) = x^3 + x$ и $v(x) = -2x$.— *Прим. перев.*

1.5. Каждая из функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x - x^2$ не является монотонной на $\mathbb{R}$, однако их сумма $f(x) + g(x) = 2x$ монотонна на всей числовой прямой.

1.6. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна и убывает на $(0; +\infty)$, при этом $f(1) = 1 > 0$, однако она не имеет корней.



1.7. Функция, график которой изображен на следующем рисунке, является обратимой, однако она не является ни возрастающей, ни убывающей[16].



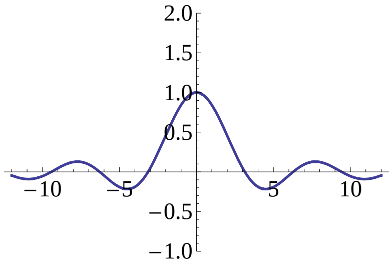
1.8. Если $f(x) = x^2$, то для каждого числа x найдется такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ — возьмите $M = x^2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Однако квадратичная функция не является ограниченной [17].

Дело в том, что порядок слов в определении очень важен. Правильное определение ограниченной функции отличается от утверждения 1.8 только порядком слов. А именно, функция $f(x)$ называется ограниченной на $\mathbb{R}$, если найдется такое число $M > 0$, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

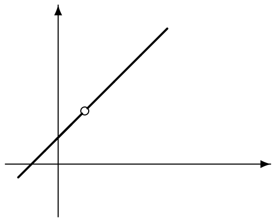
[16]Хорошее упражнение — задать формулой функцию, являющейся контрпримером к утверждению 1.7.— *Прим. перев.*

[17]Более того, для любой заданной на $\mathbb{R}$ функции, очевидно, верно, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M$. Можно просто положить $M = |f(x)| + 1$.— *Прим. перев.*

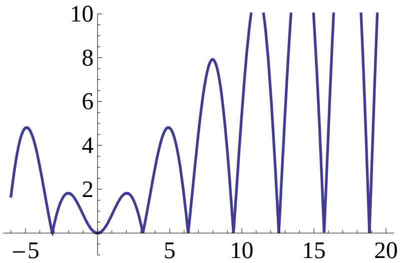
1.9. Прямая $x = 0$ не является вертикальной асимптотой графика функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.



1.10. Прямая $x = 1$ не является вертикальной асимптотой графика функции $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.



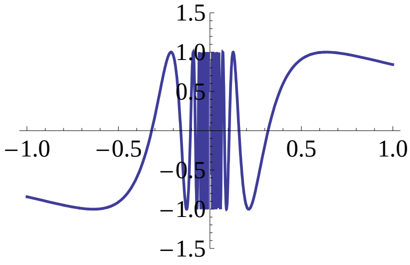
1.11. Функция $f(x) = |x \sin x|$ неограничена и неотрицательна на $\mathbb{R}$, однако у нее имеется бесконечная и стремящаяся к бесконечности последовательность ее корней.



1.12. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$$

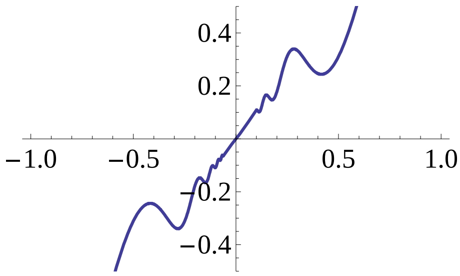
принимает как свое наибольшее значение, равное 1, так и свое наименьшее значение -1 бесконечно много раз в любом содержащем нуль промежутке.



1.13. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$$

возрастает в точке $x = 0$, однако она не является возрастающей ни в какой окрестности $(-\delta; \delta)$ нуля[18].



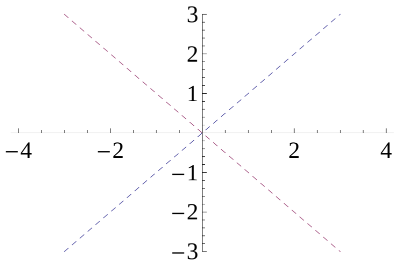
1.14. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если число } x \text{ рационально}, \\ -x, \text{ если число } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

не монотонна, но обратима[19]. Невозможно нарисовать график этой функции, однако следующий рисунок дает некоторое представление о ее поведении.

[18]То, что эта функция обладает указанными свойствами, еще надо доказать, что без дифференцирования сделать будет затруднительно.— *Прим. перев.*

[19]Эта функция совпадает с обратной к ней. Более простой пример функции, являющейся контрпримером к утверждению 1.14, был приведен в решении задания 1.7. Замечу, что задания 1.7 и 1.14 эквивалентны.— *Прим. перев.*



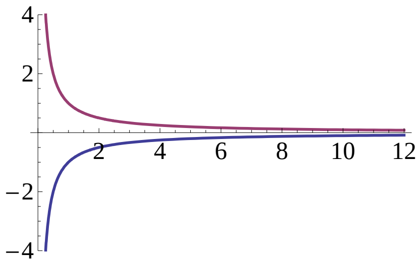
1.15. Рассмотрим функцию $f(x)$ из предыдущего решения на луче $(0;+\infty)$. Поскольку $f^2(x)=x^2$, квадрат функции $f(x)$ является монотонной функцией.

Возможно, что функции, построенные как контрпримеры к утверждениям 1.14 и 1.15, могут показаться искусственными и не имеющими никакого практического смысла. В этой связи замечу, что *функция Дирихле*, равная 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных точках числовой прямой, совпадает с пределом[20] последовательности значений косинуса,

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\bigl(\cos(k!\pi x)\bigr)^{2n}.$$

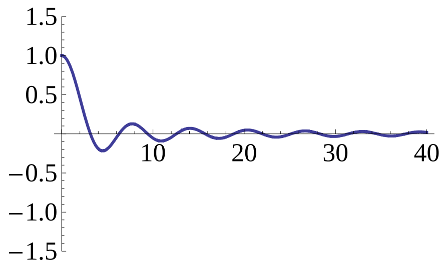
§2. Функции.

2.1. Рассмотрим функции $f(x)=-\frac{1}{x}$ и $g(x)=\frac{1}{x}$. Ясно, что $f(x)<g(x)$ при всех $x>0$, тем не менее $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. Графическая иллюстрация приведена на рисунке.



2.2. При $x\to\infty$ точки графика функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ приближаются к оси абсцисс сверху и снизу и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}-0\right)=0$ (см. рис.).

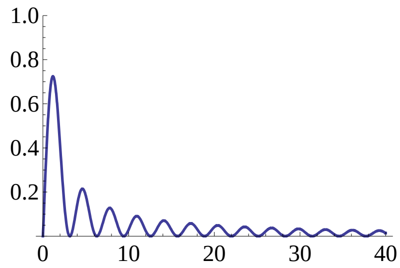
[20] Доказательство этого факта является хорошим упражнением.— *Прим. перев.*



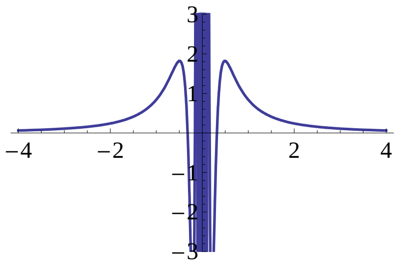
Согласно первому определению ось абсцисс является невертикальной асимптотой этого графика, однако он пересекает ось абсцисс бесконечно много раз. Таким образом, два данных определения не являются эквивалентными.

Заметим, что правильным является первое определение асимптоты графика функции. Его суть состоит в том, что при увеличении аргумента функции точки ее графика будут приближаться к прямой, при этом не исключено, что график может касаться асимптоты или пересекать ее.

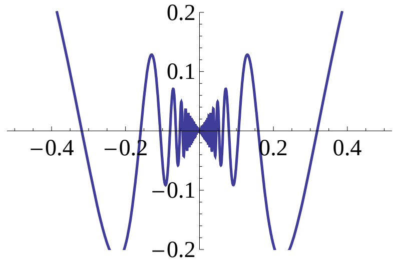
2.3. Ось абсцисс является асимптотой графика $y = \frac{\sin^2 x}{x}$, который, с другой стороны, касается ее в точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. рис.).



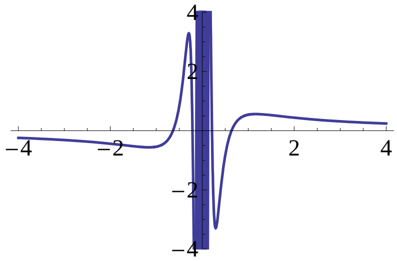
2.4. То, что эти определения не эквивалентны, показывает пример функции $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ (см. рис.), у которой имеется бесконечно много значений со сколь угодно большим модулем. Однако ось ординат не является асимптотой ее графика. Верным является первое определение.



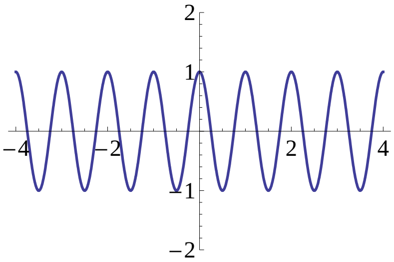
2.5. Пусть $f(x) = x$ и $g(x) = \sin\frac{1}{x}$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не существует, поскольку функция $g(x)$ делает бесконечно много колебаний от -1 к 1 при $x \to 0$. С другой стороны, так как функция $f(x)$ является бесконечно малой, а функция $g(x)$ — ограниченной, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (см. рис.).



2.6. Функция $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не является ограниченной ни в какой (проколотой) окрестности нуля, однако не существует ни предел $\lim\limits_{x\to 0-}\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|$, ни предел $\lim\limits_{x\to 0+}\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|$. Эскиз графика этой функции приведен на рисунке.



2.7. Пусть $f(x) = \cos 2\pi x$. Тогда $f(n) = 1$ для любого натурального числа n, и, таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$, тогда как предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует. Эскиз графика этой функции приведен на рисунке.



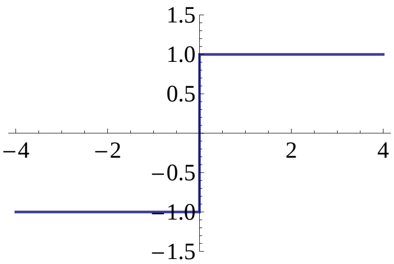
Заметим, что утверждение 2.7 является обратным к верному утверждению: если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$.

§3.Непрерывность.

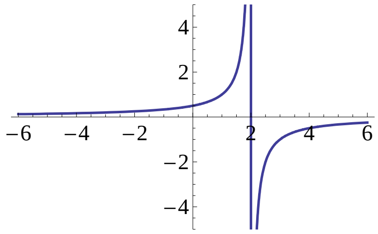
3.1. Рассмотрим функцию

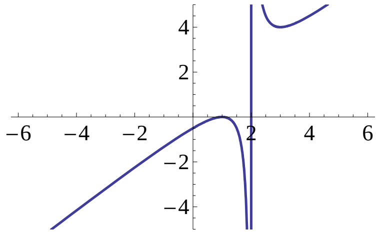
$$p(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Ее модуль тождественно равен единице, поэтому он является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией, тогда как сама эта функция непрерывной не является — отсутствует непрерывность в точке $x = 0$.



3.2. Положим $f(x) = -\frac{1}{x-a}$ и $g(x) = x + \frac{1}{x-a}$ при $x \neq a$, а $f(a) = g(a) = \frac{a}{2}$. Точка $x = a$ является точкой разрыва обеих этих функций, однако функция $f(x) + g(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. На следующих рисунках приведены эскизы графиков этих функций[21] при $a = 2$.





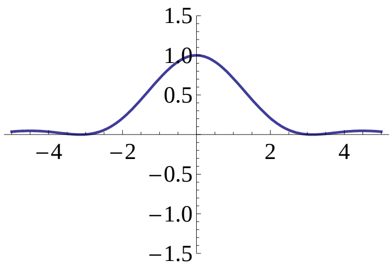
3.3. Каждая из функций

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 2, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной при $x = 0$, однако их произведение

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

является непрерывной на всей числовой прямой функцией (см. рис.)[22].



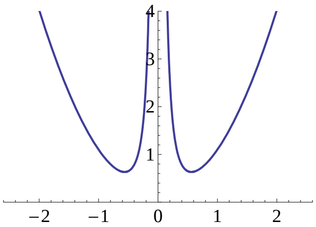
[21] Можно было рассуждать «в общем виде». Пусть $f(x)$ — произвольная функция, не являющаяся непрерывной. Положим $g(x) = -f(x)$. Тогда функция $g(x)$ также не является непрерывной, тогда как сумма $f(x) + g(x) = 0$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.— *Прим. перев.*

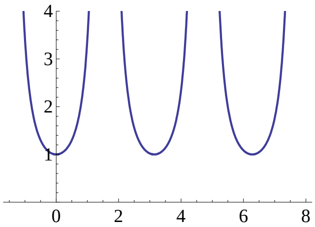
[22] Опять-таки можно было построить «общий пример». Пусть $h(x)$ — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Фиксируем значение $x = a$ и обозначим через b произвольное число, не равное $h(a)$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если} \quad x \neq a, \\ 2b, & \text{если} \quad x = a, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если} \quad x \neq a, \\ b/2, & \text{если} \quad x = a. \end{cases}$$

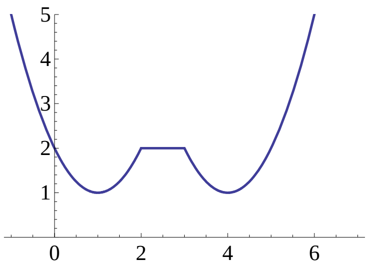
Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывной не является, однако их произведение совпадает с непрерывной функцией $h^2(x)$.— *Прим. перев.*

3.4. Каждая из функций $f(x) = \frac{x^4+0{,}1}{x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ не имеет максимумов между своими точками минимума.





3.5. Контрпримером является функция, график которой изображен на следующем рисунке.



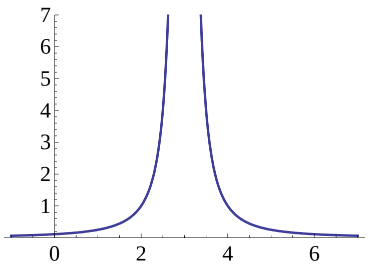
Заметим, однако, что здесь речь идет о *строгих* максимумах, что означает, что при всех $x \in (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$ должно выполняться неравенство $f(x) < f(a)$. Если же речь идет об обычных (нестрогих) максимумах, то в приведенном примере любая точка отрезка $[2; 3]$ является точкой максимума.

3.6. Функция

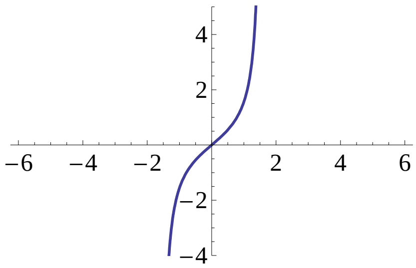
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2}, & \text{если} \quad x \neq 3, \\ 1, & \text{если} \quad x = 3, \end{cases}$$

определена на $\mathbb{R}$, возрастает на промежутке $(-\infty; 3)$, убывает на $(3; +\infty)$, однако точка $x = 3$ не является точкой максимума этой функции[23].

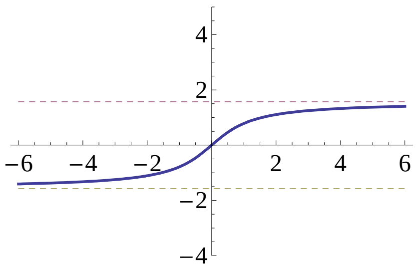
[23]Может быть, проще положить $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$ — *Прим. перев.*



3.7. Если $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то функция $f(x)$ определена на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, непрерывна на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, однако не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений на своей области определения[24].



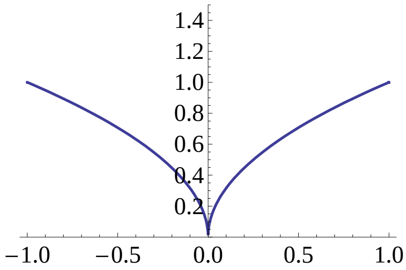
3.8. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, однако она не достигает ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значений[25].



[24]Возможно, что проще положить $f(x) = x$ при $x \in (0; 2)$ и $f(0) = f(2) = 1$.— *Прим. перев.*

[25]Другим примером подобной функции является функция $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.— *Прим. перев.*

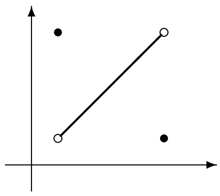
3.9. На следующем рисунке изображен график функции $f(x)$, заданной и непрерывной на некотором отрезке, такой, что $f(-1) = f(1)$, при этом касательная к этому графику существует в любой его точке, однако не существует такой точки $c \in (-1; 1)$, что касательная к графику в точке $\big(c, f(c)\big)$ является горизонтальной.



3.10. Функция $f(x) = x$ при $x \in (1; 2)$, такая, что $f(1) = 2$ и $f(2) = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \in (1; 2), \\ 2 \text{ при } x = 1, \\ 1 \text{ при } x = 2, \end{cases}$$

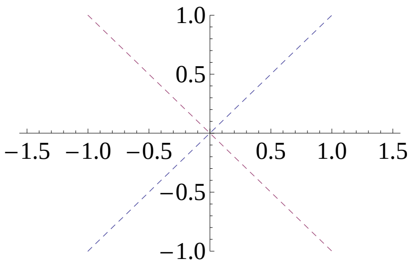
ограничена на $[1; 2]$, достигает как своего наибольшего, так и своего наименьшего значения, и при этом принимает все значения в промежутке между ними, однако не является непрерывной.



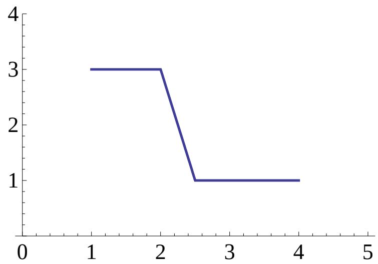
3.11. В предыдущем примере была построена функция, непрерывная всюду, за исключением двух точек. Контрпримером к данному утверждению является функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0, \\ x, \text{ если число } x \text{ рационально и при этом } x \neq 0, \ x \neq 1, \\ -x, \text{ если число } x \text{ иррационально}, \\ 0, \text{ если } x = 1. \end{cases}$$

Изобразить график этой функции невозможно, однако следующий рисунок дает некоторое представление о ее поведении.



3.12. Функция, график которой изображен на следующем рисунке, принимает свое наибольшее значение (равное 3), а также свое наименьшее значение (равное 1) в бесконечном множестве точек.

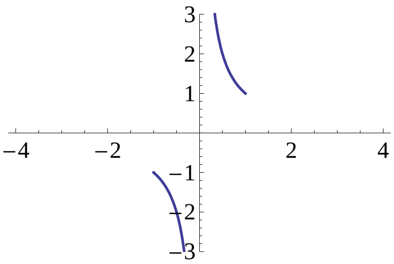


3.13. Функция

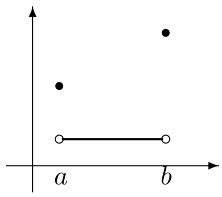
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } \ x \neq 0, \\ 1, & \text{если } \ x = 0, \end{cases}$$

определена на промежутке $[-1; 1]$, принимает различные знаки на его концах, однако не обращается в нуль ни в одной точке точке этого промежутка[26].

[26]Проще взять функцию, равную -1 при $x \in [-1; 0]$ и 1 при $x \in (0; 1]$.— *Прим. перев.*



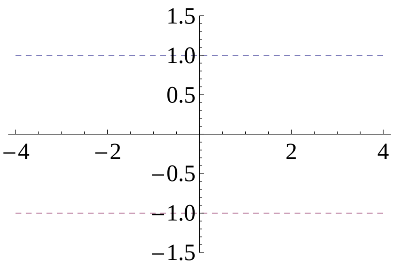
3.14. Функция, график которой изображен на следующем рисунке, определена на отрезке $[a;b]$, непрерывна на промежутке $(a;b)$, однако ни для какого числа $m \in \big(f(a);f(b)\big)$ не существует такого числа $c \in (a;b)$, что $m = f(c)$.



3.15. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ -1, & \text{если число } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

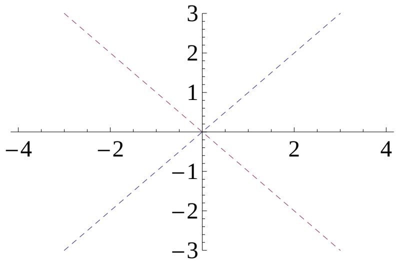
разрывна в каждой точке своей области определения, однако ее модуль и ее квадрат тождественно равны 1, поэтому являются непрерывными. Невозможно нарисовать график функции $f(x)$, однако следующий рисунок дает некоторое представление о ее поведении.



3.16. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ -x, & \text{если число } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

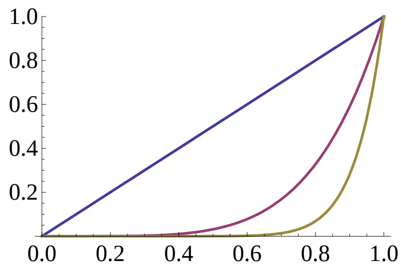
непрерывна в точке $x = 0$ и разрывна во всех остальных точках числовой прямой. Невозможно нарисовать график функции $f(x)$, однако следующий рисунок дает некоторое представление о ее поведении.



3.17. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$, $x \in [0; 1]$. Пределом этой последовательности является функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [0; 1), \\ 1, & \text{если} \quad x = 1, \end{cases}$$

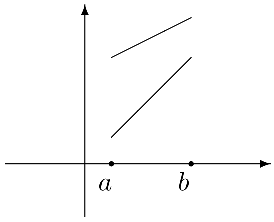
не являющаяся непрерывной. На следующем рисунке изображены графики[27] функций $f_1(x)$, $f_5(x)$ и $f_{12}(x)$.



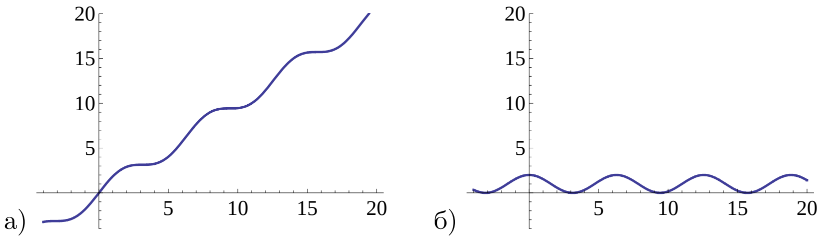
§4. Дифференциальное исчисление.

[27] Добавлены при переводе.

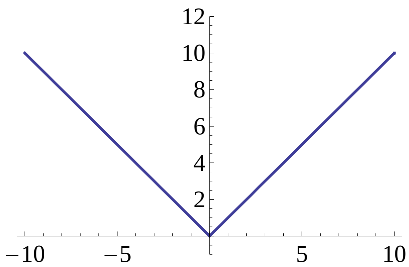
4.1. На следующем рисунке изображены графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ линейных функций, при этом $f(x) > g(x)$ всюду на $[a; b]$, тем не менее[28] $f'(x) < g'(x)$ на $[a; b]$.



4.2. Функция $f(x) = x + \sin x$ дифференцируема и монотонна даже на $\mathbb{R}$ (рис. а), однако ее производная $f'(x) = 1 + \cos x$ не является монотонной на $(0; +\infty)$ функцией[29] (рис. б).



4.3. Функция $f(x) = |x|$ является непрерывной, однако не имеет производной в точке $x = 0$.

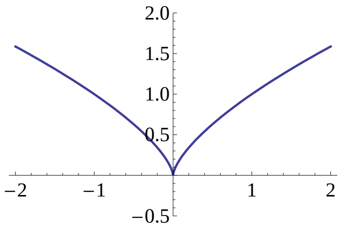


4.4. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, и в каждой точке ее графика (в том числе и в начале координат; см. рис. а) существует ка-

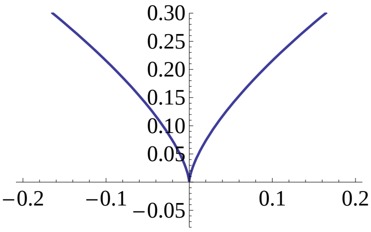
[28] Может показаться, что не удастся построить подобный пример на $\mathbb{R}$. Однако расмотрите такую пару функций: $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ и $g(x) = x$. — *Прим. перев.*

[29] Более простой пример — это функция $f(x) = (x - 1)^3$.— *Прим. перев.*

сательная к нему. Однако эта функция не имеет производной[30] при $x = 0$.

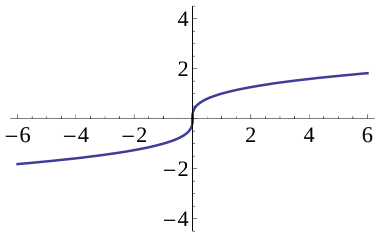


а)

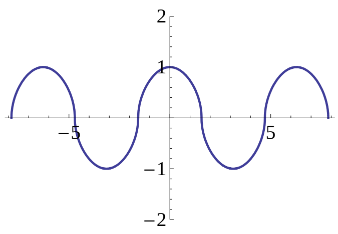


б)

4.5. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, и ее график является «гладкой» кривой, не имеющей углов (рис. а), однако эта функция не является дифференцируемой в точке $x = 0$.



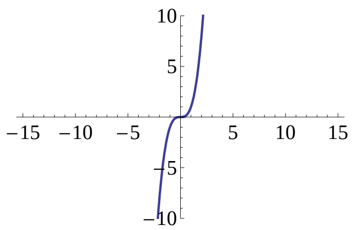
а)



б)

Функция, график которой изображен на рис. б, является непрерывной, ее график есть гладкая кривая, однако сама эта функция не является дифференцируемой в бесконечном множестве точек[31].

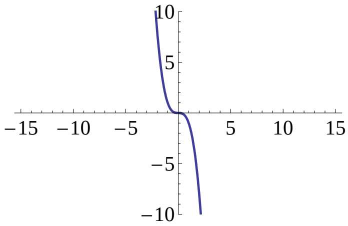
4.6. Производная функции $f(x) = x^3$ равна нулю при $x = 0$, однако эта функция является (строго) возрастающей в этой точке.



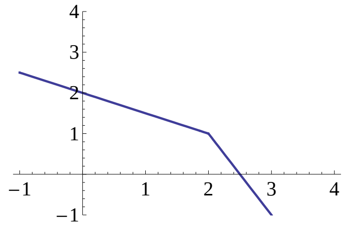
[30] Может показаться, что к графику $y = \sqrt[3]{x^2}$ нельзя провести касательную в начале кординат. Однако, если посмотреть на этот график в «большем масштабе» (рис. б), то уже более менее видно, что в действительности он касается оси ординат.— *Прим. перев.*

[31] На рис. б изображен график функции, равной $\sqrt{\cos x}$, если $\cos x \geqslant 0$, и $-\sqrt{-\cos x}$, если $\cos x < 0$.— *Прим. перев.*

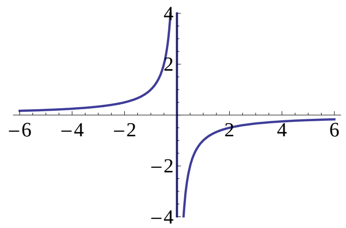
4.7. Функция $f(x) = -x^3$ является дифференцируемой и строго убывающей на $\mathbb{R}$, однако ее производная в точке $x = 0$ равна нулю, таким образом, производная этой функции не является отрицательной на $\mathbb{R}$.



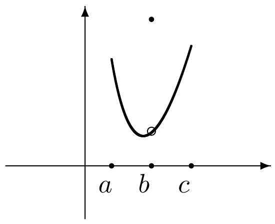
4.8. Функция (кусочно линейная), график которой изображен на следующем рисунке, непрерывна на $\mathbb{R}$ и является строго убывающей, однако она не имеет производной в точке $x = 2$.



4.9. Производная функции $f(x) = -\frac{1}{x}$ равна $\frac{1}{x^2}$, следовательно, она положительна при всех $x \neq 0$, т. е. на всей области определения данной функции. Однако, взяв $x_1 = -1$ $x_2 = 1$, мы получим, что $x_1 < x_2$, но $f(x_1) = 1 > f(x_2) = -1$. Таким образом, эта функция на своей области определения не является возрастающей.

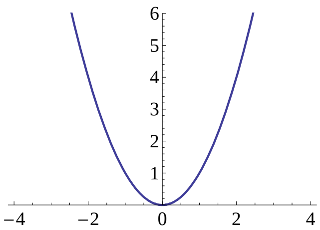


4.10. Функция, график которой изображен на следующем рисунке, определена на отрезке $[a; b]$, принимает свое наибольшее значение в точке $c \in [a; b]$, однако она не является ни возрастающей в некотором промежутке слева от точки c, ни убывающей в некотором промежутке справа от этой точки[32].



Дело в том, что в определении локального максимума (минимума) функции ничего не говорится о том, является ли эта функция дифференцируемой или даже просто непрерывной. Все, что требуется, — это чтобы существовало такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(c)$ (соответственно $f(x) > f(c)$) при всех $x \in (c - \delta; c + \delta)$, $x \neq c$.

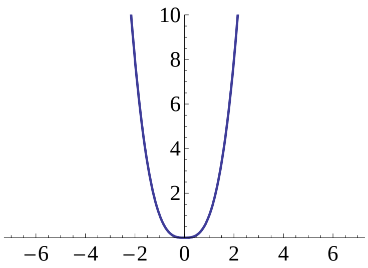
4.11. И функция $f(x) = x^2$, и ее производная $f'(x) = 2x$ равны нулю при $x = 0$, однако сама эта функция более нигде в нуль не обращается[33].



4.12. Функция $f(x) = x^3$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и принимает как положительные, так и отрицательные значения, тем не менее ее модуль $|f(x)| = |x^3|$ является также функцией, дифференцируемой на всей числовой прямой.

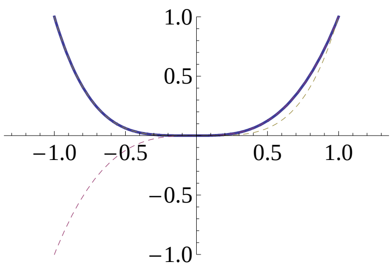
[32]К примеру, можно положить $f(x) = x^2$ при $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ и $f(0) = 2$.— *Прим. перев.*

[33]Более того, даже если потребовать, чтобы функция была бесконечно дифференцируемой и $f^{(k)}(0) = 0$ для любого неотрицательного числа k, то и тогда функция не обязана быть тождественно равной нулю.— *Прим. перев.*



Заметим, что утверждение 4.12 станет верным, если дополнительно предположить, что в тех точках, в которых функция обращается в нуль, производная этой функции отлична от нуля.

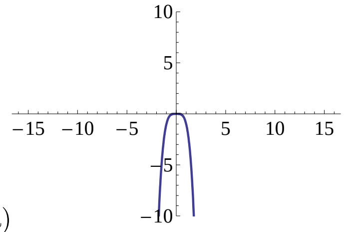
4.13. Функция $f(x) = \max\{x^3, x^4\}$, $x \in (-1; 1)$, дифференцируема при $x = 0$, хотя графики $y = x^3$ и $y = x^4$ пересекаются в начале координат[34].



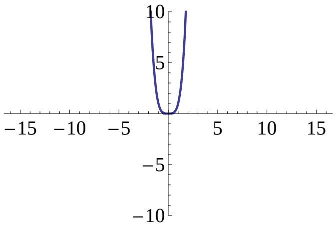
Заметим, что утверждение 4.13 станет верным, если дополнительно предположить, что $f'(x) \neq g'(x)$ в точках, в которых $f(x) = g(x)$.

4.14. Функция $f(x) = -x^4$ дважды дифференцируема в своей точке максимума $x = 0$, однако вторая производная этой функции в этой точке равна нулю. Аналогичным образом, функция $f(x) = x^4$ дважды дифференцируема в своей точке максимума $x = 0$, однако вторая производная этой функции в этой точке также равна нулю.

[34]Эта задача является обобщением предыдущей, поскольку $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$. Таким образом, контрпримером к утверждению 4.13 является также пара функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = -x^3$.— *Прим. перев.*

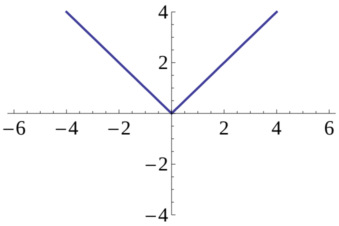


а)

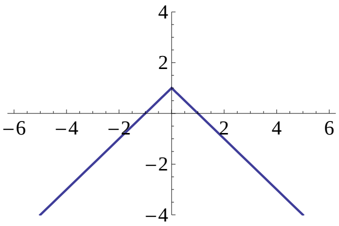


б)

4.15. Положим $f(x) = |x|$ и $g(x) = 1 - |x|$. Обе эти функции не дифференцируемы в точке $x = 0$, однако их сумма $f(x) + g(x)$ тождественно равна единице и, таким образом, является функцией, дифференцируемой всюду на $\mathbb{R}$, включая и точку $x = 0$.



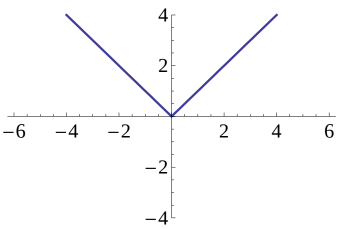
а)



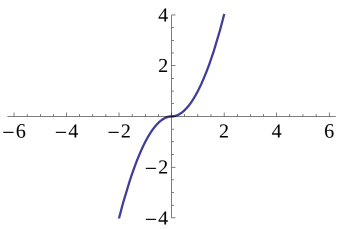
б)

Обобщая предыдущий пример, положим $g(x) = h(x) - f(x)$, где функция $h(x)$ дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$, а функция $f(x)$ недифференцируема при $x = a$. Тогда и функция $g(x)$ недифференицруема при $x = a$, тогда как их сумма $f(x) + g(x) = h(x)$ дифференцируема в этой точке.

4.16. Функция $f(x) = x$ дифференцируема в нуле, функция $g(x) = |x|$ не дифференцируема в нуле (рис. а), однако их произведение $f(x)g(x) = x|x|$ (рис. б) имеет производную в точке $x = 0$ (значение этой производной равно нулю.)



а)



б)

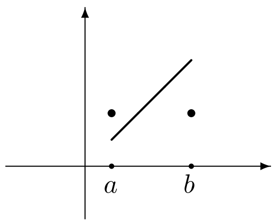
4.17. Каждая из функций $f(x) = |x|$ и $g(x) = -|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, однако их произведение $f(x)g(x) = -|x|^2 = -x^2$ дифференцируемо в этой точке.

4.18. Функция $g(x) = x^2$ дифференцируема в нуле, функция $g(x) = |x|$ недифференцируема в точке $g(0) = 0$, однако их композиция $F(x) = f\big(g(x)\big) = |x^2| = x^2$ имеет производную в точке $x = 0$.

4.19. Функция $g(x) = |x|$ недифференцируема в нуле, функция $g(x) = x^2$ дифференцируема в точке $g(0) = 0$, однако их композиция $F(x) = f\big(g(x)\big) = |x|^2 = x^2$ имеет производную в точке $x = 0$.

4.20. Функция $g(x) = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,|x|$ не дифференцируема при $x = 0$ и функция $f(x) = 2x + |x|$ не дифференцируема в точке $g(0) = 0$, однако композиция $F(x) = f\big(g(x)\big) = 2\big(\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,|x|\big) + \big|\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,|x|\big|$ дифференцируема в точке $x = 0$. Убедитесь в справедливости равенства[35] $F'(0) = 1$.

4.21. Функция $f(x)$, график которой изображен на следующем рисунке, определена на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и такова, что $f(a) = f(b)$. Однако не существует таких точек $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$.

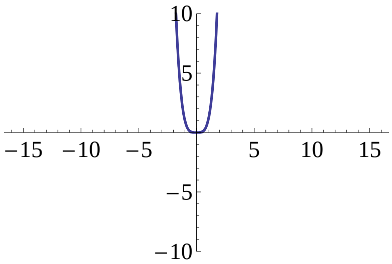


4.22. Функция $f(x) = x^4$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$, при $x = 0$ ее вторая производная обращается в нуль, однако начало координат не является точкой перегиба графика этой функции.

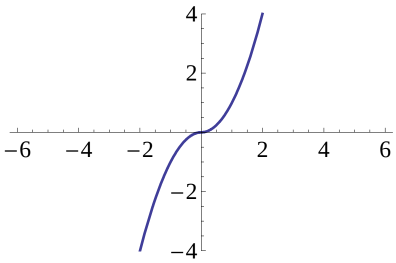
[35] Из написанных формул это понять нелегко. Тождество $F(x) = x$ будет вполне ясно, если задать функции $f(x)$ и $g(x)$ в явном виде как кусочно линейные, а именно,

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если} \;\; x \geqslant 0, \\ x, & \text{если} \;\; x < 0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \begin{cases} x/3, & \text{если} \;\; x \geqslant 0, \\ x, & \text{если} \;\; x < 0. \end{cases}$$

Кстати, из этих формул очевидна и недифференцируемость функций $f(x)$ и $g(x)$ в нуле.— *Прим. перев.*



4.23. Функция $f(x) = x|x|$ дифференцируема в нуле, начало координат является точкой перегиба ее графика, однако у этой функции не существует второй производной при $x = 0$.

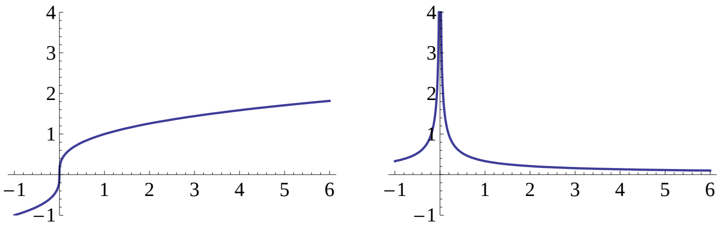


4.24. Если мы будем использовать сформулированное «правило» для вычисления предела $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x+\sin x}{2x+\sin x}$, то получим, что этот предел равен пределу $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6+\cos x}{2+\cos x}$, который не существует. Однако исходный предел существует, поскольку

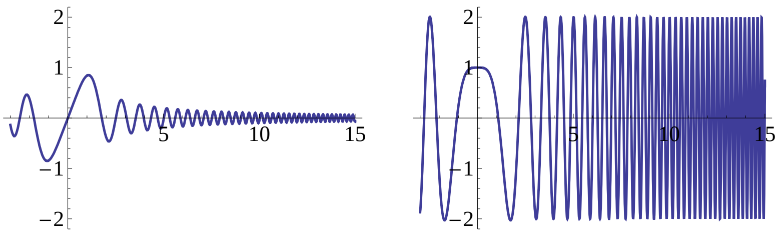
$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x+\sin x}{2x+\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}} = 3.$$

«Правило» будет верным, если добавить в его формулировку слова «если предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует или же равен $\pm\infty$». В такой форме мы получаем одну из форм известного *правила Лопиталя*.

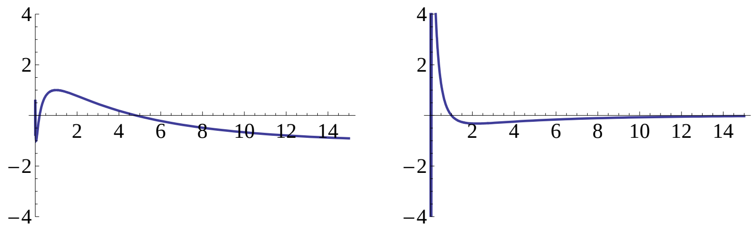
4.25. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ дифференцируема на $(0;1)$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \infty$, однако $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[3]{x} = 0$.



4.26. Функция $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ дифференцируема на $(0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^2}{x} = 0$, однако предел $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2\cos x^2 - \sin x^2}{x^2}$ не существует. Эскизы графиков функции $f(x)$ и ее производной изображены на следующих рисунках (соотвественно слева и справа).



4.27. Функция $f(x) = \cos\ln x$ (левый рисунок) дифференцируема и ограничена на $(0; +\infty)$, существует также предел ее производной $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\sin\ln x}{x} = 0$. Однако, предел самой этой функции $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\ln x$ не существует. Действительно, $\ln x \to \infty$ при $x \to +\infty$, поэтому значения $\cos(\ln x)$ колеблются между -1 и 1.



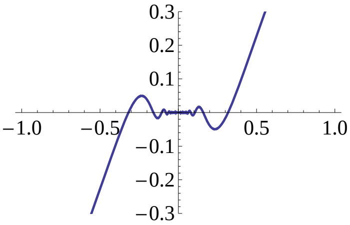
4.28. Функция

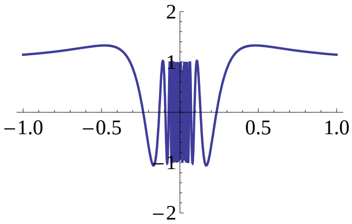
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема всюду на числовой прямой (докажите ее дифференцируемость в нуле, воспользовавшись определением производной), однако ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{при } x = 0 \end{cases}$$

(правый рисунок) не является непрерывной в точке $x = 0$.





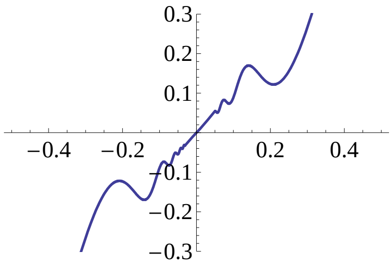
4.29. Положим

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Вычислим производную этой функции:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, \quad \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

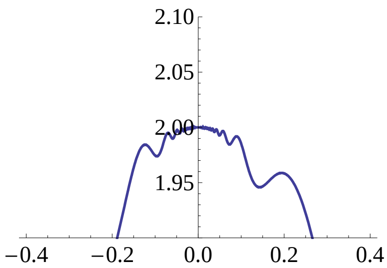
Ясно, что производная положительна в точке $x = 0$, однако принимает как положительные, так и отрицательные значения в произвольной окрестности нуля. Следовательно, эта функция не является монотонной ни в какой окрестности нуля.



4.30. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{если } \ x \neq 0, \\ 2, \ \text{ если } \ x = 0. \end{cases}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$. Так как $x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) > 0$ при всех $x \neq 0$, получаем, что $f(x) < 2 = f(0)$ при всех $x \neq 0$. Поэтому нуль является точкой максимума этой функции. Однако ни в какой окрестности левее нуля эта функция не является возрастающей, а также не является убывающей справа от нуля. Для доказательства этого факта вычислим ее производную, Так как $f'(x) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, производная принимает как положительные, так и отрицательные значения на каждом из промежутков $(-\delta; 0)$ и $(0; \delta)$, поэтому данная функция не является монотонной ни на каком из этих промежутов.



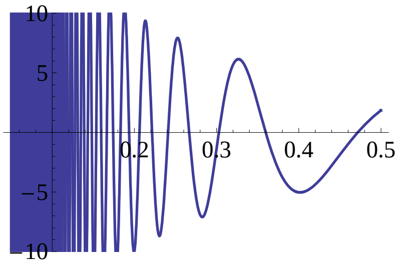
4.31. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & \text{если } \ x \neq 0, \\ 0, \ \text{ если } \ x = 0. \end{cases}$$

Ее производной является функция

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } \ x \neq 0, \\ 0, \ \text{ если } \ x = 0, \end{cases}$$

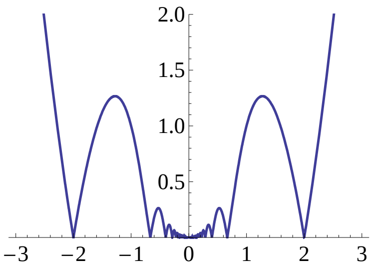
не являющаяся ограниченной ни в какой окрестности нуля (см. ниже эскиз графика функции $f'(x)$).



4.32. В каждой окрестности нуля у функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

существуют точки, в которых эта функция не является дифференцируемой, однако производная $f'(0)$ существует и равна нулю.



4.33. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{если число} \quad x \quad \text{рационально}, \\ 0, & \text{если число} \quad x \quad \text{иррационально}, \end{cases}$$

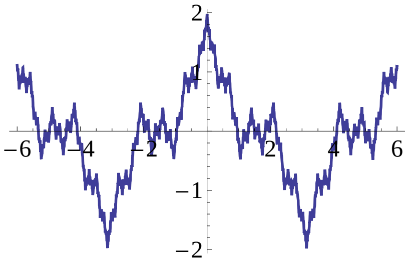
дифференцируема только в нуле.

4.34. Пример такой функции был построен Вейерштрассом[36]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3^n x}{2^n}\ .$$

[36]Доказать, что эта функция непрерывна, не очень сложно, хотя это доказательство и лежит за пределами обычного курса. Сложнее доказать, что она не имеет производной ни в одной точке числовой прямой.— *Прим. перев.*

На следующем рисунке изображен график частичной суммы ряда Вейерштрасса, а именно суммы $\sum\limits_{n=0}^{6} \frac{\cos 3^n x}{2^n}$.



Заметим, что функция Вейерштрасса является первым известным *фракталом*. Еще одним примером непрерывной кривой, имеющей углы в каждой своей точке, является так называемая *снежинка Коха*, которая строится следующим образом. Отправной точкой построения является замкнутая кривая, которую образуют стороны равностороннего треугольника. К каждой из его сторон приставим равносторонний треугольник со сторонами втрое меньшей длины. Следующей кривой является граница полученной в результате шестиконечной звезды. К каждой из сторон этой звезды снова приставим равносторонние треугольники, стороны которых втрое меньше сторон звезды, и так далее. Предельная кривая и называется снежинкой Коха. Первые четыре итерации показаны на следующих рисунках.

<рисунков пока нет>

§5. Интегральное исчисление.

5.1. Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$, однако (несобственный) интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ не существует.

Заметим, что для того, чтобы из утверждения 5.1 получить верное утвеждение, надо предположить дополнительно, что функция $f(x)$

определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$.

5.2. Интеграл от любой функции, принимающей только отрицательные значения, отрицателен, поэтому он не может быть равен площади некоторой фигуры.

5.3. Например, $\int\limits_{-1}^{2} x\,dx = \frac{3}{2}$, однако функция $f(x) = x$ на отрезке $[-1; 2]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

5.4. При $k = 0$ левая часть равенства есть произвольная константа, так как $\int 0\,dx = C$. Однако его правая часть в этом случае равна нулю.

Заметим, что приведенное равенство справедливо при всех $k \neq 0$.

5.5. Рассмотрим тело, образованное при вращении вокруг оси абсцисс подграфика функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$. Как известно, этот подграфик имеет бесконечную площадь, так как интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ расходится. Действительно,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

Тем не менее полученное тело вращения имеет конечный объем, равный

$$\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi.$$

5.6. Рассмотрим функцию $f(x)$, равную 1, если число x рационально, и -1 в противном случае. Так как $|f(x)| = 1$, интеграл от модуля этой функции существует. Покажем теперь, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ не существует, для чего воспользуемся определением.

Пусть $[a; b]$ — некоторый отрезок. Разобьем отрезок на n отрезков и рассмотрим интегральную сумму

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i.$$

Если в каждом из отрезков дробления число c_i является рациональным, то $S = b - a$. Если же каждое из этих чисел иррационально, то $S = a - b$. Таким образом, значение интегральной суммы зависит от выбора чисел c_i, поэтому предел интегральных сумм не существует, что и означает, что не существует интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

5.7. Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ -1, & \text{если число } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

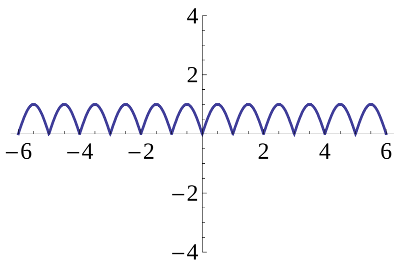
$$\text{и} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ не существуют (см. предыдущую задачу), тогда как интеграл $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ существует и равен нулю.

5.8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ равен нулю, однако интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ расходится.

5.9. Интеграл $\int\limits_a^{\infty} k\,dx$ от ненулевой константы k расходится, однако постоянная функция $f(x) = k$ является ограниченной.

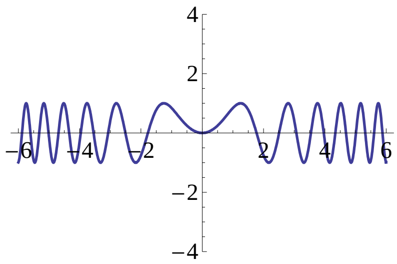
5.10. Функция $f(x) = |\sin \pi x|$ является непрерывной и неотрицательной, сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ равна нулю, однако интеграл $\int\limits_1^{\infty} |\sin \pi x|\,dx$ расходится.



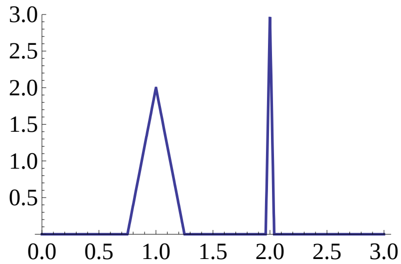
5.11. Интегралы $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{1-x}{x^2}\,dx$ являются расходящимися, однако интеграл $\int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2}\right)\,dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится.

5.12. Интеграл Френеля $\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\,dx$ сходится, однако предел $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x^2$ не существует[37]. На следующем рисунке изображен эскиз графика $y = \sin x^2$.

[37]Докажем, что интеграл Френеля сходится. Сделав замену $x^2 = t$, получим



5.13. Воспользуемся идеей площади. Для каждого натурального числа $n \geqslant 2$ построим треугольник площади $\frac{1}{n^2}$, в результате общая площадь будет равна $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, что есть некоторое число. Высота каждого из треугольников равна n, а длина основания равна $\frac{2}{n^3}$. На следующем рисунке изображена часть графика искомой функции $f(x)$.



Интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, и его значение равно сумме ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. С другой стороны, предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ не существует.

5.14. Для каждого натурального числа $n \geqslant 2$ положим

$$f(x) = \begin{cases} n \text{ при } x \in \left[n; n + \frac{1}{n^3}\right), \\ \frac{1}{n^3} \text{ при } x \in \left[n + \frac{1}{n^3}; n + 1\right). \end{cases}$$

интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

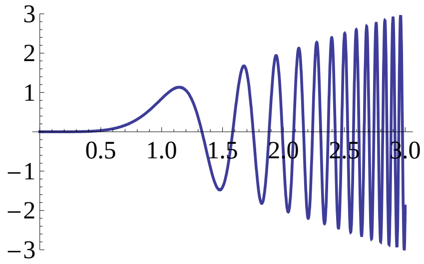
Первый из полученных несобственных интегралов является абсолютно сходящимся, сходимость второго интеграла следует из признака Дирихле сходимости несобственных интегралов. Заметим также, что контпримеры к утверждению 5.12 можно построить проще — см. решения следующих упражнений.— *Прим. перев.*

Площадь подграфика этой функции меньше чем $2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, следовательно, интеграл $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся. Однако данная функция положительна всюду на луче $[2;+\infty)$ и не является ограниченной.

5.15. Функция $f(x)=x\sin x^4$ непрерывна и неограничена (см. рис.), однако интеграл $\int\limits_0^{\infty} x\sin x^4\,dx$ сходится, поскольку в результате замены $t=x^2$ мы получаем почти интеграл Френеля,

$$\int_0^{\infty} x\sin x^4\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sin t^2\,dt,$$

который сходится (см. примечание переводчика к решению задачи 5.12).



5.16. Функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на промежутке $[1;+\infty)$, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, однако интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ является расходящимся[38].

5.17. Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, функция $g(x)=\sin x$ ограничена, однако интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится[39].

[38]Сходимость первого из этих интегралов следует из признака Дирихле. Расходимость второго интеграла следует из расходимости гармонического ряда в силу цепочки неравенств:

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx\geqslant\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi(n+1)}\ .$$

Прим. перев.

[39]Доказательство расходимости этого интеграла аналогично доказательству рас-

В заключение замечу, что задания 10, 13 и 14 были предложены автору Алехандро Гонзалесом–Мартином, университет Ла Лагуна, Испания[40].

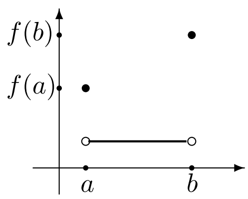
ходимости интеграла в предыдущей задаче.— *Прим. перев.*
[40]Alejandro S. Gonzalez-Martin, University La Laguna, Spain.

Дополнение: контрпримеры в обучении математике

Прежде всего приведу пример из своей педагогической практики[41]. Студентам было предложено следующее утверждение (утверждение 3.14).

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на промежутке $(a;b)$, то всякое число m, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, является значением этой функции.

Вся разница между утверждением 3.14 и теоремой о промежуточном значении состоит в том, что в этой теореме предполагается, что функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда как в формулировке утверждения 3.14 говорится о непрерывности функции на интервале $(a;b)$. Когда студентам было предложено опровергнуть сформулированное утверждение, то они обычно рисовали что-то вроде



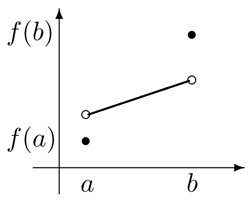
[41]Данный раздел написан на основе материала, содержащегося в статьях: N. Gruenwald, S. Klymchuk. Using Counter-Examples in Teaching Calculus: Students' Attitudes. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 2003, vol. 40, No. 2, pp. 33—41 и S. Klymchuk. Counter-Examples in Teaching/Learning of Calculus: Students' Performance. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 2005, vol. 42, No. 1, pp. 31—38.

Для того чтобы обсуждение продолжилось и появились новые контрпримеры, можно теперь предложить студентам построить графики функций, для которых:

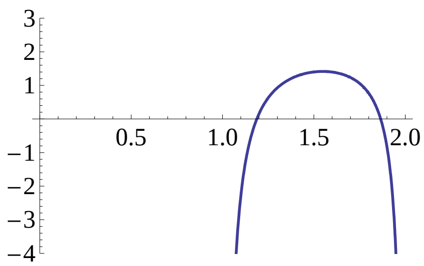
а) *существует единственное число между $f(a)$ и $f(b)$, являющееся значением этой функции*;

б) *между $f(a)$ и $f(b)$ существует бесконечно много чисел, являющихся значением этой функции, однако не каждое лежащее между $f(a)$ и $f(b)$ число будет ее значением.*

К примеру, решением последнего задания будет функция со следующим графиком



А далее можно предложить студентам найти функции, также являющиеся контрпримерами к сформулированным утверждениям, но на графиках которых не будет «белых кружков» (см. рис.).



Для многих студентов подобные постановки заданий являются новыми, неожиданными и интересными. Дело в том, что после обучения математическому анализу в школе большинство из них приходит в университет со стойким представлением о том, что изучение математического анализа сводится к разнообразным манипуляциям с выражениями, к технике их преобразований. При этом они привыкли не обращать внимания на условия теорем, на свойства функций, с которыми они имеют дело. И зачастую это не вина самих студентов. Для того чтобы проиллюстрировать этот факт, приведу формулировку задания письменного выпускного экзамена (являющегося также вступительным в университет).

Покажите, что уравнение $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ *имеет решение, лежащее между* 1 *и* 2.
Образец решения. Положим $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$. Так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 1{,}58 > 0$, график этой функции пересечет ось абсцисс между точками 1 и 2.

Приведенное решение было представлено экзаменаторам в качестве образца решения, заслуживающего быть оцененным полным баллом. Ясно, что в этой задаче речь идет о применении теоремы Больцано—Коши о нулях, в которой на функцию накладываются **два** условия. Во-первых, она должна быть непрерывной на отрезке $[a; b]$, и, во-вторых, должно выполняться неравенство $f(a)f(b) < 0$. В решении проверяется лишь второе условие, а первое игнорируется как вроде бы «несущественное». Подчеркну, что речь идет о задаче письменного экзамена, при решении которой требовалось не только привести ответ, но и записать ее подробное решение. То, что решение, в котором при применении теоремы Больцано—Коши не производится проверка выполнения условия непрерывности функции, заслуживает быть оцененным высшим баллом, очень опасно. Учащимся тем самым дают понять, что преобразования важны, а свойства функций — нет.

Несколько лет назад я предложил нескольким школьникам, обучавшимся на подготовительных курсах, следующую задачу. «Докажите, что уравнение $\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1{,}5} = 0$ имеет решение на отрезке $[1; 2]$.» Каждый из них сделал одно и то же, а именно сослался на теорему о нулях, убедившись только в том, что $f(1) = -6 < 0$ и $f(2) = 14 > 0$. Трудно осуждать их за это, поскольку по большей части то, что они делают при изучении математики в школе, так это преобразования, вычисления и прочие технические манипуляции.

Следует заметить прежде всего, что на начальных этапах обучения, связанного с построением контрпримеров, многие студенты испытывают определенный, в том числе и психологический, дискомфорт, поскольку до того им никогда не приходилось строить контрпримеры к утверждениям. Более того, на начальном этапе они не понимают разницы между, так сказать, «доказательством» некоторого утверждения путем предъявления одного примера и опровержением утверждения через построение опять-таки одного контрпримера. Это вполне согласуется с тем, что: «студенты часто не понимают, как это можно одним примером опровергнуть некоторое утверждение. Это происходит тогда, когда они считают, что этот пример «один–единственный», не видя того, что он, наоборот, имеет общий характер [42]».

В начале 2000-х годов было проведено международное исследование, цель которого состояла в оценке эффективности педагогической стратегии, состоящей в целенаправленном использовании заданий, связанных с построением контрпримеров. В течение нескольких недель обучение 612 первокурсников из 10 университетов различных стран строилось в соответствии с этой стратегией, после чего им было предложено высказать свое отношение к подобной методике обучения. Студенты отвечали на следующие вопросы

Вопрос 1. *Чувствовали ли вы себя уверенно при построении контрпримеров?* а) Да б) Нет
Пожалуйста, сформулируйте причины, по которым вы дали ваш ответ.

Вопрос 2. *Считаете ли вы эффективным предложенный метод обучения?* а) Да б) Нет
Пожалуйста, сформулируйте причины, по которым вы дали ваш ответ.

Вопрос 3. *Хотели ли бы вы, чтобы подобные задания были включены в экзаменационную работу?* а) Да б) Нет
Пожалуйста, сформулируйте причины, по которым вы дали ваш ответ.

Статистика ответов на эти вопросы приведена в следующей таблице.

Кол-во	Вопрос 1		Вопрос 2		Вопрос 3	
	Да	Нет	Да	Нет	Да	Нет
612	116	496	563	49	196	416
100%	19%	81%	92%	8%	32%	68%

Как видно из этой таблицы, большинство (81%) студентов не были знакомы с построением контрпримеров как способом опровержения утверждений. Вот типичные комментарии, которые давали студенты, ответившие отрицательно на вопрос 1:

- я никогда ранее этого не делал;

[42] A. Selden, J. Selden. The role of examples in learning mathematics. *The Mathematical Association of America Online*: www.maa.org/t_and 1/sampler/rs_5.html.

- я вообще не был знаком с деятельностью такого рода;
- я не привык к этому методу;
- этот метод мне не знаком;
- в школе мы такого не проходили;
- я слышал об этом, но не от школьного учителя;
- мы в школе никогда не строили никаких примеров.

Большинство студентов (92%) сочло эффективным метод обучения, основанный на построении контрпримеров. Студенты, давшие положительный ответ на второй вопрос, писали, что такая деятельность:

- помогла мне глубже вдумываться в поставленные вопросы;
- дает основательное знание предмета;
- способствует большему пониманию;
- привела к тому, что я стал думать более эффективно;
- предохраняет от возможных ошибок;
- делает задачи более ясными;
- способствует появлению уверенности в себе;
- помогает усваивать полученную на занятиях информацию;
- является хорошей методикой обучения;
- заставляет точно использовать понятия и проверять условия, в которых они могут быть использованы;
- учит тебя критически мыслить;
- способствует самоконтролю;
- развивает логическое мышление, а не только вычислительные навыки;
- делает задачи более ясными;
- трудна, но интересна;

- дает возможность определить лучших студентов;
- дает возможность взглянуть на математику под другим углом;
- хороша не только по отношению к математике;
- заставляет тебя серьезно потрудиться;
- является не стандартной, а творческой.

Интересно отметить, что большинство опрошенных студентов (68%) не хотят, чтобы задания на построение контрпримеров к неверным утверждениям включались в экзаменационные работы, хотя, как было указано выше, подавляющее большинство из них считает данную методику обучения эффективной. Типичные пояснение своему отрицательному ответу на третий вопрос состояло в том, что:

- они слишком трудны;
- мы никогда ранее ими не занимались;
- они слишком часто ставят в тупик;
- у нас было недостаточно времени, чтобы мы могли уверенно решать их;
- они какие-то запутанные:
- непонятно, как их решать, в частности с чего начать;
- в таком случае моя экзаменационная оценка может понизиться.

Замечу, что последний комментарий встречался наиболее часто. К сожалению, для слишком многих студентов оценки, полученные ими на экзаменах, важнее знаний, полученных в результате обучения в университете.

Было очень интересно читать комментарии, данные теми студентами, которые ответили на этот вопрос утвердительно. Они писали, что:

- это заставляет нас думать не о деталях, а о сути используемых методов;
- построение контрпримеров демонстрирует полное понимание предмета;

- это хороший способ проверки воображения;
- подобные навыки чрезвычайно ценны;
- в таком случае мы будем более серьезно готовиться к экзаменационной работе;
- мне нравится такая деятельность, поскольку заставляет преодолевать трудности;
- такие навыки будут важны и по окончании университета.

Таким образом, результаты проведенного исследования дают основание рекомендовать разработанную педагогическую стратегию в процессе обучения (и не только обучения математике).

В заключение приведу результаты одного педагогического эксперимента, проведенного в Технологическом университете (Окленд, Новая Зеландия). В этом эксперименте сравнивались между собой результаты обучения двух групп студентов. Группа А (экспериментальная) состояла из 16 студентов, группа Б (контрольная) — из 11 студентов. В обеих группа обучались студенты из Китая, все они были примерно одного возраста и с приблизительно одинаковой подготовкой по математике. По учебному плану три раза в неделю они ходили на часовые лекции и посещали одно двухчасовое практическое занятие; при этом лекции в обеих группах читал один и тот же преподаватель. Разница в методике обучения состояла в том, что каждую неделю (в течение 8 недель) на одной из лекций со студентами группы А в течение 5-6 минут происходило обсуждение контрпримеров (к утверждениям 1.1, 3.1, 4.4, 4.6, 4.7 и некоторым другим). Таким образом, общее (за 8 недель) время, затраченное на подобные обсуждения, составило около 45 минут.

По прошествии 8 недель студенты обеих групп сдавали промежуточный экзамен, десять заданий которого были связаны с проверкой полученных студентами технических навыков решения задач, а последнее — одиннадцатое — проверяло понимание изученных понятий и определений.

Вот пример задания 11. *Изобразите эскиз графика такой функции, что ее график является непрерывной и гладкой* (*не имеющей углов*) *кривой, однако сама эта функция не дифференцируема хотя бы в одной точке.*

Статистика результатов приведена в следующей таблице.

группа	сдали экзамен	решили задачу 11
А	93%	79%
Б	91%	45%

Полученные данные показывают, что даже малое время, затраченное на обсуждение контрпримеров, дает очень хороший результат, способствуя лучшему пониманию студентами изученных ими понятий.

Содержание