ОБУЧЕНИЕ ПОИСКУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (ФАНТАЗИИ В МАНЕРЕ ПОЙА)

О.А. Иванов

Данная работа посвящена основной задаче любого преподавания — развитию мышления учащихся. Невозможно сказать — как/откуда возникает решение трудной задачи (математической проблемы); в процессе мышления велика роль происходящих в мозгу бессознательных процессов — см., например, книгу [1]. Однако здесь мы будем исследовать вопрос об отработке лишь элементарных приемов мышления. Эта тема неоднократно появлялась на страницах журнала, и некоторые примеры, приводившиеся В. Г. Болтянским и Я. И. Груденовым в [4], автор данной статьи будет использовать для иллюстрации собственного подхода.

Вспомним три из "десяти заповедей учителя" Д. Пойя [2]:

6. *Старайтесь научить их догадываться.*

7. *Старайтесь научить их доказывать.*

10. *Пользуйтесь наводящими указаниями, но не старайтесь навязать своего мнения насильно.*

При обучении неискушенных в математике учащихся (которые привыкли решать задачи только на определенные правила) все представляет сложность. Они не понимают: что же такое — "рассуждение" (дедуктивный аспект мышления); зачем вообще нужно что-то доказывать, а кроме того не видят логических пробелов (формально-логический аспект); не то, что не могут увидеть подход к решению, а просто не понимают, что же это такое — "идея решения" (индуктивный аспект); они не привыкли рассматривать связи между задачами (ассоциативный аспект мышления). *"Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, но нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и кровь и действовали с силой инстинкта"* (Пойа и Сёге, из предисловия к книге "Задачи и теоремы из анализа"). Поэтому для отработки элементарных навыков мышления представляется естественным выделить типы таких задач, при решении которых указанные выше аспекты применяются, так сказать, в чистом виде.

Исследуем с этой точки зрения решения следующих двух задач, которые в любом сборнике будут приведены в совершенно разных разделах.*

Задача 1. *Из кучи, содержащей 1001 камень, выбросили один камень, а оставшиеся произвольно разложили на две кучи. Проделаем ту же операцию с любой из куч, содержащей более одного камня. Может ли после последовательного*

* Все приводимые примеры взяты из брошюры [3], содержащей специально отобранные автором наборы достаточно известных задач.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

применения нескольких таких операций оказаться, что все кучи состоят из трех камней?

Задача 2. *Докажите, что многочлен* x^3-19x^2+9x-2 *не имеет отрицательных корней.*

Решение задачи 1. Предположим, что такое возможно и мы получили k куч по три камня в каждой. Поскольку вначале куча была одна, то мы проделали операцию $k-1$ раз, значит, мы выбросили $k-1$ камень. Следовательно, $1001 = 3k + (k-1) = 4k-1$, что не имеет места.

Решение задачи 2. Покажем, что отрицательное число не может быть корнем данного многочлена. Действительно, если $a < 0$, то $a^3 < 0$, $-19a^2 < 0$, $9a < 0$, поэтому $a^3 - 19a^2 + 9a - 2 < 0$.

Я надеюсь, что читатель согласится с тем, что подходы к решениям вполне схожи: ключевой момент обоих решений — это доказательство от противного, после сделанного предположения идет естественная последовательность рассуждений. Тематика же задач — игры (делимость), многочлены — здесь абсолютно ни при чем.

Теперь поместим рядом с задачей 2 вот такую.

Задача 3. *Действительные числа* a, b, c *таковы, что* $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$. *Докажите, что все эти числа положительны.*

У тех, кто знаком с обобщенными формулами Виета, должна сразу сработать следующая ассоциация: если рассмотреть кубический многочлен с корнями a, b, c, то из условий на эти числа следует, что знаки коэффициентов такого многочлена чередуются. Чередование знаков коэффициентов — это единственное, что было существенно при решении предыдущей задачи! Таким образом, к этому многочлену применимо использованное при решении задачи 2 рассуждение. Значит его корни, т.е. числа a, b, c, положительны.

Конечно, последняя задача допускает и другое решение. Автор же хотел здесь продемонстрировать, каким образом можно приучать школьников сопоставлять задачи и связывать их друг с другом посредством некоторых третьих фактов.

Перед тем, как перейти к изложению основного содержания данной статьи, замечу, что последний из описываемых типов принадлежит математическому фольклору, а часть из них появлялась и у других авторов (см. [5-7], а также [2, с. 331-332]). Непосредственным стимулом к написанию этой работы послужило то, что ее тематика стала особенно актуальной в связи с изменениями, происходящими в системе среднего образования.

1. Первый тип — задачи “с естественным рассуждением”, их педагогическая роль состоит в том, чтобы приучить школьников проводить последовательную цепочку рассуждений (к чему сводится решение любой математической задачи). На первых порах следует отбирать задачи, в которых нет сколь-либо необычных математических идей, такие как простейшие логические и комбинаторные задачи, математические ребусы.

Два конкретных примера (см. также [4, примеры 2 и 5]).

Задача 4. *В трех урнах лежат два белых, два черных, белый и черный шары, а табличка на каждой из них не соответствует ее содержимому. Какое наименьшее число шаров и из каких урн необходимо вынуть, чтобы после этого с уверенностью развесить таблички верно?*

Задача 5. *На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитянин в присутствии другого островитянина говорит, что по крайней мере один из них лжец. Кто они?*

Ответы: к задаче 4 — нужно вынуть один шар из урны, на которой имеется табличка *белый, черный*; к задаче 5 — говорит рыцарь в присутствии лжеца.

2. Следующий тип — "задачи-ловушки", в которых напрашивающийся ответ является неверным. Их роль — показать необходимость доказательств (рассуждений).

Задача 6. *100 кг свежесобранных грибов имели влажность 99%. Через 2 дня их влажность составляла 98%. Сколько стали весить грибы?*

Задача 7. *Какова наименьшая площадь круга, содержащего треугольник со сторонами 14, 10 и 9 см?*

Первая из этих задач комментария не требует. По поводу второй: естественный ответ — площадь описанного круга — неверен. Поскольку данный треугольник является тупоугольным, то он содержится в круге, построенном на стороне длины 14 см, как на диаметре. Поэтому правильный ответ — 49π см^2.

3. Следующая ступенька в развитии дедуктивной стороны мышления связана с так называемыми "очевидными задачами", в которых на первый взгляд ответ абсолютно очевиден (и верен), но на первых порах совершенно неясно, как же его получить. Примеры:

Задача 8. *Решите систему* $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x^{18} + y^{18} = 1. \end{cases}$

Задача 9. *Средняя линия четырехугольника равна полусумме непересекающихся с ней сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция.*

Решение задачи 8. Если $x^4 + y^4 = 1$, то $x^4 \leqslant 1$, $y^4 \leqslant 1$, откуда $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Предположим, что $0 < |x| < 1$, тогда $x^{18} < x^4$, $y^{18} \leqslant y^4$, поэтому $x^{18} + y^{18} < x^4 + y^4 = 1$. Остающиеся значения для переменных системы — $x = \pm 1; y = 0$ и $x = 0; y = \pm 1$ — и являются ее решениями.

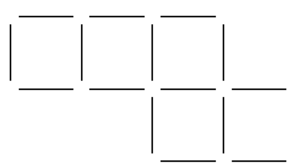
Вторая из приведенных задач более известна. Заметим по ее поводу то, что, во-первых, существует простое решение, использующее вектора, а, во-вторых, частая логическая ошибка состоит в том, что в решении этой задачи учащиеся ссылаются на теорему о средней линии трапеции (а из справедливости прямой теоремы отнюдь не следует, что верна обратная!), что сближает эту задачу с задачами предыдущего типа.

4. С этого пункта мы переходим от формально-логических и дедуктивных моментов в решении задач к индуктивным, которые уже непосредственно связаны с поиском идеи. Наша цель — помочь учащимся в этом.

Обратимся к десятой заповеди Пойа. Один из древних и действенных методов обучения — это "метод Сократа", т.е. диалог с аудиторией. Искусство наставника состоит в том, чтобы задавать учащимся такие вопросы, которые они должны бы задавать сами себе. Безусловно, такой вопрос можно поставить практически к любой задаче, однако желательно, чтобы он не был прямой подсказкой.

Итак, четвертый тип задач — это "задачи с внутренним вопросом".

Задача 10. *Переложите две спички из числа имеющихся (см. рисунок) так, чтобы образовалась фигура, состоящая из четырех одинаковых квадратов.*



Задача 11. *Сколько различных делителей имеет число 3600?*

Вопрос к задаче 10: *Кто уже подсчитал, сколько всего имеется спичек?* Далее прямое рассуждение: спичек всего 16, значит квадраты должны иметь только общие вершины! Теперь уже нетрудно понять, что они должны располагаться в шахматном порядке, и увидеть — какие же спички надо переложить.

Вопрос к задаче 11: *Какие простые делители имеет данное число?* Теперь: $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, применяем простые комбинаторные правила: двойка может входить в делитель со степенью от 0 до 4, т.е. имеется 5 вариантов, для тройки и пятерки их по 3, поэтому всего имеется $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ делителей.

5. "Задачи-загадки" (см. также [4, пример 4]).

Задача 12. *Вычислите* $1988\frac{19}{6891} \cdot 1987\frac{19}{6891} - 1989\frac{19}{6891} \cdot 1986\frac{19}{6891}$.

Задача 13. *Кащей Бессмертный загадывает три цифры a, b, c. Иван Царевич называет три числа x, y, z, после чего Кащей сообщает ему сумму $ax + by + cz$. Иван должен угадать задуманные цифры, иначе ему не отдадут Василису Прекрасную и вдобавок отрубят голову. Как же Царевичу спастись?*

Сформулированные задачи имеют математическое содержание, задача учеников — его осознать. Решение первой из них основано на тождестве $a(a - 1) - (a + 1)(a - 2) = 2$. Ключ ко второй — понятие десятичной записи числа, именно: если Иван назовет числа 1, 10, 100, а Кащей скажет, к примеру, что сумма равна "трехстам восемьдесяти пяти", то задуманные им цифры — это 3, 8, 5.

6. Следующий тип задач — это "задачи на ассоциацию".

Как известно из нейрофизиологических исследований, интеллект человека во многом определяется числом задействованных связей между клетками его мозга. Естественно, что для развития математического мышления необходимо устанавливать связи между фактами, понятиями, задачами, etc, причем устойчивость возникшей связи зависит от того, насколько самостоятельно она была открыта. *"То, что вы были вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы сами можете снова воспользоваться, когда в этом* *возникнет необходимость*" (Г. Лихтенберг). Решения задач часто возникают по ассоциации с чем-то известным, подчеркнем, не по аналогии, а "по ассоциации". Помните: задача 3, стоявшая рядом с задачей 2, указала нам на теорему Виета.

Задача 14. *Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами a и b до центра квадрата, построенного вне треугольника на его гипотенузе.*

Задача 15. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2x^2 - 1) = 1. \end{cases}$

Рисунок к задаче 14 так и просит, чтобы его достроили до рисунка, известного по доказательству теоремы Пифагора. Очевидно (но как это доказать!), что центры двух изображенных на этом рисунке квадратов совпадают, поэтому искомое расстояние равно $(a + b)/\sqrt{2}$.

Первое уравнение системы задачи 15 подсказывает, что целесообразно сделать замену $x = \cos t$, $y = \sin t$, а те, кто обладает навыками преобразований тригонометрических выражений, сразу увидят, что в результате этой замены второе уравнений приобретет вид $\sin 4t = 1$, так что оно решается без труда (см. также [4, пример 1]).

Заметим, что появление нужной ассоциации во многом зависит от контекста, поэтому почти любую задачу можно считать принадлежащей этому типу, если ее надлежащим образом расположить (см. также [4, пример 12]), здесь мы подходим к использованию серий задач, об этом речь пойдет далее).

7. Последний из описываемых типов задач — так называемые "ключевые". Начнем с одного хорошо известного примера.

Задача 16. *Имеется пирамида, составленная из 10 колец разного диаметра, надетых на палочку так, что меньшее кольцо всегда лежит на большем. Требуется переложить эти кольца на другую палочку (используя вспомогательную третью); при этом запрещено класть большее кольцо на меньшее. Какое наименьшее число перекладываний для этого потребуется?*

Ответ: 1023 перекладывания. Это так называемая "задача о ханойской башне", одна из лучших задач на индукционный метод рассуждения, являющаяся ключевой для понимания идеи этого метода. Будем решать ее в общем случае, когда пирамидка состоит из n колец. Если $n = 1$, то нужно одно перекладывание, если $n = 2$ — три, при $n = 3$ — семь перекладываний. Случай $n = 4$ разбирать таким же образом не слишком приятно. Однако, если мы заметим, что для того, чтобы переложить нижнее кольцо, сначала нужно снять с него три верхних (на что, как мы видели, требуется 7 перекладываний), будет понятно, что в рассматриваемом случае нужно будет произвести $7+1+7$ операций. Из приведенного разбора сразу видна рекуррентная формула для числа p_n перекладываний пирамидки из n колец: $p_n = 2p_{n-1}+1$! Вычисляя по этой формуле, получаем числа 31, 63, 123, т.е. числа вида 2^n-1. Доказать по индукции формулу $p_n = 2^n - 1$ не составляет никакого труда.

Еще один пример.

Задача 17. *Может ли быть, чтобы любых двух жителей Китая можно было различить по наборам их зубов?*

Эта задача обладает многими достоинствами. Первое из них сближает ее с "задачами-ловушками": поскольку должен быть всего один беззубый, 32 человека с одним зубом во рту, один с полным набором зубов, то на первый взгляд ответ на поставленный вопрос — отрицательный. Второе — фраза *"А сколько вариантов для одного зуба"* (внутренний вопрос к задаче) сразу приводит к решению: зубов 32, для каждого из них 2 варианта, поэтому всего имеется $2^{32} > 4 \cdot 10^9$ вариантов, что явно больше, чем число жителей Китая.

Наконец, если подсчитать число вариантов другим способом, то мы получим тождество $\sum\limits_{k=0}^{32} C_{32}^k = 2^{32}$, обобщить которое не представляет труда.

Каковы особенности разобранных задач, что же такое — "ключевая задача"? Такая задача должна обладать яркой и запоминающейся формулировкой (в которой используются только необходимые понятия), глубоким математическим содержанием, в ее решении не должно быть лишних деталей, которые только затемняют общую картину. Возникающие в процессе обсуждения шаги этого решения должны казаться учащимся совершенно естественными. Принося читателю извинения за тавтологию, все-таки скажем, что подобная задача является "ключом к пониманию определенной идеи".

Следуя устоявшейся терминологии, будем называть опорными задачи, несущие основную идейную нагрузку в образовательном процессе. Автор пришел к приведенной классификации опорных задач, проанализировав свой опыт преподавания в математических кружках. Ключевым моментом этого анализа был тот, когда вдруг стало очевидным различие в педагогической роли той или иной опорной задачи в процессе обучения. Хороший преподаватель инстинктивно ощущает такое различие, но и ему будет полезно составить, так сказать, "блок-схему" своей работы с данным классом, отметив на ней ступеньки, по которым он будут двигаться к основной цели, и подобрав задачи, которые помогут его ученикам успешно эти ступеньки преодолеть. Читателю данной статьи целесообразно обратиться к своему опыту и выделить задачи, которые он считает опорными при обучении "искусству мыслить".

Немалую роль в процессе обучения играет последовательное решение учащимися наборов (серий) задач. Школьные учебники в основном содержат серии "на данное правило (формулу)", а как известно всякому преподавателю и подтверждено психолого-педагогическими исследованиями (см., например, [8]), решение однотипных задач не способствует развитию мышления.

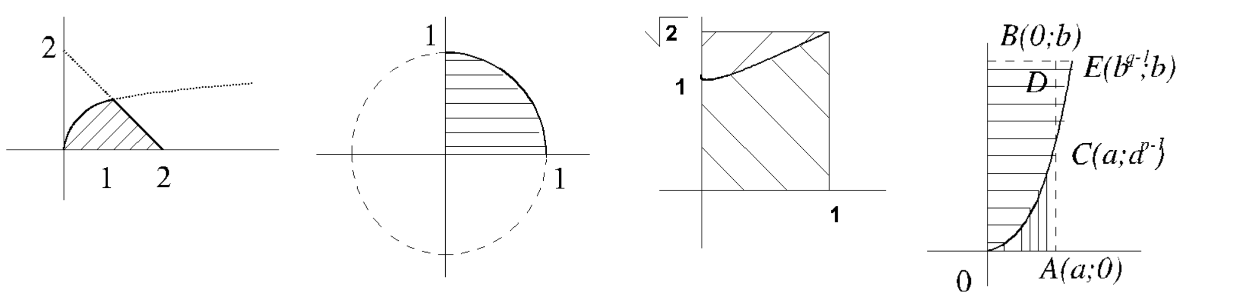
Большинство книг, посвященных задачам математических кружков, состоят из серий "на данный метод (идею)" или "ступеньки решения (обобщения)" (как представляется автору, эти названия достаточно точно отражают сущность этих серий). Однако с точки зрения основной цели обучения недостаточно использовать только серии указанных типов.

Вопросы классификации серий задач — тема отдельной статьи. А в данной автор хотел бы ограничиться таким примером, в которой решение (или просто формулировка) задачи дает подсказку к решению следующей за ней задачи этой серии.

1. Найдите площадь подграфика функции $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \in [0;1], \\ 2-x, x \in [1;2]. \end{cases}$
2. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.
3. Вычислите сумму $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^5}\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt[5]{x^2-1}\,dx$, $(a,b>0)$.
4. Докажите неравенство $\int\limits_0^a x^{p-1} + \int\limits_0^b x^{q-1} \geqslant ab$, где $a,b,p,q>0$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Решение первой задачи стандартно: поскольку площадь подграфика неотрицательной функции равна определенному интегралу от нее по соответствующему промежутку, то оно сводится к простому к простому вычислению. Небольшая тонкость состоит в том, что следует разбить интеграл по данному в задаче отрезку $[0;2]$ на два (рисунок a).

В задаче 2 интеграл вообще не требует вычислений, поскольку следует сделать ход, обратный примененному в предыдущей. Именно: так как кривая $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$, является четвертью стандартной единичной окружности, то искомый интеграл равен четверти площади единичного круга, т.е. $\pi/2$ (рисунок $б$).



Обе эти задачи связывают определенный интеграл с площадью, а это – ключ к решению третьей задачи данной серии. Дополнительная идея состоит в том, что подинтегральные функции являются взаимно обратными. Следовательно сумма данных в этой задаче интегралов равна сумме площадей заштрихованных на рисунке $в$ частей, объединение которых является прямоугольником со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

Решение последней задачи данной серии аналогично решению задачи 3, так как из данного соотношения между числами p и q следует, что подинтегральные функции являются взаимно обратными.

Наконец, проведя интегрировавание в левой части неравенства четвертой задачи, мы получим классическое неравенство — неравенство Юнга

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

Предвидя высказывание — “Да кто же такое поймет!”, возражу: умение воспринимать ход мысли автора и “читать между строк” — важная составляющая общего образования, которую можно воспитать в процессе обучения математике. Как этого достичь — об этом в следующей статье.

В заключение не могу не привести одно воспоминание личного характера, ярко демонстрирующее непредсказуемость человеческого мышления.

Как-то раз по дороге домой я решал некую систему алгебраических уравнений. Поглядев на мои безуспешные попытки, коллега, предложивший мне эту систему, произнес: *“Ты должен ее решить, поскольку я знаю, какую школу ты закончил”*. Не знаю, что же там произошло в моем мозгу, но решение было найдено через минуту!

Задачи для самостоятельного анализа

1. Проверьте, что $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$ и приведите еще несколько подобных примеров.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $xy = x + y$.

3. Папа купил арбуз диаметром 20 см, толщина корки которого составляла 1 см. Какой процент стоимости этого арбуза оказался истраченным на корку?

4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

5. Докажите, что если суммы плоских углов при каждой из четырех вершин треугольной пирамиды равны 180°, то все грани этой пирамиды суть равные друг другу треугольники.

Литература

1. Ж. Адамар, Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970.
2. Д. Пойа, Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
3. О.А. Иванов, Сто олимпиадных задач для старшеклассников // MATHESIS. Математика, вып. 2, Академическая гимназия СПбГУ, СПбГУ, 1994.
4. В.Г. Болтянский, Я.И. Груденов, Как учить поиску решения задач // Математика в школе, 1, 1988. С. 8-14.
5. А.М. Гольман, Л.И. Звавич, Учебные серии на уроках математики // Математика в школе, 5, 1990. С. 19-22.
6. О.С. Медведева, Развитие математических способностей учащихся // Математика в школе, 1, 1990. С. 49-51.
7. И. Павленкова, К вопросу о задачах-“ловушках” при обучении математике // “Подготовка преподавателя математики и информатики для высшей и средней школы”, Тезисы докладов, ч.2. М.: МПГУ, 1994. С. 3-4.
8. Я.И. Груденов, А.М. Середа, В.И. Середа, Психология подсказывает методике // Математика в школе, 6, 1990. С. 36-37.