ОЛИМПИАДА ЭЙЛЕРА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

В.Б. Некрасов,
СПб. АППО, (С-Петербург),
e-mail: vbnekrasov@mail.ru

Г.И. Вольфсон,
школа № 366, (С-Петербург),
e-mail: georgij.volfson@gmail.com

В.М. Гольховой,
С-З ЗМШ, (С-Петербург),
e-mail: vmg@vg3980.spb.edu

Л.А. Жигулев,
СПб. АППО, (С-Петербург),
e-mail: kmospb@yandex.ru

О.А. Иванов,
СПбГУ, (С-Петербург),
e-mail: oleg_ivanov2002@mail.ru

В работе приводятся условия, решения, комментарии к условиям и решениям задач олимпиады Эйлера учителей математики Санкт-Петербурга.

Ключевые слова: олимпиада учителей, повышение квалификации, решение задач.

В 2007 году, в год 300-летия со дня рождения Леонарда Эйлера, по инициативе профессора матмеха СПбГУ С.В. Востокова – президента Фонда Эйлера – была проведена олимпиада для учителей математики Санкт-Петербурга. Олимпиада Эйлера состоит из двух туров: заочного, проводимого весной, и очного тура, проходящего осенью того же года. Победителем первой олимпиады Эйлера стал Георгий Игоревич Вольфсон – учитель математики гимназии № 261 (который затем был включен в состав жюри олимпиады). Победителями последующих олимпиад стали: Иванова Татьяна Юрьевна – учитель математики физико-математического лицея № 30 (2008 и 2009 годы) и Гундорова Людмила Павловна – учитель математики школы № 534 (2010 год).

Подобные олимпиады предоставляют учителям математики возможность проявить те качества, которыми должен обладать современный учитель: глубокое понимание фактов, идей, методов и структуры школьного курса математики; способность решать школьные задачи вплоть до задач олимпиадного характера; способность оценивать решения задач, предложенных учениками; знание литературы, дающее возможность проведения в школе факультативных занятий и индивидуальной работы; умение лаконично и логически ясно записать проводимое при решении задачи рассуждение.

Традиционно задачи заочного тура олимпиады разбиваются на два блока: «математический» (задачи 1–7 – задачи для решения) и «методический» (задания 8–12, моделирующие работу учителя). Приведем условия и прокомментируем задачи заочного тура 5-й Олимпиады Эйлера (их решения приведены в конце статьи). С условиями и решениями задач олимпиад других лет можно ознакомиться на сайте Фонда Эйлера www.euler-foundation.org.

1. Найдите число натуральных корней уравнения $\left[\frac{x}{2010}\right]=\left[\frac{x}{2011}\right]+1.$

2. Решите уравнение
$$2\log_3(\mathrm{ctg}x) = \log_2(\cos x).$$

3. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a + b + c = 1$.

Докажите, что
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}.$$

4. Две непересекающиеся окружности радиусов r_1 и r_2 расположены так, что одна из их общих внутренних касательных перпендикулярна одной из их общих внешних касательных. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и третьей общей касательной данных окружностей.

5. Найдите все натуральные n такие, что число n^4+64^n – составное.

6. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер тетраэдра, два противоположных ребра которого равны a и b, а все остальные ребра равны между собой.

7. Функция $f(x)$ непрерывна, положительна и $f(x+1)=f(x)$ при всех $x\in R$.

а) Докажите, что $\int\limits_0^1\frac{f(x+0,5)}{f(x)}\,dx\ge 1.$

б) Найдите все значения α такие, что
$$\int\limits_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\,dx\ge 1.$$

Ниже приводятся решения двух задач (№ 8, 9). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Решите уравнение $\frac{3}{\log_2 x}=4x-5.$

Ответ: $\{2\}$.

Решение. Ясно, что $x = 2$ – решение. Функция $y = \log_2 x$ – возрастающая, значит, $y=\frac{3}{\log_2 x}$ – функция убывающая. Так как $y = 4x - 5$ – функция возрастающая, то уравнение $\frac{3}{\log_2 x}=4x-5$ имеет не более одного корня.

9. Из двух групп лыжников общей численностью 100 человек составили сборную команду из 15 человек. Первая группа выделила $p\%$ своего состава, а вторая – 10% своего состава. Сколько всего лыжников в каждой группе?

Решение. Обозначим через x число лыжников в первой группе, а через y – число лыжников во второй группе. Тогда
$$\begin{cases}x+y=100\\ px+10y=1500\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{500}{p-100}\\ y=\dfrac{100(p-15)}{p-10},\end{cases}$$
где $15 < p < 100$.

Поскольку x – целое число, то $\frac{500}{p-100}$ – также целое число, следовательно, число $p - 10$ является делителем 500. Перебором находим ответ:

p	x	y
20	50	50
35	20	80
60	10	90

Решите задачи № 10, 11, 12 возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных вами способов решения в школьном курсе математики.

10. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b построен квадрат $ABDE$ в той полуплоскости, которой не принадлежит треугольник ABC. Найдите расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата.

11. Решите уравнение

$$27^x - 7\sqrt[3]{7\cdot 3^x + 6} = 6.$$

12. Докажите неравенство $P > 4R$, где P – периметр, а R – радиус описанной окружности остроугольного треугольника.

Все, что надо сделать при решении задачи 1 – это провести точное рассуждение. Сложность в том, что все решения перечислить невозможно – их слишком много: наименьшим из них является число $x = 2010$, а наибольшим – число $x = 4019 \cdot 2011 = 8\,082\,209$, и его-то найти непросто.

Задача 2 достаточно стандартна, но ее решение должно основываться на *исследовании функций*, поскольку она существенным образом «неалгебраична». Переход к уравнению $f(x) = g(x)$, в котором одна из функций – возрастающая, тогда как другая – убывающая, можно осуществить многими способами.

Для решения задачи 3 вначале надо преобразовать данное неравенство, а потом использовать стандартные неравенства между средними.

Задача 4 аналогична задаче, разобранной в книге [3] (пример 7 на с. 195) и напоминает задачу С4 из вариантов ЕГЭ по математике тем, что в ней имеются два варианта расположения третьей касательной.

Для успешного (и короткого) решения задачи 5 полезно было знать (известное) разложение на множители алгебраического выражения $x^4 + 4y^4$.

О задаче 6: геометрия всегда сложна – особенно сложно правильно обосновать проводимые вычисления, какими бы короткими они ни были.

Особняком стоит задача 7. Во-первых, в ней два пункта, каждый из которых оценивался отдельно. Конечно, сложность пункта б) неизмеримо выше, чем сложность пункта а). С другой стороны, эта задача имеется в учебной литературе – к примеру, она приведена на с. 73 книги [2].

Понятен методический смысл заданий 8 и 9: учитель должен уметь «локализовать» ошибку, а также ясно и кратко сформулировать – в чем она заключается. В обоих приведенных в качестве решений рассуждениях имелся логический пробел. В задании 8 он был связан с вроде бы «очевидно верным» фактом, в задании 9 – с неявным необоснованным предположением.

Смысл заданий 10–12 состоит в том, чтобы «заставить» учителя использовать разные подходы при решении задач, например, для иллюстрации различных математических идей. Сами эти задачи достаточно известны. Задача 10 – «фольклорная», задача 11 стандартна, задача 12 – это задача 93 из книги [4], однако там приведено только одно ее решение, другие надо еще найти.

Задачи очного тура менее техничны, но похожи идейно. Приведем условия и решения задач очного тура 3-й олимпиады.

1. Решите уравнение $\dfrac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$ (здесь x, y и z – некоторые цифры).

Р е ш е н и е. Умножив обе части данного уравнения на $1000(x + y + z)$, получаем $\overline{xyz}\cdot(x+y+z) = 1000$. Так как $x + y + z < 30$, то $\overline{xyz} > 30$. Число 1000 имеет только два двузначных делителя, удовлетворяющих этому условию – 40 и 50. Кроме того, число 1000 имеет ровно пять натуральных трехзначных делителей: 100, 125, 200, 250 и 500. Данному уравнению удовлетворяет только тройка (1; 2; 5).

2. Докажите, что если $0 < a < b$, то

$$2ab\ln\frac{b}{a} < b^2 - a^2.$$

Доказательство 1. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$ на $(0; +\infty)$. Так как она является выпуклой вниз, то площадь ее подграфика на отрезке $[a; b]$ меньше, чем площадь трапеции с основаниями $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{b}$ и высотой $b - a$ (рис. 1).

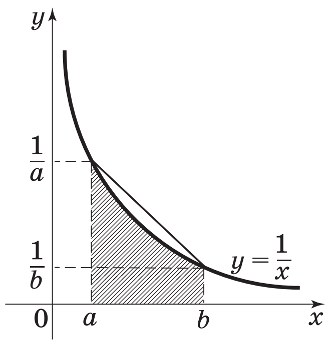

Рис. 1

Поэтому $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx < \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}(b-a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln x\Big|_a^b < \frac{b^2-a^2}{2ab} \Leftrightarrow 2ab\ln\frac{b}{a} < b^2 - a^2.$$

Доказательство 2. Разделим обе части неравенства $2ab\ln\dfrac{b}{a} < b^2 - a^2$ на a^2 и сделаем замену $t = \dfrac{b}{a} > 1$. Пусть $f(x) = t^2 - 2t\ln t - 1$. Докажем, что $f(t) > 0$ при $t > 1$. Имеем $f(1) = 0$, $f'(t) = 2t - 2\ln t - 2$, $f'(1) = 0$, $f''(t) = 2 - \dfrac{2}{t} > 0$ при $t > 1$. Значит, $f'(t)$ возрастает при $t > 1$, а так как $f'(1) = 0$, то $f'(1) > 0$, при $t > 1$. Следовательно, $f(t)$ возрастает при $t > 1$. Но $f(1) = 0$, значит, $f(t) > 0$ при $t > 1$.

3. Известно, что существуют такие числа $\alpha \neq 0$ и β, что $f(x + \alpha) = f(x) + \beta$ при всех $x \in R$. Докажите, что функцию $f(x)$ можно представить как сумму линейной функции и периодической функции.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \dfrac{\beta}{\alpha}x$, $x \in R$.

Так как $g(x+\alpha) = f(x+\alpha) - \dfrac{\beta}{\alpha}(x+\alpha) = f(x) + \beta - \dfrac{\beta}{\alpha}x - \beta = f(x) - \dfrac{\beta}{\alpha}x = g(x)$ для любого $x \in R$, то функция $g(x)$ является α-периодической. Таким образом, функция $f(x)$ является суммой α-периодической функции $g(x)$ и линейной функции $\dfrac{\beta}{\alpha}x$.

4. Радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника равны соответственно 2, 3 и 6 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Р е ш е н и е. Пусть a, b и c – длины сторон данного треугольника, S – площадь этого треугольника, p – его полупериметр, r – радиус вписанной окружности, а $r_a = 2$, $r_b = 3$, $r_c = 6$ – радиусы его трех вневписанных окружностей. Воспользовавшись известными соотношениями $S = pr$, $S = (p - a)r_a$, $S = (p - b)r_b$, $S = (p - c)r_c$, получаем

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \\ = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r},$$

откуда $r = 1$.

5. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ABD, выходящие из вершины A, в отношениях 1 : 2, 1 : 1 и 1 : 2 (считая от точки A). Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит данную пирамиду.

Р е ш е н и е*. Пусть $ABCD$ – данный тетраэдр, AK, AM, AN – медианы его граней ABC, ACD и ABD, выходящие из

* Другое (векторное) решение этой задачи см. в книге [1] (задача 9 на с. 62).

вершины A, плоскость PQR пересекает эти медианы в точках E, F и G соответственно (рис. 2).

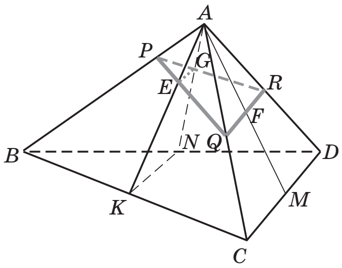

Рис. 2

Так как $AE : EK = AG : GN$, то $EG \parallel KN$. В свою очередь, $KN \parallel CD$. Значит, $EG \parallel CD$ и, следовательно, $EG \parallel (ACD)$. Следовательно, плоскость PQR, содержащая прямую EG, пересекает плоскость ACD по прямой QR, параллельной EG, а, значит, $QR \parallel CD$. Поскольку при этом QR проходит через середину F медианы AM, точки Q и R – середины отрезков AC и AD.

Пусть медиана CT треугольника ABC пересекает медиану AK в точке S, а сторону AB в точке T (рис. 3).

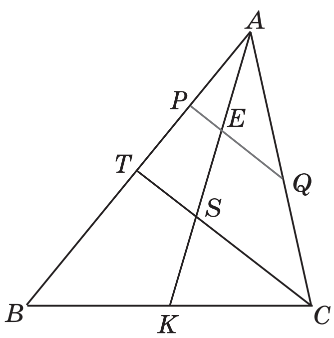

Рис. 3

Тогда $AS = \dfrac{2}{3}AK$, и так как $AE = \dfrac{1}{3}AK$, то точка E – середина отрезка AS. Поскольку точка Q – середина AC, точка P – середина отрезка AT и $AP : AB = 1 : 4$. Значит, ребра тетраэдра делятся плоскостью PQR в отношении $1 : 4$, $1 : 2$, $1 : 2$, следовательно, $\dfrac{V_{APQR}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AP \cdot AQ \cdot AR}{AB \cdot AC \cdot AD} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{1}{16}$. Поэтому $\dfrac{V_{APQR}}{V_{BCDPQR}} = \dfrac{1}{15}$.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Задача. Найдите множество значений функции $f(x) = x + \dfrac{2}{x^2}$ при $x > 0$.

Р е ш е н и е. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел справедливо неравенство $x + \dfrac{2}{x^2} \geq \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$. Поскольку число x может быть выбрано сколь угодно большим, то промежуток $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}; +\infty\right)$ содержит сколь угодно малые положительные числа, откуда мы и получаем ответ: множеством значений данной функции является луч $(0; +\infty)$.

Комментарий. Все, что следует из этого решения, так это только то, что все значения данной функции при $x > 0$ положительны – что и так очевидно.

7. Решите задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных вами способов решения в школьном курсе математики.

Найдите множество значений функции

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{6x - 3x^2}.$$

Область определения данной функции – отрезок $[0; 2]$.

Р е ш е н и е 1. Имеем,

$$f'(x) = 1 + \frac{3 - 3x}{\sqrt{6x - 3x^2}},$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{6x-3x^2}=3x-3\\ 0<x<2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-8x+3=0\\ 1\le x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \quad f(0)=-1,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2, \quad f(2)=1.$$

В силу непрерывности, множеством значений функции является промежуток [–1; 2].

Тема: «Исследование функции с помощью производной».

Решение 2. Имеем,

$$f(x)=x-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(x-1)^2},$$

где $-1\le x-1\le 1$.

Пусть $x-1=\sin\alpha$, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим функцию $g(\alpha)=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$, множество значений которой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ совпадает с множеством значений функции $f(x)$. Так как $g(\alpha)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ и $-\frac{\pi}{6}\le\alpha+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$, то множество значений функции $g(\alpha)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ есть отрезок $[-1; 2]$.

Тема: «Замена переменной. Тригонометрические замены».

Решение 3. Переформулируем задачу таким образом: найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=a$ имеет решение.

Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{6x-3x^2}=(a+1)-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}.$$

Так как $x\ge 0$, то $a+1\ge 0$. Для каждого значения a график функции $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ – прямая, а график функции $y=\sqrt{2x-x^2}$ – полуокружность с центром в точке $(1; 0)$ и радиусом, равным 1. Изобразим график функции $y=\sqrt{2x-x^2}$ и прямые $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ на координатной плоскости (рис. 4).

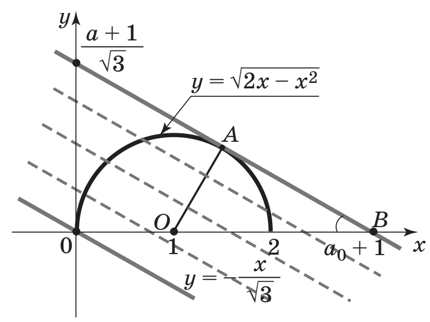

Рис. 4

Ясно, что множество искомых значений a – промежуток $[-1; a_0]$, где a_0 – значение a, при котором прямая $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ является касательной к графику $y=\sqrt{2x-x^2}$. Угловой коэффициент прямой $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a_0+1}{\sqrt{3}}$ равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, значит, $\angle ABO=30°$, и, так как $OA=1$, то $OB=(a_0+1)-1=2$, откуда $a_0=2$.

Тема: «Уравнение окружности. Задачи с параметром»*.

В заключение приведем решения задач заочного тура олимпиады-2011.

Решение задачи 1. Положим $x=2011k+d$, где $d=0, 1, \ldots, 2010$. Так как правая часть данного уравнения равна $k+1$, то число x будет решением, если $k+1\le\frac{x}{2010}<k+2$. Подставив вы-

* Еще одно (векторное) решение этой задачи приведено в книге [1] (задача 8 на с. 83).

ражение для x, получим неравенства $2010k + 2010 \le 2011k + d < 2010k + 4020$, или $2010 \le k + d < 4020$, или $2010 \le k + d < 4019$. Получаем, что для каждого из 2011 значений $d = 0, 1, \ldots, 2010$ имеются 2010 значений $k = 2010 - d, 2011 - d, \ldots, 4019 - d$, таких, что число $x = 2011k + d$ является решением уравнения. Следовательно, ответ: $2010 \cdot 2011 = 402110$ решений.

Решение задачи 2. Решения ищем на множестве $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. Заметим, прежде всего, что $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ является решением и докажем, что других решений уравнение не имеет. При помощи стандартных преобразований уравнение приводится к виду $(\cos x)^{1-\log_2\sqrt{3}} = \sin x$. Поскольку $0 < \log_2\sqrt{3} < 1$, то в левой части полученного уравнения стоит функция, убывающая на каждом из промежутков $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, а в его правой части стоит возрастающая на них функция. Следовательно, в каждом из этих промежутков уравнение имеет не более одного решения.

Решение задачи 3. Переписав левую часть исходного неравенства в виде

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ac}{b+ac} + \frac{c-ab}{c+ab} = \frac{a+bc-2bc}{a+bc} + \frac{b+ac-2ac}{b+ac} + \frac{c+ab-2ab}{c+ab},$$

перейдем к равносильному неравенству $4\left(\dfrac{bc}{a+bc} + \dfrac{ac}{b+ac} + \dfrac{ab}{c+ab}\right) \ge 3$. Поскольку по условию $a + b + c = 1$, то $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$. Аналогично, $b + ac = (a + b)(b + c)$ и $c + ab = (a + c)(b + c)$. Избавившись от знаменателей, получаем неравенство $4(ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)) \ge 3(a + b)(b + c)(a + c)$, затем, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим неравенство $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 \ge 6abc$.

Разделив теперь обе части последнего неравенства на $abc > 0$, получаем верное неравенство $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + \left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right) + \left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a}\right) \ge 6$.

Решение задачи 4. Ясно, что при $r_1 = r_2$ задача не имеет решений. Пусть для определенности $r_1 > r_2$.

Случай 1: третья общая касательная является внешней касательной. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом C (рис. 5).

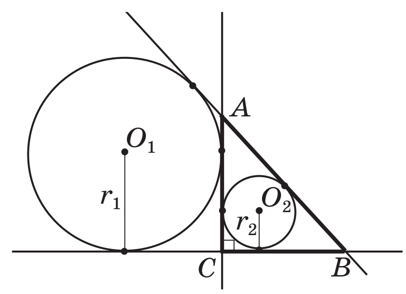

Рис. 5

Обозначим катеты BC и AC этого треугольника через a и b соответственно, гипотенузу AB – через c. Поскольку r_2 – это радиус окружности, вписанной в этот треугольник, а r_1 – радиус его вневписанной окружности, то

$$\begin{cases} a + c - b = \dfrac{2S}{r_1} \\ a + c + b = \dfrac{2S}{r_2}, \end{cases}$$

откуда следует, что $b = S\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$.

С другой стороны, так как треугольник – прямоугольный, то $r_2 = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$ и $r_1 = \dfrac{1}{2}(b + c - a)$, откуда $b = r_1 + r_2$ и

$$S=\frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1-r_2}.$$

Случай 2. Теперь предположим, что третья общая касательная является внутренней касательной (рис. 6).

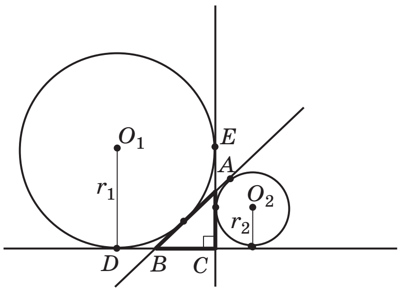

Рис. 6

В этом случае обе данные окружности являются вневписанными для рассматриваемого треугольника. Поэтому

$$\begin{cases} a+b-c=\dfrac{2S}{r_1} \\ a+c-b=\dfrac{2S}{r_2}, \end{cases}$$

откуда $a=S\left(\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_1}\right)$ и $\begin{cases} r_1=\dfrac{1}{2}(a+b+c) \\ r_2=\dfrac{1}{2}(b+c-a), \end{cases}$

откуда $a = r_1 - r_2$ и $S=\dfrac{r_1r_2(r_1-r_2)}{r_1+r_2}.$

Решение задачи 5. Напомним известное разложение на множители:

$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$. Числа x и y – натуральные, и, поскольку $x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2$, то это выражение равно 1 только, если $x = y = 1$. Следовательно, при всех других натуральных значениях этих переменных число $x^4 + 4y^4$ является составным. Ясно, что число $n^4 + 64^n$ может быть простым только, если n – нечетное число. В этом случае $64^n = 64 \cdot 8^{4k} = 4 \cdot (2 \cdot 8^k)^4$. Положив $x = n$ и $y = 2 \cdot 8$, мы получим выражение вида $x^4 + 4y^4$. Так как в нашем случае $y \geq 2$, то это число – составное. Поэтому при любом натуральном n данное число – составное.

Решение задачи 6. Пусть $ABCD$ – данный тетраэдр и $BC = a$, $AD = b$, $AB = AC = BD = CD = x$. Все ребра тетраэдра касаются сферы, следовательно, суммы противоположных ребер тетраэдра равны, откуда $x=\dfrac{a+b}{2}$. Обозначим через K и M середины ребер BC и AD (рис. 7).

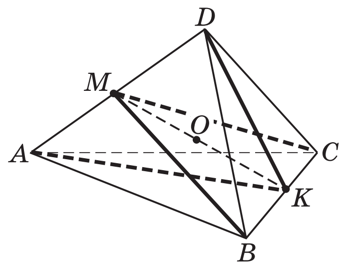

Рис. 7

Плоскости ADK и BMC перпендикулярны ребрам BC и AD соответственно, следовательно, являются плоскостями симметрии тетраэдра, а, значит, центр сферы – точка O, равноудаленная от всех ребер тетраэдра – есть середина общей высоты KM равнобедренных треугольников ADK и BMC. Окончательно получаем

$$R=MO=\frac{1}{2}\sqrt{MB^2-BK^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{2ab}}{4}.$$

Решение задачи 7. Доказательство неравенства пункта а) достаточно просто. Действительно,

$$\int_0^1 \frac{f(x+0,5)}{f(x)}dx=$$

$$= \int_0^{0,5} \frac{f(x+0,5)}{f(x)}dx + \int_{0,5}^{1} \frac{f(x+0,5)}{f(x)}dx =$$

$$= \int_0^{0,5} \frac{f(x+0,5)}{f(x)}dx + \int_0^{0,5} \frac{f(u+0,5)}{f(u)}du =$$

$$= \int_0^{0,5} \frac{f(x+0,5)}{f(x)}dx + \int_0^{0,5} \frac{f(x)}{f(x+0,5)}dx \ge \int_0^{0,5} 2dx = 1$$

в силу равенства $f(u + 1) = f(u)$ и неравенства $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$. Все, что пришлось сделать – это замену $u = x - 0,5$ в интеграле по отрезку $[0,5; 1]$. Решение задания пункта б) значительно сложнее.

О т в е т: α – произвольное действительное число.

Пусть $\alpha = \frac{1}{n}$, где n – это натуральное число. Запишем интеграл как сумму интегралов по отрезкам вида $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, в каждом из которых сделаем замену $u = x - \frac{k-1}{n}$. В результате мы получим сумму интегралов

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f\left(u+\frac{k}{n}\right)}{f\left(u+\frac{k-1}{n}\right)}du = \int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(u+\frac{k}{n}\right)}{f\left(u+\frac{k-1}{n}\right)}du.$$

В силу неравенства Коши, подынтегральное выражение не меньше

$$n \cdot \sqrt[n]{\frac{f\left(u+\frac{1}{n}\right)f\left(u+\frac{2}{n}\right)\ldots f\left(u+\frac{n}{n}\right)}{f(u)f\left(u+\frac{1}{n}\right)\ldots f\left(u+\frac{n-1}{n}\right)}} = n,$$

поскольку $f(u + 1) = f(u)$. Таким образом, исходный интеграл не меньше, чем $\int_0^{\frac{1}{n}} ndx = 1$, что и требовалось доказать. Если $\alpha = \frac{m}{n}$, то вычисления аналогичны.

Пусть α иррационально. Обозначим через α_n последовательность рациональных чисел, стремящуюся к числу α. По доказанному $\int_0^1 \frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}dx \ge 1$. Так как $\int_0^1 \frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}dx \to \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx$ в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности, то, перейдя к пределу, мы получим требуемое неравенство (см. [2, с. 125–126]).

Комментарий к заданию 8. Из того, что функция $y = \log_2 x$ является возрастающей, следует, что функция $y = \frac{3}{\log_2 x}$ является убывающей только на каждом из промежутков ее области определения, то есть на промежутках $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$, а не на всей ее области определения. Следовательно, на каждом из них данное уравнение имеет не более одного решения. Кроме $x = 2$ данное уравнение имеет еще решение $x = \frac{1}{2}$.

Комментарий к заданию 9. Натуральными являются числа x и px, тогда как число p может быть рациональным. Поэтому ответов в задаче будет больше.

Решения задачи 10.

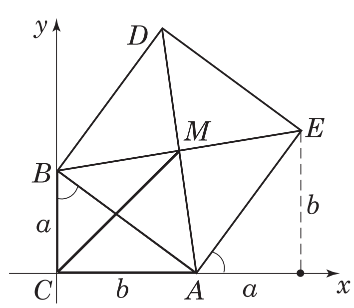

Рис. 8

Р е ш е н и е 1. Введем систему координат, в которой вершины треугольника имеют координаты: $C(0; 0)$, $A(a; 0)$ и $B(0; b)$. Точка E – одна из вершин квадрата, построенного на гипотенузе, имеет координаты $(a + b, a)$ (рис. 8), следовательно, его центр M – середина отрезка BE – имеет своими координатами пару $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. Значит, $CM = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е 2. Поскольку углы ACB и AMB являются прямыми, то точки M и C лежат на окружности, построенной на гипотенузе AB как на диаметре (рис. 8), откуда

$$MC = 2R\sin(\angle BAC + 45°) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Р е ш е н и е 3. Достроим наш рисунок до рисунка к одному из самых распространенных в школе доказательств теоремы Пифагора (рис. 9).

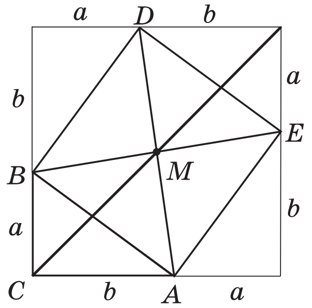

Рис. 9

Нетрудно доказать, что точка M является центром обоих квадратов. Значит, CM – это половина диагонали большого квадрата, потому $CM = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Решения задачи 11. Сделав замену $y = 3^x$, получим уравнение

$$y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} = 6.$$

Р е ш е н и е 1. Положим $z = \sqrt[3]{7y+6}$ и перейдем к системе $\begin{cases} y^3 = 7z+6 \\ z^3 = 7y+6. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим, что $y^3 - z^3 = 7(z - y)$, откуда $y = z$, поскольку $y^2 + yz + z^2 \geq 0$. В результате получаем уравнение $y^3 - 7y - 6 = 0$, корнями которого являются числа $y = -1; -2; 3$. Значит, $3^x = 3$, откуда $x = 1$.

Р е ш е н и е 2. Введем функцию

$$f(x) = \frac{x^3-6}{7}.$$

Обратная ей функция $g(x)$ задается формулой $g(x) = \sqrt[3]{7x+6}$. Уравнение $y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} = 6$ запишется в виде $f(y) = g(y)$, или $f(f(y)) = y$. Поскольку функция $f(x)$ – возрастающая, то, как известно, решениями уравнения $f(f(y)) = y$ являются решения уравнения $f(y) = y$. Дальнейшие вычисления такие же, как в предыдущем решении.

Р е ш е н и е 3. Ясно, что достаточно искать лишь неотрицательные решения уравнения $y^3 - 6 = 7\sqrt[3]{7y+6}$. Если $0 \leq y \leq 2$, то $y^3 - 6 \leq 2 < 7\sqrt[3]{6} \leq 7\sqrt[3]{7y+6}$, поэтому на этом отрезке решений нет. Пусть $y \geq 2$. Положим $f(y) = y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} - 6$. Так как

$$f'(y) = 3y^2 - \frac{49}{3\sqrt[3]{(7y+6)^2}} \geq 12 - \frac{49}{3\sqrt[3]{400}} > 0,$$

то $f(y)$ возрастает на $[2; +\infty)$, а потому не может иметь здесь более одного корня.

Решения задачи 12.

Р е ш е н и е 1. Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой $2R$. Ясно, что для него выполнено неравенство $P > 4R$.

Рассмотрим теперь остроугольный треугольник ABC. Опишем около него окружность и впишем в нее прямоугольный треугольник DBC. Так как $\angle ACB < 90°$, то луч CA пересекает отрезок BD в некоторой точке M (рис. 10).

Докажем, что $AB + AC > DB + DC$. Треугольники DMC и AMB подобны, откуда следует, что $\frac{DM}{MA} = \frac{MC}{MB} = \frac{DC}{AB} = k < 1$.

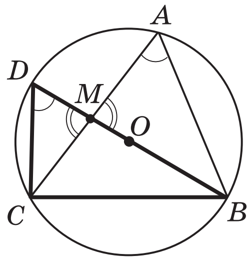

Рис. 10

Преобразуя неравенство, получаем:

$$AB + AC > DB + DC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB + AM + MC > DM + MB + DC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB + AM + kMB > kAM + MB + kAB \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-k)AB + (1-k)AM > (1-k)MB \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB + AM > MB,$$

что верно.

Решения 2, 3 основаны на теореме синусов и неравенстве $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$, справедливом в случае остроугольного треугольника. Для доказательства последнего можно использовать неравенство $\sin x > \frac{2x}{\pi}$, справедливое при $x \in \left(\frac{\pi}{2}\right)$. Иначе: раз $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\beta + \gamma = \pi - \alpha > \frac{\pi}{2} > \gamma$, откуда $\alpha - \beta < \gamma$. Значит,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$
$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) >$$
$$> 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$
$$= 1 + \cos\gamma + \sin\gamma >$$
$$> 1 + \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 2.$$

Литература

1. *Беккер Б.М., Некрасов В.Б.* Применение векторов для решения задач. – СПб.: СМИО Пресс, 2002. – 85 с.

2. *Иванов О.А.* Практикум по элементарной математике. Алгеброаналитические методы. – М.: МЦНМО, 2001. – 320 с.

3. *Некрасов В.Б.* Вся школьная математика. Самое необходимое. – СПб.: СМИО Пресс, 2011. – 274 с.

4. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум – М.: Наука, 1970. – 336 с. – (Библиотека математического кружка. Вып. 12).