О. А. Иванов

ЗАДАЧИ

ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Идеи и методы школьной математики

Подготовка к экзаменам высокого уровня сложности

Задачи вступительных экзаменов в Санкт-Петербургский государственный университет

Материалы для факультативных занятий по математике

bhv

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

bhv

О. А. Иванов

ЗАДАЧИ
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06+519.6(076.1)
ББК 32.81я72
И-20

Иванов О. А.

И-20 Задачи по алгебре и началам анализа. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 384 с.: ил.

ISBN 5-94157-739-7

Большая часть материала, включенного в эту книгу, вполне традиционна. В ней рассматриваются: уравнения и неравенства (с модулем, алгебраические, иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические, с обратными тригонометрическими функциями), текстовые задачи (на прогрессии, проценты, работу и движение). Однако метод изложения (обучения) отличается от традиционного тем, что автор уделяет основное внимание логике рассуждений, проводимых при решении задач, а не формальным схемам решений. Чтобы стали яснее идеи и методы рассуждений, в книгу включены такие разделы, как: "множества на плоскости", "множество значений функции", "построение и чтение графиков", "логарифмическая и показательная функции".

Для старшеклассников, учителей математики средних школ, преподавателей подготовительных курсов, студентов и преподавателей педагогических вузов

УДК 681.3.06+519.6(076.1)
ББК 32.81я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Олега Иванова*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

**Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 16.06.05.
Формат 60×90[1]/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 30,96.
Тираж 3000 экз. Заказ № 1116
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.**

**Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.**

**Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12**

ISBN 5-94157-739-7

Содержание

Перечень задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в СПбГУ

1. Модуль: 9, 12, 13, 14, 1.2.
2. Иррациональные уравнения и неравенства: 3, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 2.1, 2.2, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10, 2.12, 2.13, 2.14, 2.17.
3. Множества на плоскости: 6, 7, 3.2а, 3.6а, в, 3.9, 3.10, 3.12.
4. Множество значений функций: 5, 14, 4.6а-в.
5. Построение и “чтение” графиков: 2, 10, 11, 5.1а-в, 5.9.
6. Алгебраические преобразования, уравнения, системы: 5, 6.10, 6.11.
8. Тригонометрические уравнения, системы, неравенства: 3б, 5а, 6, 7, 8б, 9, 10, 15в, 8.2, 8.3, 8.4, 8.8а, 8.9, 8.11, 8.12, 8.13.
10. Составление уравнений, неравенств и систем: 1, 2, 5, 10, 12, 15, 10.4, 10.5, 10.7, 10.8, 10.9, 10.12, 10.14.
11. Логарифмическая и показательная функции: 6, 8.
12. Логарифмические и показательные уравнения, системы, неравенства: 2а, 3а, 4, 5б, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.2б, в, 12.4, 12.5, 12.6, 12.7, 12.8, 12.9, 12.10.
14. Разные задачи: 1, 2б, 3, 4, 5, 6, 12, 14, 14.1, 14.2, 14.3, 14.4, 14.7, 14.8.

Моему школьному (1966–68) учителю
Иосифу Яковлевичу Веребейчику

Предисловие

Эта книга написана для тех, кто свободно решает задачи из школьных учебников по математике и хочет научиться решать математические задачи хотя бы для того, чтобы поступить в выбранное высшее учебное заведение. Существует особый жанр задач по математике – *задачи вступительных экзаменов*. В своих лучших образцах (к которым автор относит многие задачи, предлагавшиеся на экзаменах в СПбГУ) – это не очень сложные задачи, для решения которых недостаточно знания стандартных схем, необходимо уметь *рассуждать и грамотно излагать свои мысли*. Все-таки то, что мы называем элементарной (школьной) математикой, – это часть математики, в которой важно не только знать – *что делать*, но также *как и почему*. По мнению автора, эта книга может помочь и лучше подготовиться к ЕГЭ. Ведь нельзя придумать ничего худшего при подготовке к сдаче экзамена, проводимого в форме теста, чем решать, решать и решать тестовые задания.

Эта книга написана также для учителей, по крайней мере для тех, кто работает в классах и школах с углубленным изучением математики и физики. Возможно, что именно школьные учителя станут ее самыми заинтересованными читателями, по крайней мере, автор очень на то надеется. К сожалению, даже выпускники ведущих физико-математических школ воспринимают и воспроизводят решения задач как цепочку преобразований, не видя за ними *рассуждений*. Поэтому всякая сколько-нибудь содержательная задача (на которых только и можно учить *математике*) чаще всего ставит их в тупик.

Многие задачи, включенные в эту книгу, взяты автором из вариантов вступительных экзаменов в Санкт-Петербургский государственный университет. Читатель может обратить внимание, что в некоторых разделах книги или нет таких задач, или же их совсем немного. Но не следует думать, что при изучении книги эти разделы можно читать невнимательно (или же просто опустить), совсем наоборот. Материал таких разделов, как "множество значений функции" или "построение и чтение графиков" имеет общеобразовательный характер. А для того чтобы научиться решать тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения, просто необходимо внимательно изучить разделы "тригонометрические соотношения" и "логарифмическая и показательная функции". Материал, изложенный в *разделах 13* и *15* и двух дополнениях к этой книге ("комплексные числа и многочлены" и "элементы комбинаторики и теории вероятностей"), вполне может послужить основой для факультативных занятий.

В отличие от большинства пособий для поступающих, в данной книге содержится не так много задач для самостоятельного решения. К примеру, в разделе "тригонометрические уравнения, системы, неравенства" их всего 23, между тем как в известном сборнике Сканави их несколько сотен. Автор сознательно ограничивал себя, подбирая задачи с тем расчетом, чтобы тот, кто решил их все самостоятельно, достаточно поупражнялся в использовании разнообразных идей и методов рассуждения. Для сравнения, решить все "задачи из Сканави" невозможно, да и не нужно.

Автор предостерегает читателя от переоценки собственных знаний и советует читать книгу внимательно и вдумчиво, раздел за разделом, начав с самого первого. Уже в разделе "модуль" он (читатель) встретится с задачами, при решении которых будет использована идея симметрии, графические соображения, рассуждения, связанные с монотонностью функции, с задачами, в которых имеются параметры (иногда и не один).

Каждый раздел начинается с обсуждения полутора десятков задач, причем именно обсуждения, и не просто их решений, но и подходов к ним, а также возможных ошибок. К каждой из задач для самостоятельного решения приведены советы и (или) комментарии. Иногда совет выглядит таким образом: "см. задачу такую-то".

По-видимому, эта книга предназначена для двукратного прочтения. При первоначальном изучении что-то может оказаться непонятым, а некоторые задачи решить не удастся. Однако поскольку одни и те же *методы рассуждения* встречаются в разных ее разделах и поскольку "повторенье – мать ученья", то автор советует время от времени возвращаться назад, чтобы снова попытаться решить то, что вы не были способны сделать раньше. Среди обсуждаемых в книге задач есть и достаточно трудные, вернитесь к ним еще раз и постарайтесь ощутить, стали ли они вам понятнее. Предупреждение: задачи последнего из основных разделов книги – "функции, уравнения, неравенства" достаточно сложны, особенно последние два пункта каждой из них.

Автор выражает искреннюю признательность своим коллегам, с которыми ему посчастливилось общаться в течение многих лет – и не только на темы школьной математики. Особо хотелось бы отметить конструктивную критику со стороны доцента Санкт-Петербургского государственного университета, кандидата физико-математических наук, заслуженного учителя РФ, Бориса Михайловича Беккера, многочисленные беседы с которым способствовали уточнению позиции автора данной книги.

Санкт-Петербург, 2005

1. Модуль

"Раскрытие" модуля: уравнения, неравенства, графики. Метод неопределенных коэффициентов. Расстояние между точками на прямой. Системы и совокупности уравнений и неравенств. Множества на плоскости и их симметрии. Графическая интерпретация уравнений, неравенств и их систем.

Обсуждение. Задачи с модулями часто вызывают трудности, поскольку при их решении почти всегда необходимо проводить *рассуждения*. Вместе со стандартным определением модуля приведем еще одно равенство, которое часто бывает полезным:

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Задача 1. Решите уравнение $2x + |x+1| = 3$.

Проведем стандартное рассуждение. В случае если $x \leq -1$, то $|x+1| = -x-1$, поэтому в этом предположении уравнение приобретает вид $2x - x - 1 = 3$, откуда $x = 4$. Однако найденное значение не удовлетворяет предположению $x \leq -1$, следовательно, оно не является решением исходного уравнения. Если $x \geq -1$, то $|x+1| = x+1$, поэтому мы получим уравнение $2x + x + 1 = 3$, откуда $x = \frac{2}{3}$. Поскольку $\frac{2}{3} \geq -1$, то $x = \frac{2}{3}$ является искомым решением.

Казалось бы, проведенное рассуждение совсем просто осознать. Однако стоит немного изменить формулировку, и задача вызовет бóльшие сложности. По-настоящему можно проверить, понят ли метод (рассуждение), на примере решения задач с параметрами.

Задача 2. Решите уравнение $ax + |x - 3| = 1$.

Задачи с параметрами непросты хотя бы потому, что у них не очень просто записать ответ. В данной задаче он имеет вид: $x = \frac{2}{1-a}$ при $a \le -1$; $x = \frac{2}{1-a}; \frac{4}{a+1}$ при $-1 < a < \frac{1}{3}$; $x = 3$ при $a = \frac{1}{3}$; $x = \frac{2}{1-a}$ при $a > 1$; решений нет при $\frac{1}{3} < a \le 1$.

Если $x \ge 3$, то $ax + x - 3 = 1$, т. е. $x = \frac{4}{a+1}$, однако надо выяснить, при каких значениях параметра найденное значение будет удовлетворять предположению $x = \frac{4}{a+1} \ge 3$. Имеем,

$$3 - \frac{4}{a+1} = \frac{3a-1}{a+1} \le 0.$$

Решив данное неравенство (к примеру, методом интервалов), получим, что оно выполнено при $-1 < a \le \frac{1}{3}$.

Если $x \le 3$, то $ax + 3 - x = 1$, т. е. $x = \frac{2}{1-a}$. Далее проверяем условие $x = \frac{2}{1-a} \le 3$:

$$3 + \frac{2}{a-1} = \frac{3a-1}{a-1} \ge 0,$$

откуда $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (1; +\infty)$.

Значит, уравнение разрешимо при $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (1; +\infty)$, при этом оно может иметь одно или два решения. При этом если ставится вопрос о числе решений, то одна из типичных ошибок – это не обратить внимания на то, что значения $\frac{4}{a+1}$ и $\frac{2}{1-a}$ могут совпасть (конечно, при этом они должны быть равны 3), что в нашем примере имеет место при $a = \frac{1}{3}$.

Комментарий для учителя.[1] Подобные задачи полезно давать учащимся хотя бы для того, чтобы приучать их проводить достаточно длинные рассуждения.

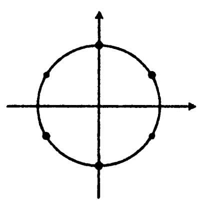
Приведенное решение выглядит несколько громоздко, хотя само уравнение очень простое. Строить рассуждение и следить

[1]Всюду далее в этой книге "рубленым" шрифтом будут выделяться обращения к учителям.

за его ходом будет проще, если мы будем использовать графическую интерпретацию уравнения (см. далее задачи 7, 9, 14, 15 и комментарий к задаче 1.3).

Задача 3. Решите уравнение $\sin 2x = |\cos x|$.

Воспользуемся формулой синуса двойного угла и перепишем уравнение в виде $2\sin x \cos x = |\cos x|$. Если $\cos x = 0$, то справа и слева стоят нули, поэтому первая серия решений имеет вид $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\cos x > 0$, то получаем, что $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако лишь первая из этих серий удовлетворяет сделанному предположению $\cos x > 0$, поэтому в решение войдут только точки $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если же $\cos x < 0$, то $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае решением исходного уравнения будет вторая серия, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В результате получаем ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. На следующем рисунке приведена геометрическая интерпретация, "жирными" точками отмечены решения.



Данный пример хорош хотя бы тем, что по нему можно проверить, понимают ли учащиеся формулу для решения уравнения $\sin x = a$.

В некоторых случаях присутствие модуля упрощает задачу.

Задача 4. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = |x-1|$.

Поскольку обе части данного уравнения неотрицательны, то мы вправе возвести их в квадрат, получив в результате уравнение $x+1 = (x-1)^2$, или $x^2 - 3x = 0$, откуда $x = 0; 3$. Обратите внимание, что никакого "ОДЗ" здесь искать не надо, поскольку всякое решение полученного уравнения обязательно попадет в область определения исходного уравнения.

Обязательно предложите этот (или аналогичный) пример своим ученикам; отметьте для себя, сколько из них начнут с того, что рассмотрят случаи $x \leq 1$ и $x \geq 1$.

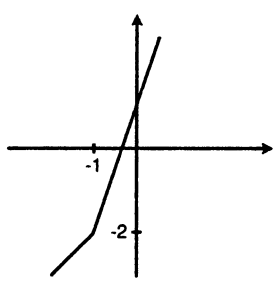
К сожалению, на вступительных экзаменах иногда отсутствие ОДЗ считается ошибкой. Это происходит в тех вузах, в которых проверяется не знание математики, а знание стандартных методов. Поэтому будьте осторожны и обязательно посмотрите образцы решений экзаменационных задач в выбранном вами вузе. Другое дело, что тому, кто понимает, как надо задачу решать, всегда будет легко понять принятые правила *оформления* решений, так сказать, – "правила игры".

Задача 5. Постройте график функции $y = 2x + |x+1|$.

Повторив рассуждение, проведенное при решении задачи 1, получим, что

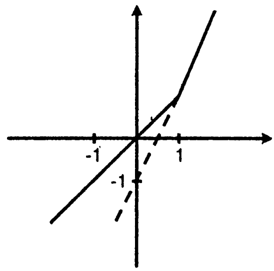
$$y = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x \geq -1, \\ x-1, & \text{если } x \leq -1, \end{cases}$$

таким образом, график данной функции состоит из двух лучей, именно части прямой $y = 3x + 1$ (при $x \geq -1$) и части прямой $y = x - 1$ (при $x \leq -1$), так, как это изображено на рисунке.



Теперь давайте сформулируем "обратную" задачу, в которой требуется написать формулу для функции с заданным графиком, в одном из решений которой появляется чрезвычайно общий математический метод – так называемый *метод неопределенных коэффициентов*.

Задача 6. Напишите формулу для функции, график которой изображен на рисунке.



Данный график состоит из двух лучей, лежащих на прямых, заданных уравнениями $y = x$ и $y = 2x - 1$, поэтому один из вариантов ответа таков:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \le 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

С другой стороны, мы можем написать формулу при помощи обозначения $\max\{a, b\}$ для наибольшего из чисел a и b, а именно $y = \max\{x, 2x - 1\}$.

Наконец, как следует из предыдущих примеров, можно найти формулу для искомой функции, в которой будет участвовать модуль. Поставим вопрос: "А в каком виде следует искать ответ?" Ясно, что в нем должно присутствовать выражение $|x - 1|$, а что должно быть еще? Основная идея состоит в том, что ответ надо искать в виде

$$y = ax + b + c|x - 1|.$$

При этом мы можем пользоваться тем, что график проходит через точки $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 3)$, так что нам известны значения искомой функции при $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.

Итак, подставив $x = 0$, $y = 0$, получим, что $0 = b + c$, подставив $x = 1$, $y = 1$, что $1 = a + b$, наконец, подставив $x = 2$ и $y = 3$, что $3 = 2a + b + c$. Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов a, b и c мы получили систему из трех линейных уравнений:

$$y = \begin{cases} b + c = 0, \\ a + b = 1, \\ 2a + b + c = 3. \end{cases}$$

Так как $b + c = 0$, то из последнего уравнения следует, что $a = \frac{3}{2}$. Теперь из второго уравнения получим значение второго коэффициента: $b = -\frac{1}{2}$, из первого: $c = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомая формула:

$$y = \frac{3x - 1 + |x - 1|}{2}.$$

Этот пример интересен еще тем, что при обсуждении вопроса о виде искомой функции должно появиться следующее соображение. Данный график есть ломаная с двумя звеньями, расположение которой на плоскости однозначно определяется тремя точками. Следовательно, нам известны три (независимых друг от друга) значения функции. Если бы мы пытались искать формулу вида $y = ax + c|x - 1|$, то мы пришли бы к системе из трех уравнений с двумя неизвестными, которая в данном случае решений не имеет.

Задача 7. Решите уравнение $|x| + |x - 2| = a$.

Вначале решим задачу стандартным способом.

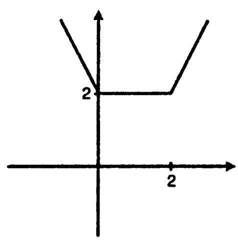
Если $x \le 0$, то уравнение приобретает вид $2 - 2x = a$, так что $x = \frac{2-a}{2}$, при этом должно выполняться неравенство $\frac{2-a}{2} \le 0$, что имеет место при $a \ge 2$. Если $0 \le x \le 2$, то получаем уравнение $2 = a$, которое не имеет решений при $a \ne 2$, а при $a = 2$ решений бесконечно много, именно решением является любая точка отрезка $[0; 2]$. Если $x \ge 2$, то уравнение имеет вид $2x - 2 = a$, откуда $x = \frac{a+2}{2}$, при этом неравенство $\frac{a+2}{2} \ge 2$ выполнено при $a \ge 2$.

Таким образом, окончательный ответ имеет следующий вид: решений нет при $a < 2$: при $a = 2$ множеством решений является отрезок $[0; 2]$; при $a > 2$ имеем $x = \frac{a+2}{2}; \frac{2-a}{2}$.

Теперь приведем графическую интерпретацию данного уравнения, для чего построим график функции $y = |x| + |x - 2|$. Из приведенных вычислений видно, что если не использовать обозначения модуля, то формула для данной функции имеет вид

$$y = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{при } x \leq 0, \\ 2, & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 2x + 2, & \text{при } x \geq 2, \end{cases}$$

таким образом график состоит из двух лучей и отрезка так, как это изображено на рисунке.



Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система

$$\begin{cases} y = |x| + |x - 2|, \\ y = a, \end{cases}$$

т. е. когда график пересекается с прямой $y = a$. При $a < 2$ эта прямая расположена "слишком низко" и не имеет с графиком общих точек, при $a = 2$ она имеет с ним целый общий отрезок, а при $a > 2$ – две общие точки.

Кстати, то, что при $a < 2$ уравнение решений не имеет, следует из стандартного неравенства $|a + b| \leq |a| + |b|$, так как $|x| + |x - 2| \geq |x + 2 - x| = 2$.

Задача 8. Решите неравенство $x^2 - 2x + |2x - 3| \leq 1$.

Автор советует решить неравенство стандартным способом для того, чтобы сравнить его с тем, которое сейчас будет приведено. Его основой является то, что так как $|a| = \max\{a, -a\}$, то

$$|a| \le b \iff \max\{a, -a\} \le b \iff \begin{cases} a \le b, \\ -a \le b, \end{cases} \iff \begin{cases} a \le b, \\ a \ge -b. \end{cases}$$

Перепишем данное неравенство в виде $|2x-3| \le 1 + 2x - x^2$. В силу вышесказанного, оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - 3 \le 1 + 2x - x^2, \\ 2x - 3 \ge x^2 - 2x - 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 \le 4, \\ x^2 - 4x + 2 \le 0. \end{cases}$$

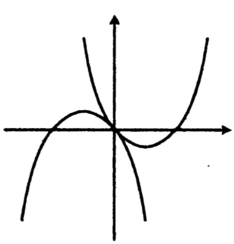
Решением первого неравенства является отрезок $[-2; 2]$, решением второго – отрезок $[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}]$. Решением системы (значит, и решением заданного неравенства) является их пересечение – отрезок $[2-\sqrt{2}; 2]$.

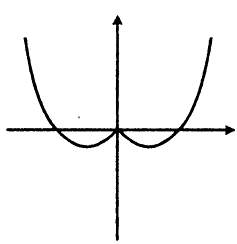
Задача 9. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет уравнение: а) $x^2 = |x+a|$; б) $x^2 = |x| + a$?

Решение задачи 9а. Вспомним решение задачи 7 и нарисуем множество точек, координаты которых связаны уравнением $x^2 = |x+y|$. Поскольку $x^2 \ge 0$, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений,

$$x^2 = |x+y| \iff \left[\begin{array}{l} x^2 = x + y, \\ x^2 = -x - y. \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} y = x^2 - x, \\ y = -x^2 - x, \end{array} \right.$$

следовательно, заданное им множество является объединением изображенных на левом рисунке парабол, ординаты вершин которых равны $\pm\frac{1}{4}$.





Число решений данного уравнения равно числу точек пересечения построенного множества с прямой $y = a$. Следовательно, решений два при $a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$; три – при $a = 0; \pm\frac{1}{4}$; четыре решения при $a \in (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; \frac{1}{4})$.

Конечно, уравнение можно было решить стандартным методом. Именно $x^2 = |x+a|$, если $x^2 = x+a$ или если $x^2 = -x-a$, т. е. $x^2-x-a = 0$ или $x^2+x+a = 0$. Первое уравнение имеет два решения, если его дискриминант положителен, т. е. $1 + 4a > 0$, откуда $a > -\frac{1}{4}$, одно – при $a = -\frac{1}{4}$. Второе уравнение имеет два решения при $a < \frac{1}{4}$, одно – при $a = \frac{1}{4}$.

Какое еще рассуждение надо провести, чтобы получить правильный ответ?

Дело в том, что в объединении двух множеств, каждое из которых состоит из двух точек, может быть от двух до четырех точек. Значение $a = 0$ характерно тем, что, хотя каждое из уравнений имеет по два решения, но в совокупности решений будет три, так как $x = 0$ является решением каждого из этих уравнений. Обратите внимание на то, что изображенные на рисунке параболы имеют одну общую точку – начало координат.

Решение задачи 9б. На правом рисунке изображен график функции $y = x^2 - |x|$, поэтому уравнение $x^2 = |x| + a$ имеет два решения при $a > 0$ и $a = -\frac{1}{4}$; три решения при $a = 0$; четыре – при $a \in (-\frac{1}{4}; 0)$.

Давайте теперь разберем стандартное решение, в котором будет присутствовать маленькая хитрость, упрощающая рассуждение. Именно сделаем замену $t = |x|$, в результате которой мы получим просто квадратное уравнение $t^2 - t - a = 0$, которое имеет два решения при $a > -\frac{1}{4}$ и одно – при $a = -\frac{1}{4}$. Если $a = -\frac{1}{4}$, то $t = \frac{1}{2}$, значит, $|x| = \frac{1}{2}$, таким образом, $x = \pm\frac{1}{2}$ – (число решений, можно сказать, удвоилось). При $a > -\frac{1}{4}$ необходимо отбрасывать отрицательные значения t, к примеру, при $a = 5$ имеем $t = -2; 3$, и корнями данного уравнения будут те числа, модуль которых равен трем, $|x| = 3$, т. е. $x = \pm 3$.

Итак, при $a = -\frac{1}{4}$ данное уравнение имеет два корня. Если $a = 0$, то $t = 0; 1$, так что данное уравнение имеет три корня

$x = 0; \pm 1$. Если $a > 0$, то $t_1 < 0 < t_2$, следовательно, корней два. Если же $-\frac{1}{4} < a < 0$, то $t_1, t_2 > 0$, поэтому данное уравнение будет иметь четыре корня.

Какое решение проще – то, в котором проще рассуждение. В каком из приведенных решений рассуждения практически не было – в первом, использовавшем графические соображения. Учащиеся, для которых естественно строить графики и смотреть на них, будут решать задачи быстрее, точнее и будут реже совершать ошибки.

Следующая задача ничем не отличается от обычных задач на "раскрытие модуля", однако опыт показывает, что почему-то она вызывает трудности.

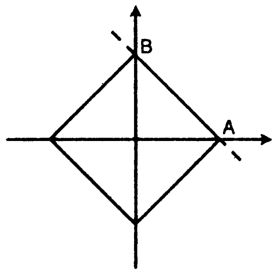
Задача 10. Нарисуйте множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до осей координат равна двум.

Расстояние от точки $M(x, y)$ плоскости до оси ординат равно $|x|$, до оси абсцисс – $|y|$, поэтому искомое множество задается уравнением

$$|x| + |y| = 2.$$

Следует рассмотреть четыре случая, в зависимости от того, в какой из координатных четвертей лежит точка M. В первой четверти $|x| = x$ и $|y| = y$, так что уравнение приобретает вид $x + y = 2$, или $y = 2 - x$. Полученное уравнение задает прямую, однако не следует забывать о дополнительных условиях $x, y \geq 0$. Таким образом, нам следует взять ту часть прямой, которая расположена в первой четверти, т. е. отрезок с концами в точках $A(2, 0)$ и $B(0, 2)$. Рассуждение можно продолжить, предположив, что точка M лежит во второй, третьей, наконец, четвертой четверти. Однако более естественным будет использовать симметрию искомого множества. Замена $x \mapsto -x$ не меняет исходного уравнения, следовательно, искомое множество симметрично относительно оси ординат. Аналогично, оно симметрично и относительно оси абсцисс (кстати, отсюда следует, что оно симметрично относительно начала координат). Следовательно, три оставшихся случая можно и не рассматривать!

Та часть искомого множества, которая лежит во второй четверти, является отрезком, симметричным отрезку AB относительно оси ординат. Окончательный ответ – на рисунке.



Приведенное решение является характерным примером того, что использование соображений, связанных с симметрией множеств (уравнений), может существенно упростить рассуждение и, тем самым, сократить решение.

Задача 11. Найдите точку числовой прямой, сумма расстояний от которой до точек $A(0)$, $B(1)$ и $C(5)$ является наименьшей.

Расстояние между точками $K(a)$ и $L(b)$ числовой прямой дается формулой $|KL| = |a-b|$, потому сумма S расстояний от точки $M(x)$ до данных точек равна $S = |x| + |x-1| + |x-5|$.

Таким образом, задача состоит в нахождении числа x, для которого значение S является наименьшим. Попробуем найти короткое решение. На каждом из отрезков (лучей) $(-\infty; 0]$, $[0;1]$, $[1;5]$ и $[5;+\infty)$ функция $y = |x| + |x-1| + |x-5|$ является линейной, причем она убывает на левом луче и возрастает на правом, а потому принимает наименьшее значение в одной из точек $x = 0; 1; 5$. Осталось подсчитать ее значения в этих точках и выбрать из них наименьшее. В силу таблицы

x	0	1	5
y	6	5	9

искомая точка – это точка $B(1)$.

Однако самое простое решение – геометрическое. Ясно, что искомая точка должна лежать на отрезке AC. В таком случае сумма расстояний до точек A и C постоянна и равна 5. Так что $S = 5 + MB$, следовательно, значение S – наименьшее, если точка M совпадает с точкой B.

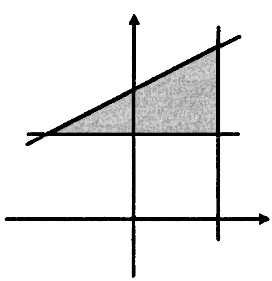
Задача 12. Нарисуйте множество всех точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

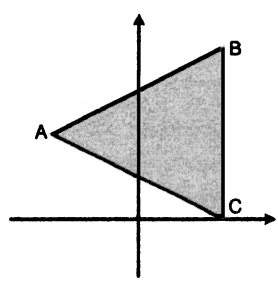
$$\big|x - |y-1|\big| + |y-1| \le 1.$$

Предположим, что $y \ge 1$. В таком случае мы получаем неравенство $|x - y + 1| \le 2 - y$, равносильное системе

$$\begin{cases} x - y + 1 \le 2 - y, \\ x - y + 1 \ge y - 2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \le 1, \\ x - 2y + 3 \ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, часть искомого множества задается неравенствами $y \ge 1$, $x \le 1$ и $y \le \frac{x+3}{2}$. На левом рисунке изображены прямые, заданные соответствующими уравнениями, ограниченный ими треугольник и является частью искомого множества, лежащей выше прямой $y = 1$.





Если $y \le 1$, то мы придем к системе

$$\begin{cases} y \le 1, \\ x \le 1, \\ y \ge \frac{1-x}{2}, \end{cases}$$

которая задает треугольник, симметричный первому относительно прямой $y = 1$. Окончательный ответ изображен на правом рисунке: искомое множество является треугольником ABC.

В действительности решение можно сделать почти вдвое короче. Неравенство $\big|x - |y|\big| + |y| \leq 1$ задает множество, которое, очевидно, симметрично относительно оси абсцисс. Следовательно, для его построения достаточно рассмотреть случай $y \geq 0$. Искомое множество получается из него параллельным сдвигом на единицу вверх вдоль оси ординат, в частности, отсюда сразу следует, что оно симметрично относительно прямой $y = 1$.

Задача 13. Решите неравенство $|2^x - 2^{-x}| \geq 2^a - 2^{-a}$.

Если $a \leq 0$, то $2^a - 2^{-a} \leq 0$, поэтому неравенство верно при всех действительных значениях x. Предположим, что $a > 0$. Поскольку замена $x \mapsto -x$ не меняет данного неравенства, то можно рассматривать только случай $x \geq 0$. При сделанном предположении получим неравенство $2^x - 2^{-x} \geq 2^a - 2^{-a}$, или

$$2^x - 2^a + \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^x} = \left(2^x - 2^a\right)\left(1 + \frac{1}{2^{x+a}}\right) \geq 0,$$

откуда $x \geq a$. Таким образом, окончательный ответ: x – любое число при $a \leq 0$; $x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ при $a > 0$.

Рассуждение можно упростить, если обратить внимание на свойства функции $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. По-существу, проведенное рассуждение означает, что эта функция возрастает на всей числовой оси, но для доказательства этого факта не требуется никаких преобразований. Действительно, функция $y = 2^x$ – возрастающая, функция $y = 2^{-x}$ – убывающая, следовательно их разность является возрастающей на всей оси функцией. А в таком случае имеем, что $f(x) \leq f(a) \iff x \geq a$.

Решить следующую задачу, не используя графические соображения, будет трудно (хотя, конечно, это возможно).

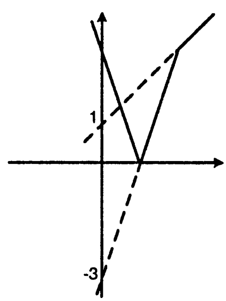
Задача 14. Найдите все значения b, для которых найдется такое значение k, что уравнение $\big||x-2|-2x+1\big| = kx+b$ имеет ровно три решения.

В силу геометрического смысла коэффициентов k и b в уравнении прямой $y = kx + b$, геометрическая переформулировка данной задачи такова: через какие точки оси ординат можно провести прямую, которая пересекает график функции $y = \big||x-2| - 2x + 1\big|$ ровно в трех точках?

Формула для этой функции имеет вид

$$y = \big||x-2| - 2x + 1\big| = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 2, \\ 3x-3, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ 3-3x, & \text{если } x \leq 1, \end{cases}$$

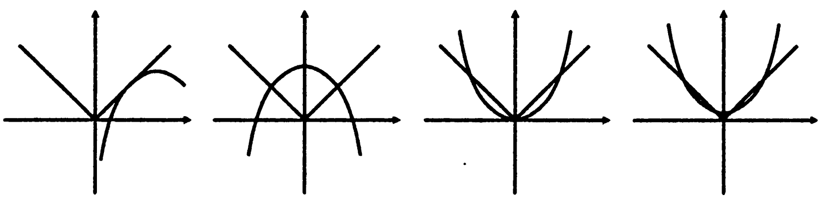
а ее график изображен на рисунке.



Видно ли теперь, через какие точки оси ординат проходят искомые прямые? Конечно, через точки, лежащие между точками $A(0,-3)$ и $B(0,1)$ этой оси. Ответ: $b \in (-3;1)$.

Задача 15. Сколько решений может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = |x|$ (где $a \neq 0$)? Приведите примеры уравнений данного вида, имеющие заданное число решений.

Ограничение на число корней очевидно. Поскольку каждое из уравнений $ax^2 + bx + c = \pm x$ имеет не более двух корней, то данное уравнение не может иметь более четырех корней. С интуитивной точки зрения кажется естественным, что число корней может быть любым в пределах от 0 до 4. Для того чтобы показать, что так оно и есть, достаточно привести примеры уравнений с заданным числом корней. То, что корней у такого уравнения может не быть вовсе, совсем очевидно; пример: $-x^2 - 1 = |x|$. Для всех остальных случаев можно нарисовать картинки; постарайтесь также выписать соответствующие им уравнения.



Справочник

Некоторые свойства модуля.

$$|x| \le a \iff \begin{cases} x \le a, \\ x \ge -a. \end{cases} \qquad |x| \ge a \iff \left[\begin{array}{l} x \ge a, \\ x \le -a. \end{array} \right.$$

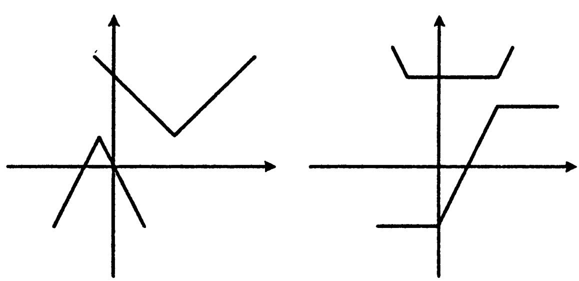
$$|x+y| \le |x| + |y|; \quad |x-y| \ge \big||x| - |y|\big|;$$

$$\max\{x,y\} = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|); \quad \min\{x,y\} = \tfrac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

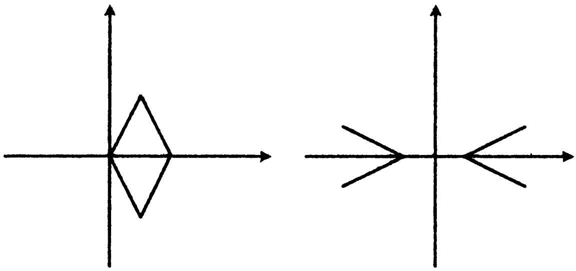
На первой паре рисунков изображены графики:

$y = |x-2| + 1$, $y = 1 - |2x+1|$ и

$y = |x+1| + |x-2|$, $y = |x| - |x-2|$.



На следующей паре изображены множества, заданные уравнениями $2|x-1|+|y|=2$ и $|x|-2|y|=1$.



Задачи для самостоятельного решения

1.1. Решите уравнение $\big|\big||x-3|-2\big|-1\big|=1$.

1.2. Решите уравнение $|x^2-3|=|x^2+6x-5|$.

1.3. Определите (в зависимости от значения a) число решений уравнения $ax+|x-2|=|x|$.

1.4. Нарисуйте на плоскости множество, заданное уравнением $x-2y=|y-2x|$.

1.5. Решите уравнение $\sin x=|\cos x|$.

1.6. Решите уравнение $x^2+2x-3=3|x-1|$.

1.7. Решите неравенство $x^2-4|x|+3\le 0$.

1.8. Решите неравенство $|x^2-4x|\le 3$.

1.9. Решите неравенство $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|\ge 1$.

1.10. Нарисуйте множество точек плоскости, расстояние от которых до оси ординат на единицу больше расстояния до оси абсцисс.

1.11. В поселке Малые Липки живут 50 школьников, а в поселке Большие Липки – сто. Расстояние между этими поселками составляет 5 км. В каком месте следует построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое ребятами по пути в школу, было бы наименьшим?

1.12. Решите уравнение $|x - a| = 2x + 1$.

1.13. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + |y| = 1, \\ y + a|x| = 2 \end{cases}$$

имеет четыре решения.

1.14. Найдите все значения параметра a, при которых для всякого действительного числа b система неравенств

$$\begin{cases} |x - b| \leq 5, \\ |x + 1| \geq a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1.15. Найдите все значения параметра a, при которых для всякого действительного числа b уравнение $ax + b = |x|$ имеет хотя бы одно решение.

Комментарии и советы

1.1. Автор надеется, что никто из читателей и не подумает исследовать знаки выражений, стоящих под модулями, поскольку ясно, что $|X| = 1$ тогда и только тогда, когда $X = 1$ или $X = -1$. Так что решайте данное уравнение, начав не с "внутреннего" модуля, а с "внешнего".

1.2. Тот, кто начнет исследовать знаки выражений, стоящих под модулями, скорее всего, запутается в вычислениях. Задача очень проста: $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда $A = B$ или $A = -B$.

1.3. Перепишите уравнение в виде $ax = |x| - |x-2|$, постройте график функции $y = |x| - |x-2|$ и постарайтесь понять, в скольки точках прямая $y = ax$ пересечет его (в зависимости от величины ее углового коэффициента a).

1.4. Стандартная задача на "раскрытие модуля"; предположите вначале, что точка лежит выше прямой $y = 2x$.

1.5. Решите ее двумя способами. Если ответы не совпадут, значит, по крайней мере в одном решении есть ошибка, причем неизвестно – в каком.

1.6. Задачу можно решить стандартно, а можно обратить внимание, что число $x = 1$ является корнем обеих частей уравнения.

1.7. См. решение задачи 9б.

1.8. См. решение задачи 8.

1.9. Полезно сразу избавиться от знаменателя, не забыв при этом ввести условие $x \neq -1$. Следующий шаг – возведение в квадрат, что правомерно, так как

$$|A| \geq |B| \iff A^2 \geq B^2 \iff (A-B)(A+B) \geq 0.$$

1.10. См. решение задачи 10.

1.11. Очевидно, что школу надо строить где-то между поселками. Теперь обозначьте через x расстояние от места расположения школы до поселка Большие Липки.

1.12. См. решение задачи 2.

1.13. Нарисуйте множество, заданное уравнением $x = 1 - |y|$ и проследите, при каких значениях параметра a график функции $y = 2 - a|x|$ будет пересекать его в четырех точках.

1.14. Какова структура решения каждого из неравенств? В каком случае вне зависимости от расположения на действительной прямой решения первого неравенства оно обязательно заденет и множество решений второго?

1.15. Чрезвычайно полезно решить эту задачу несколькими способами. Вот идея одного из них. Рассмотрите функцию $y = |x| - ax$. При каких a множество ее значений будет совпадать со всей числовой прямой?

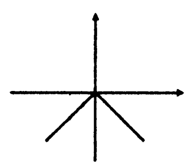
Ответы и комментарии

1.1. $x = -1; 1; 3; 5; 7$. Дидактический смысл этой задачи состоит в том, что, несмотря на ее некую "запутанность", решение очень просто. Так что – не бойтесь, ребята!

1.2. $x = -4; 1; \frac{1}{3}$.

1.3. Одно решение при $a \leq 0$ и $a > 1$; два при $a = 1$; три при $0 < a < 1$.

1.4. Ответ на рисунке, $y = -|x|$:



1.5. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

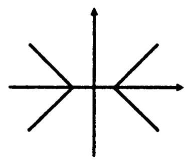
1.6. $x = -6; 1$.

1.7. $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$.

1.8. $x \in [2 - \sqrt{7}; 1] \cup [3; 2 + \sqrt{7}]$.

1.9. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty]$.

1.10. Ответ на рисунке.



1.11. Школу надо построить в поселке Большие Липки.

1.12. $x = -a - 1$ при $a \leq -\frac{1}{2}$; $x = \frac{a-1}{3}$ при $a \geq -\frac{1}{2}$.

1.13. $a > 2$.

1.14. $a \leq 5$.

1.15. $|a| > 1$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Квадратный корень. Иррациональные и алгебраические уравнения: замены, возведения в квадрат. Свойства функций и их исследование: монотонность, наибольшее и наименьшее значения. Взаимное расположение парабол и прямых.

Обсуждение. При изучении (преподавании) данной темы следует учитывать следующие соображения, можно сказать, идеологического характера. Во-первых, по-существу, никаких "иррациональных уравнений и неравенств" не существует, поскольку всегда можно записать алгебраическую систему уравнений и неравенств (возможно, от нескольких переменных), равносильную данному иррациональному уравнению (неравенству). Такое большое внимание, которое уделяется в школе этому типу задач, связано, в основном, с тем, что при их решении все-таки необходимо проводить рассуждения. Однако "заучивание" способов рассуждений слишком часто приводит к заучиванию голых схем, а не к осознанию используемых методов. Между тем, как будет показано в этом разделе, подобные задачи действительно дают широкие возможности для обучения школьников *математике.*

Есть несколько способов борьбы с формализмом знаний учащихся. Первый из них связан с оформлением решений. Попробуйте требовать от ребят, чтобы они представляли свои решения в виде связного текста, так, чтобы в нем была видна логика проводимого рассуждения. Старайтесь обращать их внимание на качественную сторону. К примеру, спросите, можно ли по виду уравнения определить число его корней и их расположение? Предлагайте решить задачу разными способами, ведь порой комбинация двух приемов может существенно упростить рассуждение. Обязательно давайте задачи с параметрами, пусть самые простые; пример – задача 2.

Автор решил ограничиться только уравнениями с квадратными корнями из тех соображений, что решения задач с радикалами высших степеней основаны на иных рассуждениях.

Последний прагматический совет. Хорошо известно, что, вообще говоря, не существует общей формулы для решения алгебраического уравнения степени выше четвертой, да и формулы для решения кубических уравнений не изучают в средней школе. Поэтому следует знать, что если задача дана, то ее можно решить при помощи известных методов; главное – найти естественный подход. Характерным примером является следующая задача, в которой, по сути, ничего "иррационального" вообще нет.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Первая идея состоит в том, чтобы избавиться от $\sqrt{x-1}$ при помощи замены $t=\sqrt{x-1}$. Тогда $x=t^2+1$, следовательно выражения, стоящие под знаками радикалов, приобретают вид $t^2-4t+4=(t-2)^2$ и $t^2-6t+9=(t-3)^2$, соответственно.

Внимание, $\sqrt{A^2}=\sqrt{|A|^2}=|A|$.

Поэтому в результате замены мы получим уравнение

$$|t-2|+|t-3|=1,$$

решением которого является отрезок $[2;3]$. Таким образом,

$$2\le t\le 3, \text{ или } 2\le\sqrt{x-1}\le 3, \text{ или } 4\le x-1\le 9,$$

откуда и получаем ответ: $x\in[5;10]$.

Кстати, выбирая различные значения из этого отрезка, мы будем получать числовые тождества, которые, на первый взгляд, могут показаться странными. К примеру, взяв $x = 3$, получим, что

$$\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 1.$$

Конечно, в данной задаче можно было обойтись без замены, так как

$$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1})^2 - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1} - 2)^2,$$

однако это преобразование труднее увидеть в силу его некой искусственности.

Рассмотренная задача обладает несколькими несомненными дидактическими достоинствами. Первое – ее "пугающая формулировка", второе – естественность производимой замены, третье – то, что множество решений уравнения оказывается бесконечным, что часто учащихся ставит в тупик.

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{x + a} = \sqrt{2x + 1}$.

В определенном смысле данная задача является "учебным извращением", так как все, что она проверяет, так это знание области определения функции $y = \sqrt{x}$ и умение проводить элементарное логическое рассуждение. Итак, в общем случае,

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff \begin{cases} A = B, \\ A \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = B, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x + a = 2x + 1$, откуда $x = a - 1$. Осталось выяснить, при каких значениях a будет выполнено неравенство $x + a = 2a - 1 \geq 0$. Итак: решений нет при $a < \frac{1}{2}$; $x = a - 1$ при $a \geq \frac{1}{2}$.

Следующая задача проста по виду, естественна по решению, однако, опять-таки, почти всех школьников она ставит в тупик. А идея ее решения та же, что и у предыдущей.

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x + a \sin x} = \sqrt{\sin x + a \cos x}.$$

Итак, из решений уравнения $\cos x + a\sin x = \sin x + a\cos x$ мы должны выбрать те, которые удовлетворяют неравенству $\cos x + a\sin x \geq 0$. Заметим, что совсем не обязательно решать это неравенство (кстати, слишком часто его решают неверно). Имеем,

$$\cos x - \sin x + a(\sin x - \cos x = 0), \quad \text{или} \quad (a-1)(\sin x - \cos x) = 0,$$

откуда $a = 1$ или $\sin x = \cos x$. В первом случае (при $a = 1$) решениями данного уравнения является вся область его определения: множество, заданное неравенством $\sin x + \cos x \geq 0$. Ясно, что безрассудно делить на $\cos x$ нельзя, если уж очень хочется проделать такое преобразование, то придется решать следующую совокупность систем:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x < 0, \\ \operatorname{tg} x \leq 1. \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, откуда следует, что $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. При $a \neq 1$ имеем $\sin x = \cos x$, т. е. $\operatorname{tg} x = 1$, значит, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку периодом синуса и косинуса является 2π, то удобнее рассмотреть отдельно серии $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для первой из них $\cos x + a\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2} = (a+1)\frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ при $a \geq -1$. Для второй серии неравенство $\cos x + a\sin x \geq 0$ будет верным при $a \leq -1$.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a < -1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = -1$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 1$.

Конечно, "обычный" ученик не сможет провести подобное рассуждение, несмотря на то, что эта задача по сути ничем не отличается от предыдущей. Попробуйте "заставить" ребят пройти его от начала до конца самостоятельно, пусть даже и под вашим контролем.

На примере следующей абсолютно стандартной задачи мы разберем несколько типичных приемов решения иррациональных уравнений. Основная идея все та же: написать (алгебраическое) уравнение, среди корней которого лежат все корни данного уравнения. Однако и переход к алгебраическому уравнению и отбор корней может производиться с использованием разных соображений. Основная идея решения заключается в том, что

$$A = B \iff \begin{cases} A^2 = B^2, \\ AB \geq 0. \end{cases}$$

Задача 4. Решите уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} = 3$.

Итак, давайте возведем в квадрат обе части данного уравнения. Имеем,

$$x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(2x+1)} + 2x + 1 = 9,$$

или $2\sqrt{(x+1)(2x+1)} = 7 - 3x$. Теперь произведем еще одно возведение в квадрат, в результате чего мы получим уравнение

$$4(x+1)(2x+1) = (7-3x)^2, \quad \text{или} \quad x^2 - 54x + 45 = 0,$$

корнями которого являются числа $x = 27 \pm 6\sqrt{19}$.

Каким образом можно сделать проверку? Если бы корни оказались целыми (в крайнем случае, рациональными), то это можно было бы сделать без труда. Далее, решение задачи 1 показывает, что сумма двух "двойных радикалов" вполне может быть целым числом, поэтому мы не вправе откинуть эти корни из того соображения, что в правой части уравнения находится целое число. Тем не менее ясно, что, поскольку функция $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}$ возрастает на всей числовой прямой, то двух корней данное уравнение заведомо иметь не может. Исследование области определения тоже ничего не даст, поскольку оба найденных числа положительны. Что же следует предпринять?

Для того чтобы получить квадратное уравнение, нам пришлось два раза возводить в квадрат. В первый раз мы получили уравнение, равносильное исходному (в его области определения). Однако левая часть уравнения $2\sqrt{(x+1)(2x+1)} = 7-3x$ заведомо неотрицательна, поэтому всякое его решение должно удовлетворять неравенству $7-3x \geq 0$, которому явно не удовлетворяет число $27+6\sqrt{19}$. Таким образом, осталось проверить, что $27-6\sqrt{19} < \frac{7}{3}$. С другой стороны, попробуйте доказать, что данное уравнение обязано иметь решение, тогда проверять это неравенство вам не придется.

Вместо того, чтобы делать такую не слишком приятную проверку, пойдем по другому пути. Введем дополнительные переменные $u = \sqrt{x+1}$ и $v = \sqrt{2x+1}$. Данное уравнение равносильно алгебраической системе

$$\begin{cases} u+v=3, \\ x=u^2-1, \\ 2x=v^2-1, \\ u,v \geq 0. \end{cases}$$

Исключив старую переменную x, получим систему

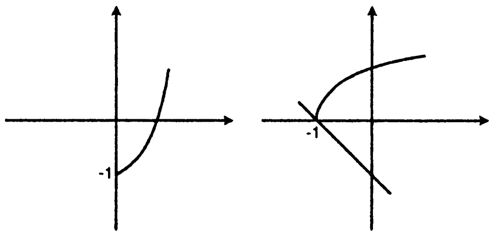
$$\begin{cases} u+v=3, \\ 2u^2-v^2=1, \\ u,v \geq 0. \end{cases}$$

Если $v=3-u$, то $u^2+6u-10=0$. Так как $u \geq 0$, то следует взять лишь $u=\sqrt{19}-3$. Поэтому $v=6-\sqrt{19} \geq 0$, следовательно, мы нашли единственное решение последней системы. Чтобы найти решение данного уравнения, достаточно подставить найденное значение u в выражение $x=u^2-1$.

Перед тем как начинать преобразовывать следующее уравнение, подумайте, почему оно не может иметь более одного решения?

Задача 5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = a-x$.

Сделав замену $t=\sqrt{x+1}$, получим уравнение $t^2+t-1=a$, у которого нас интересуют только его неотрицательные корни. На левом рисунке изображена часть графика квадратичной функции $y=t^2+t-1$ при $t \geq 0$.



Следовательно, данное уравнение имеет неотрицательный корень только при $a \geq -1$. Итак, $t = \frac{-1+\sqrt{4a+5}}{2}$, откуда получаем, что $x = t^2 - 1 = \frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}$ при $a \geq -1$; при $a < -1$ решений нет.

В действительности нет необходимости проводить какие-либо преобразования. На правом рисунке изображен график $y = \sqrt{x+1}$ и прямая $y = -x-1$. Ясно, что если $a < -1$, то прямая $y = a - x$ лежит ниже, поэтому она не пересекается с полупараболой, так что уравнение решений не имеет. При $a \geq -1$ прямая и полупарабола имеют одну общую точку. Попробуйте ответить на следующий вопрос: как следует дополнить правый рисунок, чтобы на нем появилась точка, соответствующая "лишнему" корню квадратного уравнения?

> Верно ли, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$? В действительности, это не всегда так, но об этом часто забывают. К примеру,
>
> $$\sqrt{x(x+1)} = \begin{cases} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} & \text{при } x \geq 0, \\ \sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x-1} & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$$

Задача 6. Решите уравнение $\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \sqrt{\frac{3x}{x+1}} = 3.$

Возведя в квадрат обе части исходного уравнения, получим

$$\frac{2x+3}{x+1} + \sqrt{\frac{3x(2x+3)}{(x+1)^2}} + \frac{3x}{x+1} = 9, \text{ или } \sqrt{\frac{3x(2x+3)}{(x+1)^2}} = \frac{2x+3}{x+1}.$$

Поскольку правая часть полученного уравнения неотрицательна в области определения, возведем в квадрат обе его части, откуда $3x(2x+3) = (2x+3)^2$. Корнями являются числа $x = -\frac{3}{2}; 3$.

Было бы ошибкой записать, что $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$, хотя на ответ это бы не повлияло. Не всегда верный ответ означает, что верно само решение!

> Естественное, казалось бы, преобразование – избавление от знаменателей и переход к уравнению
>
> $$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x}=3\sqrt{x+1},$$
>
> приведет к ошибке. Дело в том, что исходное уравнение и преобразованное имеют различные области определения, первая является объединением $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [0; +\infty)$, вторая представляет из себя луч $[0; +\infty)$, сответственно, корень $x = -\frac{3}{2}$ будет упущен.

Одна из общих идей, которую хочет донести автор, состоит в том, что чем больше думаешь, то тем меньше приходится вычислять. Чем больше внимания обращаешь на свойства *функций*, тем меньше приходится преобразовывать.

Задача 7. Решите уравнение $\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{3x+12}=10$.

Прежде чем начинать преобразовывать, стоит подумать, уравнение какой степени мы получим после двукратного возведения в квадрат – четвертой с достаточно большими коэффициентами, так что угадать хотя бы один корень будет совсем непросто. Поэтому давайте вначале попробуем понять, сколько корней может иметь данное уравнение.

Областью определения данного уравнения является объединение $[-4; 0] \cup [6; +\infty)$. Нетрудно видеть, что функция $y = \sqrt{x^2-6x}+\sqrt{3x+12}$ возрастает на луче $[6; +\infty)$, следовательно, уравнение имеет на нем не более одного корня. Далее, так как при $x = 6$ получаем, что $\sqrt{30} < 10$, то один корень заведомо имеется. При помощи простого перебора находим, что $y = 10$ при $x = 8$.

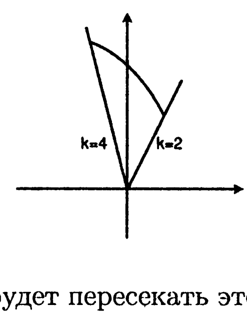
Осталось посмотреть, как ведет себя функция на отрезке $[-4; 0]$. Про ее поведение так сразу ничего сказать нельзя, однако вроде бы ее значения не могут быть большими. Теперь давайте посчитаем. Функция $y = \sqrt{x^2-6x}$ убывает на этом отрезке, поэтому ее наибольшее значение достигается на ее левом конце, $\sqrt{x^2-6x} \le \sqrt{40}$. Наоборот, функция $y=\sqrt{3x+12}$ является возрастающей, значит, $\sqrt{3x+12} \le \sqrt{12}$. Все, что осталось проверить, так это неравенство $\sqrt{10}+\sqrt{3}<5$. Итак,

$$\sqrt{10} < 5-\sqrt{3} \iff 10 < 25-10\sqrt{3}+3 \iff 5\sqrt{3} < 9,$$

что верно, поскольку $75 < 81$. Таким образом, доказано, что все значения левой части данного уравнения при $x \in [-4;0]$ меньше 10, значит, на этом отрезке уравнение не имеет решений. Ответ: $x=8$.

Задача 8. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{10-6\sin x}+a\sin x=0$.

Тригонометрия вовсе ни при чем! После замены $t=\sin x$ мы получаем задачу: найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{10-6t}+at=0$ имеет решение на отрезке $[-1;1]$. На следующем рисунке изображен график функции $y=\sqrt{10-6t}$ при $t \in [-1;1]$.

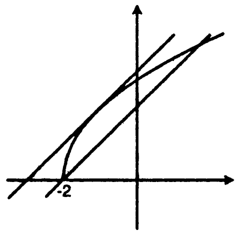


Прямая $y=-ax$ будет пересекать этот график при $-a \ge 2$, а также при $-a \le -4$. Ответ: $a \in (-\infty;-2] \cup [4;+\infty)$.

Алгебраическое решение этой задачи (не говоря уже о тригонометрическом!) не хочется и искать!

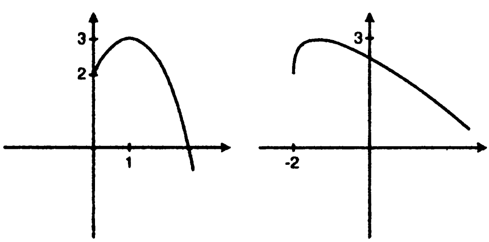
Задача 9. Решите уравнение $2\sqrt{x+2}=x+a$.

На рисунке изображены: график функции $y=2\sqrt{x+2}$ и прямые $y=x+2$ и $y=x+3$, причем вторая из них касается графика. Таким образом, из этой картинки (и преобразований, которые здесь опущены) ясно, что: уравнение не имеет корней при $a > 3$; $x = -1$ при $a = 3$; $x = 2 - a \pm 2\sqrt{3-a}$ при $2 \leq a < 3$; $x = 2 - a + 2\sqrt{3-a}$ при $a < 2$.



Конечно, то, что прямая $y = x + 3$ является касательной, еще необходимо обосновать, читатель может сделать это самостоятельно.

Более формальный метод основан на замене $t = \sqrt{x+2}$ и исследовании числа решений уравнения $2 + 2t - t^2 = a$. На левом рисунке изображена часть параболы $y = 2 + 2t - t^2$ при $t \geq 0$.



Наконец, возможен другой подход – построение графика функции $f(x) = 2\sqrt{x+2} - x$. Имеем, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - 1$, поэтому эта функция возрастает на отрезке $[-2; -1]$ и убывает на луче $[-1; +\infty)$ (правый рисунок).

Задача 10. Найдите (в зависимости от значения a) число решений уравнения $\sqrt{x+3} = 1 + ax$.

Ответ: одно решение при $a \leq 0$ и $a > \frac{1}{3}$; два решения при $0 < a \leq \frac{1}{3}$. Поймите и постарайтесь аккуратно провести решения, идеи которых приведены далее.

Способ 1. Изобразите график $y = \sqrt{x+3}$ ("половинку лежащей параболы") и проследите, сколько точек пересечения в зависимости от величины углового коэффициента a имеет прямая $y = ax + 1$ и этот график.

Способ 2. Постройте график функции $y = \frac{\sqrt{x+3}-1}{x}$ и посмотрите, сколько он имеет точек пересечения с горизонтальными прямыми $y = a$. Подсказка: используйте производную.

Способ 3. Сделайте замену $t = \sqrt{x+3}$ и определите число неотрицательных корней соответствующего квадратного уравнения.

Способ 4. Исследуйте число решений системы

$$\begin{cases} x+3 = (ax+1)^2, \\ ax \geq -1. \end{cases}$$

Задача 11. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2+7x+3} \leq \sqrt{x^3-x+3}.$$

Подчеркнем, что нет надобности искать область определения данного неравенства, так как

$$\sqrt{A} \leq \sqrt{B} \iff \begin{cases} A \leq B, \\ A \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, достаточно решить в отдельности каждое из неравенств $2x^2+7x+3 \geq 0$ и $x^3-2x^2-8x \geq 0$ и найти общую часть найденных решений. Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [4; +\infty)$.

Задача 12. Решите неравенство $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Ясно, что неравенство выполнено при $x \in (-2; 1)$, поскольку на этом интервале его левая часть отрицательна, а правая – положительна. Теперь предположим, что $x > 1$. В этом случае мы вправе перейти к неравенству $\sqrt{x+2} \leq x-1$, а далее к неравенству $x+2 \leq (x-1)^2$, или $x^2-3x-1 \geq 0$. Из множества решений $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$ мы должны взять только ту его часть, которая лежит в луче $(1; +\infty)$. Таким образом, получаем ответ: $x \in (-2; 1) \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Обратите внимание, что такая необычная форма записи неравенства может уберечь ребят от типичной ошибки.

Следующая задача абсолютно стандартна.

Задача 13. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3} \geq 2x-3$.

Неравенство верно на той части его области определения, на которой его правая часть неположительна. Таким образом, надо взять общую часть области определения, которой является объединение $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$, и луча $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. Поскольку $\frac{3}{2} < \sqrt{3}$, то в решение входит луч $(-\infty; -\sqrt{3}]$.

Теперь предположим, что $x \geq \sqrt{3}$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому мы вправе возвести их в квадрат. После стандартных преобразований мы получим неравенство $x^2 - 4x + 4 \leq 0$, которое верно только при $x = 2$. Ответ: $x \in \{2\} \cup (-\infty; -\sqrt{3}]$.

Задача 14. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+5}} \leq 1$.

Имеем, $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+5} < 0$ или $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+5} \geq 1$. Решением первого неравенства является промежуток $\left[-\frac{3}{2}; 2\right)$.

Перепишем второе неравенство в виде $\sqrt{2x+3} \geq \sqrt{x+5}+1$. Обе его части неотрицательны. Возведя их в квадрат, получим неравенство $2x+3 \geq x+6+2\sqrt{x+5}$, или $2\sqrt{x+5} \leq x-3$. Поскольку левая часть этого неравенства неотрицательна, то его решения могут лежать только на луче $[3; +\infty)$. Следовательно, мы вправе считать, что $x \geq 3$. Возведя в квадрат еще раз, получим, что $x^2 - 10x - 11 \geq 0$. В силу условия $x \geq 3$, получаем, что $x \geq 11$. Ответ: $x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right) \cup [11; +\infty)$.

Безусловно, задачи можно усложнять технически (примерами являются некоторые задачи для самостоятельного решения). Однако в завершение нашего обсуждения рассмотрим две задачи с несколько неожиданными формулировками. При их решении главное – не техника, а логика.

Задача 15. При каких значениях a для всех действительных x верно неравенство $\sqrt{x^2+3} \geq ax$?

Пусть $a \geq 0$. Если $x \leq 0$, то неравенство верно, поэтому будем считать, что $x \geq 0$. Возведя обе части в квадрат, получим неравенство $(a^2-1)x^2 \leq 3$. Если $a^2-1>0$, то это неравенство не будет выполнено для всех $x \geq 0$, если же $a^2 \leq 1$, то оно будет верным. Значит, $a \in [0;1]$. Если $a \leq 0$, то рассуждение совершенно аналогично, получим, что $a \in [-1;0]$. Таким образом, ответ: при $a \in [-1;1]$.

Задача 16. Найдите все отрицательные значения a, при которых неравенства $2\sqrt{ax} \leq 3a-x$ и $x-\sqrt{\frac{x}{a}} \geq \frac{6}{a}$ имеют общие решения.

Если $t=\sqrt{\frac{x}{a}}$, то $x=at^2$, а $\sqrt{ax}=\sqrt{a^2\frac{x}{a}}=-at$. В результате замены первое неравенство приобретет вид $-2at \leq 3a-at^2$, поделив на a, получим неравенство $t^2-2t-3 \geq 0$. Множеством его неотрицательных решений является луч $[3;+\infty)$. Сделав замену во втором неравенстве, получим, что $at^2-t \geq \frac{6}{a}$, или $a^2t^2-at-6 \leq 0$. Множеством его неотрицательных решений является отрезок $\left[0;-\frac{2}{a}\right]$. Множества решений данных неравенств пересекаются тогда и только тогда, когда $-\frac{2}{a} \geq 3$. Ответ: при $a \in \left[-\frac{2}{3};0\right)$.

Справочник

Две важные формулы.

$$\sqrt{A^2}=|A| \quad \text{и} \quad \sqrt{AB}=\begin{cases} \sqrt{A}\cdot\sqrt{B}, & \text{если } A,B \geq 0,\\ \sqrt{-A}\cdot\sqrt{-B}, & \text{если } A,B \leq 0.\end{cases}$$

Конечно, $\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A}+\sqrt{B}$!

Решение уравнений посредством "возведения в квадрат".

$$\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A = B^2, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff \begin{cases} A = B, \\ A \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} A = B, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Решение неравенств посредством "возведения в квадрат".

$$\sqrt{A} \leq B \iff \begin{cases} A \leq B^2, \\ A \geq 0, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{A} \geq B \iff \begin{cases} A \geq 0, \\ B \leq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A \geq B^2, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Достаточно условно, что решать – уравнение или неравенство. Если вы хотите усложнить задачу своим ученикам, то предлагайте решить неравенство, если упростить – то уравнение. Если вы хотите, чтобы при решении задачи с параметром учащиеся обратили основное внимание на идейную сторону, то лучше сформулировать ее так, как это сделано в задаче 2.8.

2.1. Решите уравнение $\frac{\sqrt{x+2}-x}{2-x} = \frac{4}{5}$.

2.2. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} = \frac{x-3\sqrt{x-2}+2}{9}$.

2.3. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$.

2.4. Решите уравнение $x = 2 + \sqrt{2+\sqrt{x}}$.

2.5. Решите уравнение $\sqrt{x^2+6x+2} - \sqrt{x^2+x+1} = 5x+1$.

2.6. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$.

2.7. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{6-x}=a$ имеет решение?

2.8. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x^2-6x}=a$?

2.9. Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\geq\frac{1}{\sqrt{x}}$.

2.10. Решите неравенство $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x}{3x-1}}\leq 1$.

2.11. Решите неравенство $\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{x^2-x+1}\leq 1$.

2.12. Решите неравенство $|x-2|+|x-4|\leq\sqrt{x^2-10x+21}$.

2.13. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{6-3x}+x}\leq\frac{1}{2}$.

2.14. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-35x}\leq 8$.

2.15. Решите неравенство $\sqrt{|2x-1|}\geq ax+1$.

2.16. Решите систему $\begin{cases}\sqrt{3x+y}-\sqrt{2x-y}=2,\\ \sqrt{3x+y}-\sqrt{2y-x}=1.\end{cases}$

2.17. Стенки сосуда образованы точками параболы $y=2x^2$ при ее вращении вокруг оси симметрии. В вертикально стоящий сосуд уронили шар объемом $\frac{1}{10}$. Коснется ли шар дна сосуда?

Комментарии и советы

2.1. Решайте стандартно, но внимательно; обратите внимание, что в левой части находится дробь.

2.2. Подсказка: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$. Еще не забудьте, что искать область определения нужно у исходного уравнения.

2.3. В данной задаче нужно честно два раза возвести в квадрат, а в полученном уравнении четвертой степени сделать замену $t = x + \frac{1}{x}$. Кстати, вам очевидно, что корень – единственный?

2.4. Сделайте замену $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$.

2.5. Один из корней очевиден, однако, чтобы найти и другие корни уравнения, удобно положить $u = \sqrt{x^2 + 6x + 2}$, $v = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

2.6. Не советую писать решение стандартного тригонометрического уравнения $\sin x = a$ в виде $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$.

2.7. Наиболее простой способ решения основан на исследовании функции $y = \sqrt{x} + \sqrt{6 - x}$. Можно также написать систему двух уравнений с двумя неизвестными и исследовать существование точек пересечения прямой и четверти окружности.

2.8. Другого способа решения, кроме как основанного на свойствах функции, здесь нет. Кстати, дифференцировать не надо. Также обратите внимание, что у области определения есть изолированная точка.

2.9. Совсем стандартная задача. Начинайте преобразовывать и ничего не бойтесь.

2.10. Учтите, что луч $(-\infty; 0)$ также входит в область определения неравенства.

2.11. Конечно, вычитаемое лучше перенести направо. Можете ли вы сразу сказать, какую степень будет иметь алгебраическое выражение, полученное после двукратного возведения в квадрат?

2.12. Придется решать три неравенства. Занудно, но другого способа не видно.

2.13. Множеством решений неравенства $\frac{A}{B} \leq 0$ является объединение решений следующих систем неравенств

$$\begin{cases} A \geq 0, \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A \leq 0, \\ B > 0. \end{cases}$$

2.14. См. комментарий к задаче 2.8.

2.15. Автор не верит, что кто-то сможет решить данное неравенство без использования его графической интерпретации. По сравнению с задачей 10 добавился только модуль, однако задача стала гораздо сложнее. Кто не верит – может взглянуть на ответ.

2.16. Напишите уравнение, из которого можно будет найти отношение $\frac{y}{x}$. Вначале придется доказать, что $x \geq 0$ для всех точек (x, y) из области определения данной системы.

2.17. По-существу, это задача с параметром. Поставим вопрос следующим образом: каким должен быть радиус шара, чтобы он смог коснуться дна сосуда? Достаточно рассмотреть вертикальное сечение. Если r – радиус шара, то он коснется дна в том случае, если при всех y верно неравенство $\sqrt{r^2 - 2ry} \leq \sqrt{\frac{y}{2}}$. Радиус R данного шара определим из формулы $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{10}$.

Ответы и комментарии

2.1. $x = 7$.

2.2. $x = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$. Здесь нет опечатки, корень – единственный!

2.3. $x = \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}$. Если бы уравнение четвертой степени не оказалось возвратным, то решить его было бы практически невозможно.

2.4. $x = 4$. Тот, кто решил задачу самостоятельно, поймет, отчего бывает удобно перейти к системе – симметрия лучше видна!

2.5. $x = -\frac{1}{5}; \frac{2-\sqrt{88}}{21}$. Можно было не вводить дополнительные обозначения, однако в таком случае пришлось бы сделать формальное преобразование: умножить правую и левую части на сумму корней.

2.6. $x = \pi(2k+1) - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Из всех решений уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ надо выбрать те, косинус которых отрицателен.

2.7. При $a \in [\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$. В духе "современной моды" задачу можно было сформулировать так: найдите все целые значения a, при которых уравнение имеет решение.

2.8. При $a = 0$ и $a \in [\sqrt{15}; \sqrt{20})$.

2.9. $x \in \left[1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

2.10. $x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. То, что левый луч состоит из решений, очевидно; далее просто.

2.11. $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$.

2.12. $x \in \left[\frac{5}{3}; 5 - 2\sqrt{2}\right]$.

2.13. $x \in \left(-\infty; -\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right] \cup [-1; 2]$.

2.14. $x \in [-1; 0]$.

2.15. Для краткости записи ответа положим $x_1 = \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2}$

$x_2 = \frac{1-a+\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2}$, $x_3 = -\frac{2a+2}{a^2}$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&x \in (-\infty; 0] \text{ при } a > \sqrt{2} - 1;\\
&x \in (-\infty; 0] \cup [x_1; x_2] \text{ при } 0 < a \le \sqrt{2} - 1;\\
&x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \text{ при } a = 0;\\
&x \in [x_3; 0] \cup [x_1; +\infty) \text{ при } -1 \le a < 0;\\
&x \in [0; x_3] \cup [x_1; +\infty) \text{ при } -2 \le a < -1;\\
&x \in [0; +\infty) \text{ при } a < -2.
\end{aligned}$$

2.16. $(x, y) = (2, 3)$.

2.17. Нет, не коснется. Прекрасная простая задача с неожиданной формулировкой.

3. Множества на плоскости

Задание множеств уравнениями и неравенствами. Объединение и пересечение. Симметрии. Прямые, параболы, гиперболы и окружности.

Обсуждение. Данная тема интересна и полезна со многих точек зрения. Прежде всего, как уже было показано в предыдущих разделах, она важна с прагматической точки зрения, поскольку при решении задач с параметрами бывает полезно изобразить некое множество (см. также задачу 1). Далее важно, что многие ошибки, которые делают учащиеся при решении неравенств (реже, уравнений), связаны с преобразованиями, при выполнении которых ученик просто не задумывается о том, верно ли то, что он делает. Если аналогичную ошибку сделать при решении задачи, в которой требуется нарисовать множество на плоскости, то получится совсем иная картинка и результат сделанной ошибки будет ясно виден. В этой связи часть упражнений должна быть направлена на то, чтобы выработать у учащихся привычку думать о том, что они делают (задача 2). Кроме того, на примерах подобных задач можно повторить стандартные методы решения: разложение на множители, метод интервалов и т. п. Наконец, ответом в таких задачах являются картинки, зачастую вполне симпатичные.

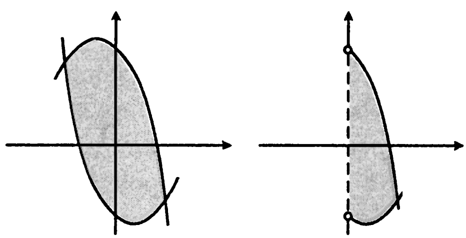
Для того чтобы сделать формулировки менее громоздкими, введем следующее соглашение. Вместо слов – множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (неравенству), будем говорить о множестве, заданном уравнением (неравенством).

Задача 1. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством $x^2 + |x + y| \leq 2$.

Перепишем данное неравенство в виде $|x+y| \leq 2 - x^2$ и запишем равносильную ему систему неравенств

$$\begin{cases} x+y \leq 2-x^2, \\ x+y \geq x^2-2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \leq 2-x-x^2, \\ y \geq x^2-x-2. \end{cases}$$

Первое из них задает множество точек, лежащих ниже параболы $y = 2 - x - x^2$ (или на ней), второе – множество точек, лежащих выше параболы $y = x^2 - x - 2$ (или на ней самой). Полученная система задает их общую часть (пересечение), каковым является множество, ограниченное дугами этих парабол между точками их пересечения (левый рисунок). Так как $2-x-x^2 = x^2-x-2$ при $x = \pm\sqrt{2}$, то этими точками являются $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



Теперь давайте сформулируем стандартную задачу, при решении которой можно использовать построенную картинку. К примеру, поставим вопрос: при каких значениях a неравенство $x^2 + |x+a| \leq 2$ имеет положительные решения?

Возьмем правую часть построенного множества (правый рисунок). На геометрическом языке поставленный вопрос звучит так: при каких значениях a горизонтальная прямая $y = a$ пересекает это множество? Ответ очевиден: при $a \in \left[-\frac{9}{4}; 2\right)$.

Понятно, что можно поставить много вопросов, подобных только что сформулированному; предоставьте вашим ученикам возможность самим задать себе вопрос.

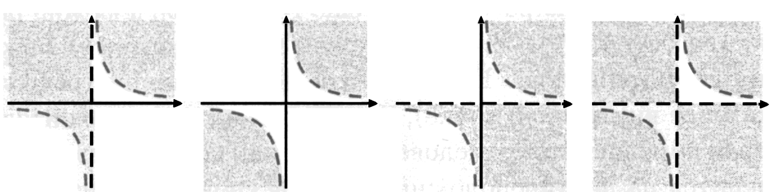
Задача 2. Изобразите на плоскости множества, заданные неравенствами: а) $y > \frac{1}{x}$; б) $xy > 1$; в) $x > \frac{1}{y}$; г) $\frac{1}{xy} < 1$.

Каждое из выписанных неравенств получается из предыдущего умножением (делением) на x или y. Почти каждый школьник знает, что при умножении обеих частей неравенства на одно и то же число (выражение) необходимо учитывать знак этого числа, но, к сожалению, слишком часто слишком многие об этом почему-то забывают.

Итак, обозначим через A, B, C, D множества, заданные соответствующими неравенствами. Множество A состоит из точек, лежащих выше графика $y = \frac{1}{x}$, являющегося гиперболой (рисунок *а*). Теперь преобразуем неравенство $y > \frac{1}{x}$, переписав его в виде $\frac{xy-1}{x} > 0$, которое будет иметь место, если

$$\begin{cases} xy > 1, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy < 1, \\ x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, те части множеств A и B, которые лежат в правой полуплоскости (там, где $x > 0$), совпадают друг с другом. Если же $x < 0$, то, наоборот, они не имеют друг с другом общих точек. Таким образом, мы получаем картинку, на которой изображено множество B (рисунок *б*).



а *б* *в* *г*

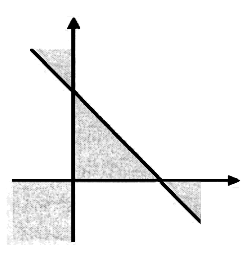
Для построения этого множества мы могли рассуждать по-другому, используя аналог очень популярного метода интервалов (его обоснование будет приведено далее). Множество, заданное уравнением $xy = 1$, является гиперболой, которая разбивает плоскость на три части. Идея метода состоит в том, что, поскольку в каждой из этих частей выражение $xy-1$ сохраняет знак, то для его определения достаточно подставить в это выражение координаты какой-то точки области. Последовательно подставив $(x, y) = (0, 0)$; $(2, 2)$ и $(-2, -2)$, мы и получим, что множество B имеет изображенный на рисунке *б* вид.

На рисунке *в* изображено множество C; поскольку $x > \frac{1}{y}$, то оно состоит из точек, лежащих правее все той же гиперболы. Другой способ рассуждения основан на преобразовании $x - \frac{1}{y} = \frac{xy-1}{y}$. Таким образом, там, где $y > 0$, C совпадает с B, а в нижней полуплоскости (где $y < 0$), оно совпадает с множеством, заданным неравенством $xy < 1$.

Наконец, множество D состоит из тех точек, для координат которых $xy < 0$ или $xy > 1$ (рисунок *г*).

Задача 3. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством $x^2y + xy^2 \le xy$.

Итак, $x^2y + xy^2 - xy = xy(x + y - 1) \le 0$. Рассмотрим уравнение $xy(x + y - 1) = 0$, которое задает объединение трех прямых: оси ординат, оси абсцисс и прямой $y = 1 - x$, разбивающих плоскость на семь областей. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x + y \le 1$, следовательно, из точек первого координатного угла в искомое множество входят только точки заштрихованного на рисунке прямоугольного треугольника (и, разумеется, сами оси координат). Можно рассмотреть еще три случая, а можно рассуждать следующим образом (сравните с чередованием знаков в методе интервалов). Если перейти через границу треугольника (в ее внутренней точке), то ровно один из сомножителей из трех поменяет знак, следовательно, знак всего произведения изменится на противоположный. Чтобы снова получить отрицательное значение произведения, надо еще раз перейти через границу области.



Следующая задача поможет вам научиться решать логарифмические неравенства, основание которых не является числом, а зависит от переменной (переменных).

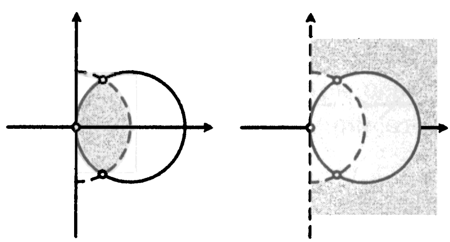
Задача 4. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством $\log_{x^2+y^2} 2x \le 1$.

Данное неравенство равносильно следующей совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ x^2 + y^2 \le 2x, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ x^2 + y^2 \ge 2x, \\ x > 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает единичную окружность (с центром в начале координат), а неравенства $0 < x^2 + y^2 < 1$ задают внутренность единичного круга с удаленным из него центром. Осталось выяснить, что за множество задано неравенством $x^2 + y^2 \le 2x$. Выделив полный квадрат, получим, что $x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1 \le 0$. Таким образом, это неравенство задает круг радиусом 1 с центром в точке $P(1, 0)$.

Получаем, что первая система определяет множество, изображенное на левом рисунке, вторая – то, что изображено на правом, а ответом является их объединение.



Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ задает окружность радиусом r ($r > 0$) с центром в точке $P(x_0, y_0)$. В общем случае, уравнение второго порядка с равными коэффициентами при x^2 и y^2, не содержащее член xy, задает окружность (или точку, или пустое множество). Для нахождения ее центра и радиуса достаточно выделить полные квадраты по обеим переменным. К примеру, так как

$$x^2+y^2-2x+2y=(x-1)^2+(y+1)^2-2,$$

то уравнение $x^2+y^2-2x+2y=0$ задает окружность радиусом $\sqrt{2}$ с центром в точке $P(1,-1)$.

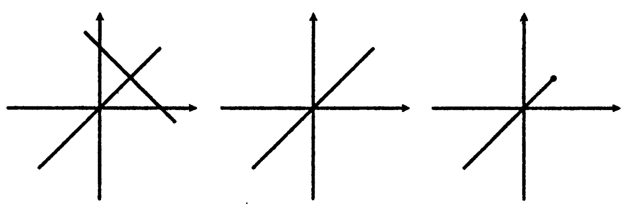
> Обратите внимание, что эта окружность проходит через начало координат, поскольку пара $(0,0)$, очевидно, удовлетворяет исходному уравнению.

Задача 5. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $f(x)=f(y)$, если: а) $f(x)=x^2-2x$; б) $f(x)=x^3+x$; в) $f(x)=\sqrt{1-x}$; г) $f(x)=\cos x$.

Ясно, что множество, заданное уравнением указанного типа, содержит ту часть прямой $y=x$, для которой x лежит в области определения данной функции. В каком случае искомое множество не содержит других точек?

а) Имеем, $x^2-2x=y^2-2y$, или $(x-y)(x+y-2)=0$, таким образом, искомое множество является объединением прямых $y=x$ и $y=2-x$ (рисунок *а*).

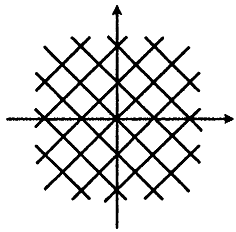
б) Имеем, $x^3+x=y^3+y$, или $(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0$. Поскольку $x^2+xy+y^2\geq 0$ при всех x и y, то вторая скобка в ноль обращаться не может. Ответ на рисунке *б*.



а *б* *в*

в) $\sqrt{1-x}=\sqrt{1-y}$, если $y=x\leq 1$ (рисунок *в*).

г) $\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}=0$, если $\frac{x+y}{2}=\pi k$ или $\frac{y-x}{2}=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Таким образом, искомым множеством является объединение двух семейств параллельных прямых: $y=2\pi k-x$ и $y=x+2\pi k$ (рисунок *г*).

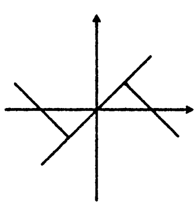


г

Два примера на повторение, в которых появятся симпатичные картинки.

Задача 6. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $|x - y| = x^2 - y^2$.

Если $x \geq y$, то мы получим уравнение $x - y = x^2 - y^2$, или $(x - y)(x + y - 1) = 0$, таким образом, $y = x$ или $y = 1 - x$. Из точек второй прямой $y = 1 - x$ условию $x \geq y$ удовлетворяет только ее, так сказать, нижняя половина: $x \geq 1 - x$ при $x \geq \frac{1}{2}$. Аналогичным образом можно было бы и провести исследование в предположении, что $x \leq y$. Однако естественнее воспользоваться симметрией искомого множества. Положим $f(x, y) = |x - y| - (x^2 - y^2)$. Функция $f(x, y)$ является четной в том смысле, что $f(-x, -y) = f(x, y)$. Следовательно, если точка $A(x, y)$ входит в рассматриваемое множество, то и точка $B(-x, -y)$ ему принадлежит, таким образом, это множество симметрично относительно начала координат. Добавив к найденному множеству его образ при центральной симметрии относительно точки O, мы и получим ответ (рисунок).



Задача 7. Найдите все значения a, при которых найдутся такие действительные числа x и y, что $\sqrt{a + 2xy} = x + y + 1$.

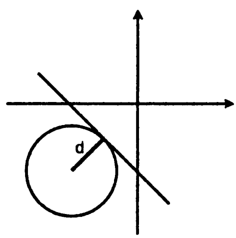
Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим уравнение $a + 2xy = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$, или

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = a + 1.$$

Полученное уравнение задает (при $a > -1$) окружность радиусом $\sqrt{a+1}$ и центром в точке $P(-1,-1)$. Однако исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = a + 1, \\ x + y + 1 \geq 0, \end{cases}$$

таким образом, оно задает пересечение найденной окружности с полуплоскостью $x + y + 1 \geq 0$. Следовательно, осталось выяснить, при каких a в этой полуплоскости окажется хотя бы одна точка окружности. Ответ ясен: если радиус окружности не меньше расстояния d от ее центра до данной прямой (рисунок). Поскольку d – это длина половины диагонали единичного квадрата, то $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $a \geq -\frac{1}{2}$.



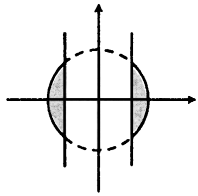
Еще одна техническая задача, при решении которой легко сделать ошибку. Не попадитесь!

Задача 8. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством $(x^2 + y^2 - 2)\sqrt{|x| - 1} \leq 0$.

Ответ, изображенный на рисунке, следует из того, что неравенство $A\sqrt{B} \leq 0$ равносильно совокупности, состоящей из уравнения $B = 0$ и системы неравенств

$$\begin{cases} A \leq 0, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что вертикальные прямые $x = \pm 1$ входят в искомое множество, в отличие от лежащих между ними дуг окружности $x^2 + y^2 = 2$.



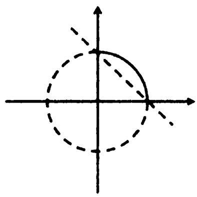
Теперь пример задачи, в решении которой геометрические соображения заменяют собой тригонометрические преобразования.

Задача 9. Решите неравенство $\cos x + \sin x \geq 1$.

Данное неравенство можно было бы легко решить посредством преобразования $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, однако приведем другое решение. Для удобства обозначим через t переменную в данном уравнении, чтобы сохранить обозначение x для абсциссы точки плоскости. Положив $x = \cos t, y = \sin t$, перейдем, тем самым, к системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y \geq 1, \end{cases}$$

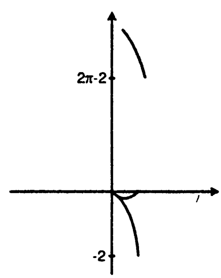
которая задает четверть единичной окружности (лежащую в первом координатном угле) – рисунок.



Поскольку геометрический смысл t – это угол поворота, отсчитываемый от оси абсцисс, то ответ: $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos x^2 = \cos(x + a)$ не имеет решений на отрезке $[0; 1]$.

Изобразим множество, при $x \in [0; 1]$ заданное уравнением $\cos x^2 = \cos(x+y)$. Имеем, $x^2+2\pi k = x+y$ или $2\pi k - x^2 = x+y$. Следовательно, искомое множество является объединением дуг парабол $y = x^2 - x$ и $y = -(x^2 + x)$ при их параллельном переносе на $2\pi k$ вдоль оси ординат (рисунок). Прямая $y = a$ не пересечет это множество в том и только в том случае, если $a \in \big(2\pi k; 2\pi(k + 1) - 2\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Однако следует иметь в виду, что число точек пересечения кривых не всегда очевидно "по картинке". Конечно, ясно, как пересекаются прямые и окружности, прямые и параболы, пара окружностей. Но в некоторых случаях не так-то просто понять, в скольких точках пересекаются, к примеру, две параболы. Рассмотрим следующую задачу.

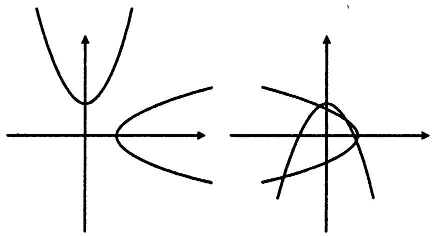
Задача 11. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = 1 - ay^2, \\ y = 1 - ax^2 \end{cases}$$

имеет два решения.

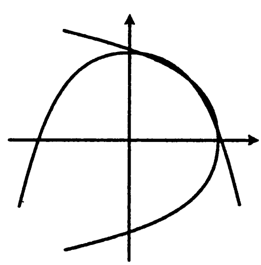
Ответ: $a \in (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; \frac{3}{4}]$.

Эта задача интересна тем, что естественный подход — посмотреть на картинки — может привести к неверному предположению.



а *б*

Если $a \neq 0$, то каждое из уравнений данной системы задает параболу с фиксированной вершиной. На рисунках *а* и *б* изображены параболы, соответственно, для "очень отрицательного" значения a, когда система решений не имеет и "очень положительного", когда ясно, что решений четыре. Если $a < 0$, то из симметричности картинки ясно, что возможные точки пересечения лежат на прямой $y = x$, откуда $ax^2 + x - 1 = 0$ и $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$. Таким образом, похоже, что при $a = -\frac{1}{4}$ система имеет одно решение (параболы касаются), а если $-\frac{1}{4} < a < 0$, то два. Случай $a > 0$ несколько более загадочен. Опять-таки ясно, что при $a > 1$ система имеет четыре решения, но что происходит, если $0 < a < 1$? Оказывается, параболы могут пересечься в четырех точках (рисунок *в*)!



в

Проделаем вычисления. Вычитая первое уравнение системы из второго, получаем $y - x = a(y-x)(x+y)$, откуда $y = x$ (этот случай был разобран), или же $a(x+y) = 1$. В последнем случае приходим к уравнению $1 - ax = a - a^2x^2$, в котором удобно сделать замену $u = ax$. Полученное уравнение $u^2 - u + (1 - a) = 0$ имеет решение при $a \geq \frac{3}{4}$.

Заметим, что если $a = \frac{3}{4}$, то $u = \frac{1}{2}$ и $x = y = \frac{1}{2a}$, т. е. три точки пересечения, расположенные в первом квадранте, "склеиваются" в одну. Наконец, если $a = 0$, то $x = y = 1$, т. е. система имеет одно решение.

Следовательно, необходимо научиться исследовать множество по свойствам задающего его уравнения. В следующем примере речь идет о свойствах известной кривой – эллипса (однако изучение кривых второго порядка не входит в школьную программу).

Задача 12. Рассмотрим множество C, заданное уравнением $x^2 + xy + y^2 = 3$.

1. Симметрично ли C относительно: а) оси абсцисс; б) начала координат; в) прямой $y = x$?

2. Найдите а) наименьшее; б) наибольшее расстояние от точек множества C до начала координат.

3. Найдите наименьший квадрат со сторонами, параллельными осям координат, содержащий внутри себя множество C.

1) Если $f(x, -y) = f(x, y)$ для всех пар (x, y), то множество, заданное уравнением $f(x, y) = 0$, симметрично относительно оси абсцисс. Пусть $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако если найдется такая точка (x_0, y_0), что $f(x_0, -y_0) \neq f(x_0, y_0) = 0$, то рассматриваемое множество не симметрично относительно оси абсцисс. В нашем примере $f(1, 1) \neq f(1, -1)$, таким образом, симметрии относительно оси абсцисс нет. С другой стороны, так как $f(-x, -y) = f(x, y) = f(y, x)$, то это множество симметрично как относительно начала координат, так и относительно прямой $y = x$.

2) Данную геометрическую задачу будем решать аналитическим методом, дав равносильную ей формулировку: найти

все значения a, при которых имеет решения система

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

Сделав замену $u = x + y$, $v = xy$, получим систему

$$\begin{cases} u^2 - v = 3, \\ u^2 - 2v = a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^2 - v = 3, \\ v = 3 - a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^2 = 6 - a, \\ v = 3 - a, \end{cases}$$

откуда $u = \pm\sqrt{6-a}$, $v = 3 - a$. Далее, система $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ разрешима только в том случае, если $u^2 - 4v \geq 0$. Следовательно, должно иметь место неравенство $6 - a - 4(3 - a) = 3a - 6 \geq 0$, так что $a \geq 2$. С другой стороны, $a \leq 6$, таким образом, $a \in [2; 6]$ и ответ на поставленный вопрос таков: наименьшее расстояние равно $\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{6}$.

3) Надеюсь, что всем ясно, что надо найти наименьшее значение c, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x = c. \end{cases}$$

Получаем уравнение $y^2 + cy + c^2 - 3 = 0$, которое разрешимо, если $c^2 - 4(c^2 - 3) = 12 - 3c^2 \geq 0$, т. е. при $c \in [-2; 2]$. Значит, данное множество содержится в квадрате со стороной 4.

Задача 13. Изобразите на плоскости множество точек с координатами (a, b), для которых имеет решение система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ |x - a| + |y - b| = 1. \end{cases}$$

Решать данную задачу аналитически вполне затруднительно. Используем следующее геометрическое соображение. Если уравнение $f(x, y) = 0$ задает множество A, то уравнение $f(x - a, y - b) = 0$ задает его образ при параллельном переносе на вектор $\overline{a}(a, b)$. Таким образом, в данной задаче требуется найти множество всех таких векторов, при переносе на которые квадрат $|x| + |y| = 1$ пересекается со своим образом. Ответом является квадрат, заданный неравенством $|x| + |y| \leq 2$.

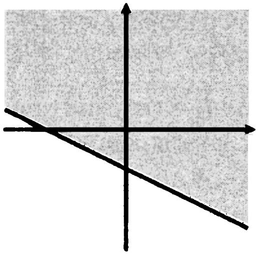
Справочник

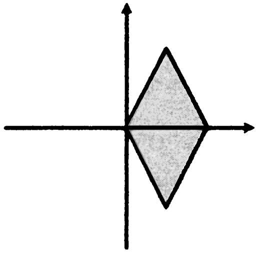
В следующей таблице указаны типы симметрий множества в зависимости от свойств задающего его уравнения.

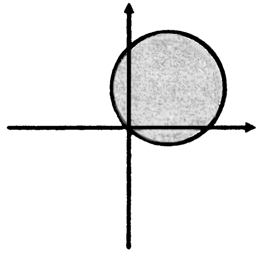
Соотношение	Тип симметрии
$f(-x, y) = f(x, y)$	относительно оси ординат
$f(x, -y) = f(x, y)$	относительно оси абсцисс
$f(-x, -y) = f(x, y)$	относительно начала координат
$f(x, y) = f(y, x)$	относительно прямой $y = x$
$f(x, y) = f(-y, -x)$	относительно прямой $y = -x$

Примеры множеств и уравнений (неравенств).

$x+2y+2 \geq 0$ $\qquad$ $2|x-1|+|y| \leq 2$ $\qquad$ $x^2+y^2-2x-2y \leq 0$







Собственно говоря, данные факты являются следствием более общих результатов, связывающих преобразование уравнения и преобразование заданного им множества.

Пусть F задано уравнением $f(x, y) = 0$. В правой колонке указано множество, заданное уравнением, записанным в левой колонке.

Уравнение	Множество
$f(-x, y) = 0$	Образ F при симметрии относительно оси ординат
$f(x, -y) = 0$	Образ F при симметрии относительно оси абсцисс
$f(-x, -y) = 0$	Образ F при симметрии относительно начала координат
$f(y, x) = 0$	Образ F при симметрии относительно прямой $y = x$
$f(-y, -x) = 0$	Образ F при симметрии относительно прямой $y = -x$
$f(x - a, y - b) = 0$	Образ F при параллельном переносе на $\overline{a}(a, b)$

Если F и G заданы уравнениями $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, соответственно, то уравнение $f(x, y)g(x, y) = 0$ задает объединение $F \cup G$ этих множеств, а уравнение $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 0$ задает их разность $F \setminus G$, т. е. множество, состоящее из тех точек F, которые не принадлежат G.

Приведем обоснование обобщенного метода интервалов, применяемого для построения множества, заданного неравенством $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \geq 0$, где функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ непрерывны. Пусть точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ находятся в одной и той же области, на которые разбило плоскость объединение множеств, заданных уравнениями $f(x,y) = 0$ и $g(x,y) = 0$. Соединим эти точки некоторой кривой, предположим, что $x(t)$ и $y(t)$ определяют движение точки по этой кривой от A до B при изменении значения t от 0 до 1. Рассмотрим вспомогательную функцию $h(t) = \frac{f(x(t),y(t))}{g(x(t),y(t))}$. Данная функция непрерывна и не принимает значения, равного нулю, поэтому ее значения при $t = 0$ и $t = 1$ имеют одинаковые знаки, которые и равны знакам данной в условии дроби, которые она принимает в точках A и B, соответственно.

Задачи для самостоятельного решения

Изобразите множество, заданное уравнением (неравенством).

3.1. а) $xy + 1 = x + y$; б) $2x^2 \geq xy + y^2$; в) $x^3 + xy^2 = 2x^2$; г) $x^2 + y^2 = 1 + 2|xy|$.

3.2. а) $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$; б) $x^2 + y^2 = 2|x + y|$;
в) $x^2 + y^2 = 2(|x| - |y|)$.

3.3. $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4 = 0$.

3.4. $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{x - y}$.

3.5. а) $\max\{|x|, |x - y|\} \leq 1$; б) $\max\{|x|, |y|\} \geq 1$;
в) $\min\{x^2 + y^2 + 2x, x^2 + y^2 - 2x\} \leq 1$.

3.6. а) $(x - |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 4$; б) $x|x| + y|y| = 2(x + y)$;
в) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{2 - y}{2 - x}$.

3.7. а) $\sqrt{2x + y} = x + 1$; б) $\sqrt{x + y} \geq x$.

3.8. а) $\log_{x+1}(x + y^2) \leq 1$; б) $\log_{x^2}(xy) \geq 1$.

3.9. Найдите все такие значения a, при которых уравнение $\cos|3x+1| = \cos(x-a)$, рассматриваемое на отрезке $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$, не имеет на нем решений.

3.10. Найдите все a, при которых уравнение $\cos\sqrt{ax-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет не менее семи решений.

3.11. Изобразите на плоскости множество середин всех хорд графика $y = x^3$.

3.12. Найдите все a, для которых найдется такое число r, что система

$$\begin{cases} 3|x| + |y| = 3, \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

3.13. Какие значения может принимать сумма x и y, если

$$|y| = (x-2)(4-x)?$$

3.14. а) Изобразите множество, заданное уравнением

$$|x-y| + |2x-y| = 2.$$

б) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение

$$|x-a| + |2x-a| = 2?$$

3.15. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение

$$\max\{2x-5, \min\{x, 3-2x\}\} = a?$$

Комментарии и советы

3.1. Произведите разложение на множители.

3.2. Решение упростится, если обратить внимание на типы имеющихся симметрий искомых множеств.

3.3. Для того чтобы произвести разложение на множители, будет удобно сделать замену $t = x^2 + y^2$.

3.4. См. решение задачи 3.

3.5. Задача на объединение и пересечение множеств; в каком случае наибольшее из двух чисел будет не меньше (не больше) данного третьего?

3.6. Получатся очень симпатичные картинки.

3.7. Стандартная задача на повторение материала предыдущего раздела.

3.8. См. задачу 4.

3.9. См. решение задачи 10.

3.10. Обратите внимание, что график $y = \sqrt{ax - x^2}$ является полуокружностью радиусом $\frac{|a|}{2}$.

3.11. Искомое множество состоит из точек с координатами (a, b), при которых система

$$\begin{cases} x + y = 2a, \\ x^3 + y^3 = 2b \end{cases}$$

имеет решение.

3.12. В задаче идет речь о месте расположения центров окружностей, пересекающих ромб в трех точках. Не упустите особые случаи!

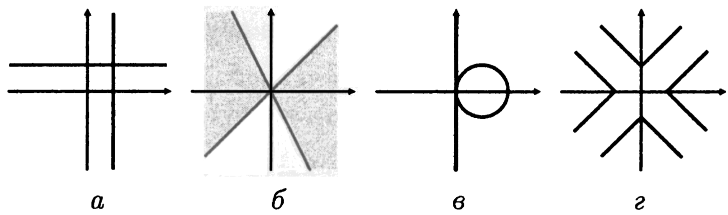
3.13. Изобразите вначале множество, заданное данным в условии уравнением.

3.14. а) Честно раскройте модули. б) См. предыдущий пункт.

3.15. Постройте график.

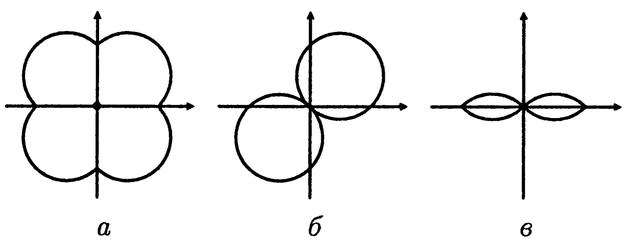
Ответы и комментарии

3.1. Таких примеров можно придумать бесконечно много, хорошие задачи для проверочных работ – пусть ребята привыкают к картинкам.



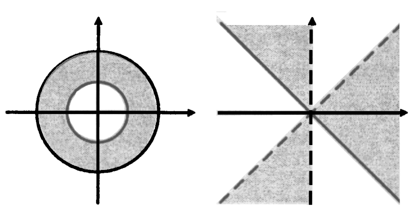
3.2. Начало координат входит в каждое из множеств.

Прекрасный набор задач, причем именно набор – их лучше давать вместе.



3.3. Ответ на левом рисунке ниже.

Предложите ученикам поэкспериментировать. Кстати, важный вопрос: можно ли написать уравнение четвертого порядка, которое будет задавать три вложенные друг в друга окружности (более общо, овала)?



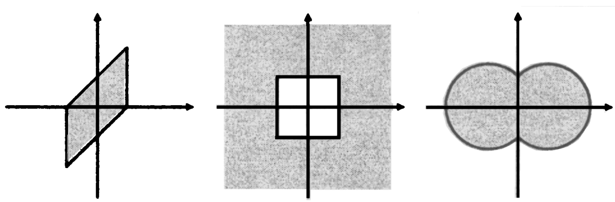
3.4. Ответ на правом рисунке выше.

Сравните длину рассуждения по "обобщенному методу интервалов" с прямым перебором вариантов распределения знаков линейных множителей.

3 Зак. 1116

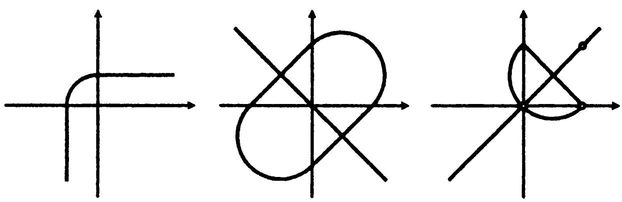
3.5. Ответ в задаче а): пересечение двух полос.

Не правда ли, задача исключительной простоты, но все ли ребята ее решат? Подумайте, отчего у них будут возникать трудности?



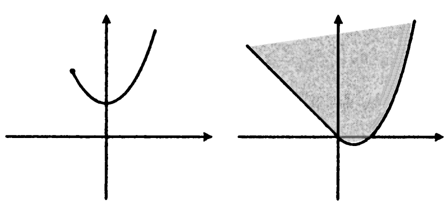
а *б* *в*

3.6. Пункт в) упростится, если мы будем искать множество, заданное уравнением $|x|(2-x) = |y|(2-y)$. В чем его отличие от множества, заданного уравнением в?



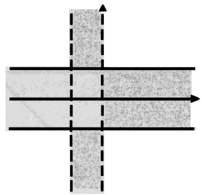
а *б* *в*

3.7. Конечно, после того как ребята нарисуют картинки, надо сформулировать задачи с параметром, решение которых основано на этих картинках.

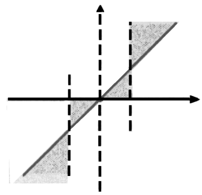


а *б*

3.8. Ответы на рисунках.



а



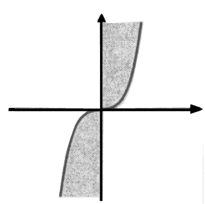
б

3.9. Ответ: при $a \in \left(\frac{7}{3}+2\pi k; 2\pi-3+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Обратите внимание, что модули здесь раскрывать не надо, поскольку из равенства косинусов следует, что $x-a = \pm(3x+1)+2\pi k$.

3.10. Ответ: при $|a| \geq \frac{15}{2}\pi$. Эта задача даже проще предыдущей. Все, что надо понять, это каков должен быть радиус полуокружности, центр которой лежит на оси абсцисс, чтобы она пересекала бы по крайней мере четыре прямые из семейства $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

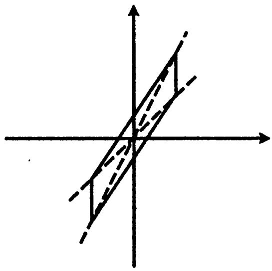
3.11. Ответ: при $a = \pm 4$ или $a \in (-1; 6\sqrt{10}-19) \cup (19-6\sqrt{10}; 1)$.

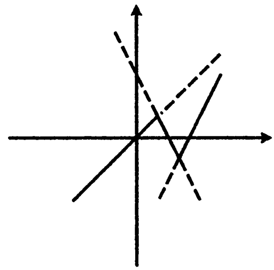
3.12. Ответ на рисунке. Прямые вычисления показывают, что пара (a, b) является серединой хорды кубической кривой $y = x^3$ тогда и только тогда, когда $a = b = 0$ или имеет место неравенство $\frac{b-a^3}{a} > 0$.



3.13. $\left[\frac{7}{4}; \frac{17}{4}\right]$.

3.14. а) Ответ на левом рисунке далее. б) Одно решение при $a = \pm 4$; два – при $|a| < 4$.





3.15. Ответ следует из изображенного на правом рисунке графика: три решения при $a \in (-1; 1)$; два решения при $a = \pm 1$; одно решение при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

4. Множество значений функции

Множество значений функции (отображения). Композиции (сложные функции). Аналитические методы исследования уравнений и неравенств. Последовательность действий.

Обсуждение. Как известно, *повторенье – мать ученья*, так что в этом разделе мы по-прежнему будем использовать введенные ранее идеи и методы. Кроме того, новая техника и новые идеи позволят нам решать более сложные задачи, которые покажутся совсем простыми. К примеру, таковыми будут практически все задачи раздела **С** Единого государственного экзамена. Читателю может показаться, что автор уж слишком часто повторяет (словно заклинание), что *задача проста, задача стандартна*, в то время как большинство учащихся самостоятельно решить ее на смогут. Есть по крайней мере две причины, по которым ребята не могут справиться с несложными заданиями. Во-первых, они приучены решать типичные задачи на применение стандартных алгоритмов (если бы...), поскольку именно этому, в основном, и учат на уроках математики. И они совершенно теряются, если формулировка задачи является неожиданной. Во-вторых, как часто бывает не только в школе, простое решение задачи можно найти, если начать рассуждать на уровне математических *понятий.*

В этом разделе будет обсуждаться понятие множества значений функции (числовой, а также принимающей значения на плоскости). Кроме того, из обсуждения будет видно, насколько бывает проще решить задачу, если представить некую функцию в виде композиции более простых, т. е. рассмотреть так называемую "сложную" функцию. Вообще, чем большим числом методов вы будете владеть, тем гибче будет ваше мышление!

Напомним, что если областью определения функции f является множество D, то множеством значений этой функции называется множество, состоящее из всех ее значений $f(x)$ при $x \in D$. Предыдущая фраза может показатся полной тавтологией, однако смысл ее состоит в том, чтобы рассматривать множество значений функции как единый *объект*, который к тому же имеет непосредственное отношение к стандартным задачам школьной математики. Именно уравнение $f(x) = b$ имеет решение $x \in D$ тогда и только тогда, когда b принадлежит множеству значений функции f на множестве D. Заметим, что в математике принято называть множество значений f образом множества D (обозначение $E = f(D)$).

Наше обсуждение мы начнем с трех задач, которые можно предложить даже девятиклассникам, а потом обсудим, проще ли их будет решить одиннадцатиклассникам.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\frac{x}{x^2+x+1} = a$.

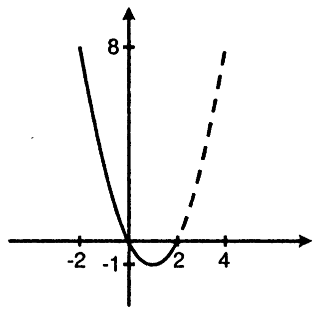
При $a = 0$ решением является $x = 0$. При $a \neq 0$ мы получаем квадратное уравнение $ax^2 + (a-1)x + a = 0$, которое разрешимо, если $(a-1)^2 - 4a^2 = -3a^2 - 2a + 1 \geq 0$. Таким образом, ответ: при $a \in \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Теперь задача с несколько неожиданной формулировкой.

Задача 2. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 - 2x = a^2 - 2a$ не имеет решений на отрезке $[-2; 2]$.

Из разложения $x^2 - a^2 - 2(x-a) = (x-a)(x+a-2)$ следует, что корнями данного уравнения являются числа a и $2-a$. По условию, эти числа не должны попадать в отрезок $[-2; 2]$, следовательно $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ и одновременно $a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, так что $a \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$ – это и есть ответ.

Простота этого рассуждения связана с простотой явных формул для корней этого уравнения. Теперь рассмотрим другое решение. Прежде всего найдем все значения b, для которых уравнение $f(x) = b$ имеет решение $x \in [-2; 2]$, т. е. найдем множество значений функции $f(x) = x^2 - 2x$ при $x \in [-2; 2]$. Проще всего это сделать по изображенному на рисунке графику этой функции, из которого ясно *видно*, что множеством значений является отрезок $[-1; 8]$.



Следовательно, для того чтобы уравнение решений не имело, должно быть верно одно из неравенств $b < -1$ или $b > 8$. Неравенство $a^2 - 2a < -1$ решений не имеет, так что осталось решить неравенство $a^2 - 2a - 8 > 0$, откуда и следует ответ. Кстати, этот ответ также можно было получить, взглянув на построенный график.

Конечно, в данном случае первое решение выглядит проще, но и в нем есть логическая "изюминка".

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $3\sqrt{3 + 2x - x^2} = a + 2x - x^2$.

Конечно, метод решения этой задачи был уже изложен ранее в *разделе 2*, ничего нового здесь, по-существу, сказано не будет; однако важны новые слова, которые мы будем употреблять. Итак, положим $t = \sqrt{3 + 2x - x^2}$. Выражение под знаком корня должно быть неотрицательным, следовательно, нас интересует множество неотрицательных значений квадратичной функции $y = 3 + 2x - x^2$. Поскольку ее наибольшее значение достигается в точке $x = 1$, то искомым множеством является отрезок $[0; 4]$, поэтому множеством значений квадратного корня (для которого мы использовали обозначение t) является отрезок $[0; 2]$. Данное уравнение относительно переменной t имеет вид $3t = a + t^2 - 3$, или $3 + 3t - t^2 = a$, таким образом, оно имеет решение, если a входит в множество значений квадратичной функции $y = 3 + 3t - t^2$ при $t \in [0; 2]$. Эта функция достигает своего наибольшего значения $y = \frac{21}{4}$ при $t = \frac{3}{2}$, а свое наименьшее значение $y = 3$ она принимает при $t = 0$. Таким образом, ответ в задаче: при $a \in \left[3; \frac{21}{4}\right]$.

Как вы думаете, какой процент 11-классников при решении задачи 1 начнет дифференцировать функцию $y = \frac{x}{x^2+x+1}$ вместо перехода к квадратному уравнению? Думаю, что этот процент будет еще выше, если в формулировке задачи будет явно сказано, что требуется найти множество значений этой функции. Другое дело, что на месте ребят я бы поступил следующим образом. Ясно, что ноль входит в множество значений, поэтому мы вправе предполагать, что $x \neq 0$. Если мы найдем множество значений функции $y = \frac{x^2+x+1}{x}$, то сразу же найдем и множество значений искомой функции. Поскольку $\frac{x^2+x+1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1$, то остается продифференцировать функцию $y = x + \frac{1}{x}$, хотя хороший 11-классник просто обязан знать, что множеством ее значений является объединение лучей $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Следующая задача ничуть не сложнее, хотя она и входила в раздел **С** Единого государственного экзамена 2003 года.

Задача 4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $5 - 3\cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет корень.

Действительно, замена $t = \cos x$ приводит к стандартной задаче: найти множество значений функции $y = t^2(5 - 3t)$ на множестве $[-1; 0) \cup (0; 1]$. Обратите внимание, что $t \neq 0$!

В отличие от предыдущей задачи, в данном случае придется найти производную. Имеем, $y' = 10t - 9t^2 = t(10 - 9t)$, таким образом, эта функция убывает на промежутке $[-1; 0)$ и возрастает на $(0; 1]$. Составим таблицу значений функции:

t	-1	0	1
y	8	0	2

из которой следует, что промежуток $(0; 8]$ является множеством ее значений на $[-1; 0) \cup (0; 1]$.

В решении двух предыдущих задач использовалась следующая общая идея, связанная с понятием так называемой "сложной" функции. Именно множеством значений функции $y = f(g(x))$ на множестве D является множество значений функции f на множестве значений $D_1 = g(D)$ функции g. В задаче 3 такими функциями были $f(x) = 3 + 3x - x^2$ и $g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$, в задаче 4: $g(x) = \cos x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $f(x) = x^2(5 - 3x)$.

Обратите внимание, что для аргумента обеих функций использовано одно и то же обозначение x – никакой роли это не играет.

Задачи, подобные задаче 4, встречаются и на вступительных экзаменах.

Задача 5. Найдите все значения a, при которых при всех $x \geq 0$ имеет место неравенство $4^{x+1}+9\cdot 4^{-x}-2\left(2^{x+1}+3\cdot 2^{-x}\right) \geq a$.

Выражение, стоящее в левой части неравенства, можно записать в виде композиции $f(g(2^x))$ (совсем "сложной" функции), где $g(x) = 2x + \frac{3}{x}$ и $f(x) = x^2 - 2x - 12$. По-видимому, более привычным будет сделать следующие замены и соответствующие преобразования:

$$t = 2^x, \ u = 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x} = 2t + \tfrac{3}{t},$$
$$4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} = (2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x})^2 - 12 = u^2 - 12,$$

так что данное неравенство примет вид $u^2 - 2u - 12 \geq a$, где $u = 2t + \frac{3}{t}$, а $t = 2^x$.

Теперь ясно, что в качестве a следует взять наименьшее значение при $x \geq 0$ найденной композиции. Другими словами, следует найти множество значений этой функции и выбрать в нем наименьшее.

Множеством значений функции $y = 2^x$ при $x \geq 0$ является луч $[1; +\infty)$. Для того чтобы найти множество значений функции $y = 2x + \frac{3}{x}$ на этом луче, придется вычислить производную:

$y' = 2 - \frac{3}{x^2}$, которая обращается в ноль при $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Значит, эта функция убывает на отрезке $\left[1; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ и возрастает на луче $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right)$, таким образом, множеством ее значений является луч $[2\sqrt{6}; +\infty)$. Осталось найти наименьшее значение квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 12$. Так как эта функция является возрастающей на луче $[1; +\infty)$, то ее наименьшим значением на луче $[2\sqrt{6}; +\infty)$ является ее значение в его левом конце, равное $12 - 4\sqrt{6}$. Ответ: при $a \geq 12 - 4\sqrt{6}$.

Аналогичная, но более простая задача из раздела **С** ЕГЭ 2002 года.

Задача 6. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}\right).$$

Множеством значений функции $y = 125 + x^4$ является луч $[125; +\infty)$. Множеством значений функции $y = 13 + \log_5 x$ при $x \in [125; +\infty)$ является луч $[16; +\infty)$. Множеством значений функции $y = \frac{80}{x}$ при $x \in [16; +\infty)$ является промежуток $(0; 5]$. Наконец, искомое множество является множеством значений функции $y = \log_{0,2} x$ при $x \in (0; 5]$. Теперь следует отметить, что данная функция убывает на всей своей области определения, а так как $\log_{0,2} 5 = -1$, то ответ в задаче: $[-1; +\infty)$.

Возможно, что по правилам оформления решений на ЕГЭ, приведенное решение не будет считаться полным, но сути дела это не меняет.

Достаточно часто при решении уравнений (неравенств) бывает удобно сделать некоторую замену, что по-существу означает, что мы представили функцию в виде композиции более простых функций. Давайте решим такую задачу.

Задача 7. Известно, что отрезок $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ является решением неравенства $f(x) \leq 3$. Решите неравенства: а) $f(x^2) \leq 3$; б) $f(\cos x) \leq 3$; в) $f(2^x) \leq 3$.

В каждом из неравенств аргумент функции f должен лежать в отрезке $\left[-\frac{1}{2};2\right]$. Таким образом, для неравенства а) имеем $-\frac{1}{2} \le x^2 \le 2$, откуда $x \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$, для неравенства б): $-\frac{1}{2} \le \cos x \le 2$, или $\cos x \ge -\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. Наконец, в последнем случае $-\frac{1}{2} \le 2^x \le 2$, так что $x \in (-\infty;1]$.

Таким образом, по-существу мы имеет полторы задачи, а не три.

Возможно, что в некоторых случаях задачу следовало сформулировать по-другому, взяв, к примеру, в качестве f конкретную квадратичную функцию $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. В этом случае неравенства а–в приобретут, соответственно, вид $2x^4 - 3x^2 - 2 \le 0$, $\cos 2x - 3\cos x \le 1$ и $4^{x+\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x \le 2$.

Использование понятия "сложной" функции поначалу представляет трудности. К сожалению, достаточно часто учащиеся находятся под влиянием "магии букв", считая, что x – это всегда аргумент, а y – значение функции, так что, к примеру, им бывает непонятно, "какой буквой" следует обозначить аргумент функции f при вычислении значения композиции $f(g(x))$. Для ответа на первый вопрос следующей задачи не требуется вводить никаких обозначений, он поставлен для того, чтобы ребятам было проще понять, как ответить на следующий.

Задача 8. Известно, что $f(2x+1) = x^2$. Найдите $f(5)$ и $f(x)$.

Подставив $x = 2$ в данную формулу, получим, что $f(5) = 4$. Число $x = 2$ можно было найти "подбором", но понятно, что для любого другого числа a надо просто подобрать x из равенства $2x + 1 = a$; $x = \frac{a-1}{2}$, следовательно, $f(2x+1) = f(a) = \frac{(a-1)^2}{4}$. Значит, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$.

Задача 9. Найдите все линейные функции f, для которых $f(f(x)) = 4x + 3$.

По условию, $f(x) = ax + b$, тогда

$$f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1) = 4x + 3$$

тогда и только тогда, когда $a^2 = 4$ и $b(a+1) = 3$. Таким образом, если $a = 2$, то $b = 1$, а если $a = -2$, то $b = -3$.
Ответ: $f(x) = 2x + 1$ и $f(x) = -2x - 3$.

Задача 10. Известно, что функция f возрастает на луче $(-\infty; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $g(x) = f(x^2 - 1)$.

Ответ: функция g возрастает на $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $[0; \sqrt{2}]$, убывает на $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; +\infty]$. Действительно, если $x_1 < x_2 \leq -\sqrt{2}$, то $x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1 \geq 1$, значит,

$$g(x_1) = f(x_1^2 - 1) < f(x_2^2 - 1) = g(x_2),$$

а если $-\sqrt{2} \leq x_1 < x_2 \leq 0$, то $1 \geq x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1$, поэтому $g(x_1) > g(x_2)$. В оставшихся случаях можно провести аналогичные рассуждения или же воспользоваться четностью функции.

Приведем еще одно решение этой задачи. Предположим дополнительно, что функция f имеет производную в каждой точке. Тогда $f'(y) \geq 0$ при $y \leq 1$ и $f'(y) \leq 0$ при $y \geq 1$, следовательно, $f'(x^2 - 1) \geq 0$, если $x^2 - 1 \leq 1$, т. е. $|x| \leq \sqrt{2}$, и $f'(x^2 - 1) \leq 0$ при $|x| \geq \sqrt{2}$. Осталось заметить, что $g'(x) = f'(x^2 - 1)\,2x$, поэтому $g'(x) \geq 0$, если $f'(x^2 - 1) \geq 0$, $x \geq 0$, т. е. $x \in [\sqrt{2}; +\infty)$, или же если $f'(x^2 - 1) \leq 0$, $x \leq 0$, т. е. $x \in [-\sqrt{2}; 0]$.

Примеры, в которых появляются композиции функций, интересны еще и тем, что при их решении надо внимательно следить за последовательностью действий. Ясно, что функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, вообще говоря, не имеют друг с другом ничего общего. Например, если функция $g(x)$ четна, то четна и $f(g(x))$, в отличие от функции $g(f(x))$, о которой ничего такого определенно сказать нельзя.

Вопросов, подобных только что рассмотренному, можно поставить великое множество. Любой из них полезен уже тем, что при ответе на него необходимо рассуждать, а не просто проводить преобразования.

Задача 11. Известно, что уравнение $f(x^2) = 1$ имеет нечетное число решений. Укажите одно из них.

Ответ: $x = 0$, так как по всякому положительному решению уравнения $f(x) = 0$ можно построить два различных корня данного уравнения, в то время как их общее число нечетно.

Как это часто бывает, новые понятия осознать проще, если они применяются в задачах с непривычным содержанием. Рассмотрим два примера.

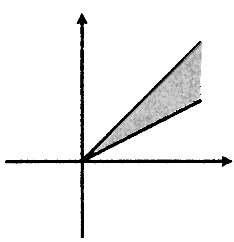
Задача 12. Изобразите на плоскости множество точек с координатами (a, b), для которых существует неотрицательное решение системы

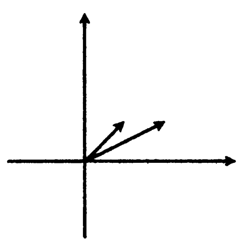
$$\begin{cases} 2x + y = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Равносильная формулировка: найти множество значений отображения $(x, y) \mapsto (2x+y, x+y)$ в предположении, что точка (x, y) лежит в первом координатном угле. С другой стороны, решать задачу проще именно в ее исходной постановке. Решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = a - b, \\ y = 2b - a, \end{cases}$$

поэтому из условий $x \geq 0$ и $y \geq 0$ следует, что $a \geq b$ и $a \leq 2b$. Множество точек, для которых верны найденные неравенства, изображено на левом рисунке.





Другой способ решения задачи основан на линейности данного отображения. Проведем следующее преобразование

$$(2x + y, x + y) = x(2, 1) + y(1, 1),$$

из которого следует, что вектор с координатами $(2x+y, x+y)$ является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами векторов $\overline{a}(2,1)$ и $\overline{b}(1,1)$ (правый рисунок). Осталось заметить, что эти вектора как раз и лежат на прямых $x = 2y$ и $y = x$.

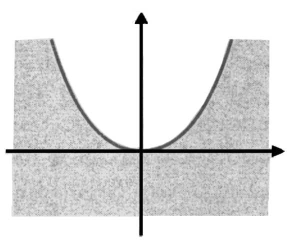
Смысл следующей задачи состоит в использовании определения понятия "множество значений" и геометрической интерпретации условия неотрицательности дискриминанта квадратного трехчлена; иного математического содержания задача не имеет.

Задача 13. Изобразите на плоскости множество значений отображения $F : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

Итак, надо изобразить множество точек с координатами (a, b), для которых имеет решение система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Данная система имеет решение тогда и только тогда, когда $a^2 - 4b \geq 0$, таким образом, искомое множество состоит из точек, лежащих не выше параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ (рисунок).



Формулировка следующей задачи несколько загадочна.

Задача 14. Двое рабочих, выполнив половину задания, увеличили свои производительности, один на 20%, а другой на 16%. В результате вторая половина задания была выполнена ими на один день быстрее, чем первая. Уложились ли они с выполнением задания в двухнедельный срок?

Обозначим через x и y производительности труда рабочих, а через t время, затраченное ими на выполнение первой половины задания. По условию, при работе над его второй половиной их производительности равны $1{,}2x$ и $1{,}16y$, соответственно. Поскольку на эту работу им потребовалось на день меньше, получим систему

$$\begin{cases} t(x+y) = \frac{1}{2}, \\ (t-1)(1{,}2x + 1{,}16y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решим систему, выразив x и y через t. Имеем $t = \frac{1}{2t} - x$, так что

$$1{,}2x + 1{,}16\left(\tfrac{1}{2t} - x\right) = \tfrac{1}{2}, \text{ или } 0{,}04x = \tfrac{1{,}16 - 0{,}16t}{2t(t-1)},$$

откуда после небольших преобразований получим, что

$$x = \tfrac{29-4t}{2t(t-1)}, \quad y = \tfrac{5(t-6)}{2t(t-1)}.$$

Поскольку $t > 1$, а производительности являются положительными числами, то, как следствие неравенств $x > 0$ и $y > 0$, получим, что

$$6 < t < \tfrac{29}{4}.$$

Так как на всю работу им потребовалось $2t - 1$ дней, то этот срок лежит в пределах от 11 до 13,5 дней. Следовательно, в две недели они уложились.

В 1997 году эта задача предлагалась абитуриентам С.-Петербургского университета. Странность заключается в том, что достаточно много абитуриентов справлялись с техническими трудностями, однако делали грубую логическую ошибку. Обычная идея рассуждения заключалась в предположении, что работа выполнена ровно за две недели (в наших обозначениях $t = \frac{15}{2}$). В результате решения аналогичной системы получали результат: $x = -\frac{2}{195}$ и $y = \frac{1}{13}$. А последний шаг странен: так как производительность положительна, то это невозможно, значит, в две недели рабочие не уложатся...?! Ошибка состояла в том, что из приведенного рассуждения следует невозможность завершения работы ровно за 2 недели, но из него не следует, что срок не может быть меньшим!

Кому-то может показаться, что к данному разделу разобранная задача не имеет отношения, что автор, так сказать, "притянул ее за уши", однако в ней речь идет о множестве значений некоторой функции T. Если x, y – начальные производительности, а T – это срок, за который выполнена вся работа, то по условию

$$T = \frac{1}{x+y} - 1, \text{ причем } x, y > 0 \text{ и } \frac{1}{2(x+y)} = \frac{1}{2(1{,}2x + 1{,}16y)} + 1,$$

а вопрос задачи можно переформулировать таким образом. Верно ли, что множество значений T (при указанных ограничениях на аргументы x и y) содержится в отрезке $[0; 14]$? Суть приведенного решения состояла в доказательстве того, что это множество содержится в интервале $(11; 13{,}5)$ (в действительности, оно с ним совпадает).

Последняя задача данного раздела имеет принципиальное значение для понимания того, что же такое "сложная" функция.

Задача 15. Дана функция $f(x) = \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$. Можно ли выразить $f(x)$ через $\cos 2x$, более точно: существует ли такая функция g, для которой $f(x) = g(\cos 2x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

Поскольку функция $\cos 2x$ π-периодична, то, какой бы ни была функция g, число π является одним из периодов функции $g(\cos 2x)$.

> Обратите внимание, что здесь не утверждается, что функция $g(\cos 2x)$ также π-периодична; совсем не обязательно, чтобы это число было ее *наименьшим* положительным периодом.

Покажем теперь, что π не является периодом функции $f(x)$, для чего достаточно указать хотя бы одно значение x, такое, что $f(x+\pi) \neq f(x)$. Попробуем обойтись без тригонометрических преобразований. Первая попытка окажется удачной, имеем, $f(0) = 0$, между тем как $f(\pi) = -1 \neq f(0)$. Тем самым, функции $f(x)$ и $g(\cos 2x)$ обладают разными *свойствами*, поэтому искомой функции g не существует.

Объясните, в чем ошибка в следующем "рассуждении". Конечно, существует. Ведь нам надо просто выразить функцию $f(x)$ через $\cos 2x$. Имеем, так как $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} - \cos 2x\right), & \text{если } \cos x \geq 0, \\ \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} - \cos 2x\right), & \text{если } \cos x \leq 0. \end{cases}$$

Два совета. Старайтесь побудить ваших учеников решать задачи разными способами, что совсем несложно сделать, если вопрос задачи связан с поиском множества значений квадратного трехчлена. Требуйте от них "не делать лишнего", к примеру, если надо просто найти множество значений, то график функции строить совсем не обязательно, в отличие от задач, в которых требуется исследовать число решений уравнения. Таким образом, вы сами можете варьировать сложность задач, вводя или, наоборот, опуская некоторые условия. Другое дело, что легче запомнить график, чем формулу, поэтому графическая интерпретация часто оказывается полезной.

Справочник

В данном разделе будут приведены множества значений некоторых функций. Ясно, что таблица не может содержать всех вообще функций; автор выбрал некоторые из них, ограничившись, в основном, стандартными функциями и простейшими дробно-рациональными. Хорошее упражнение: выведите результаты, приведенные в таблице. Другое дело, что все-таки не стоит запоминать сами формулы, лучше запомнить методы.

Функция $f(x)$	Множество ее значений
ax^2+bx+c	$\left[\frac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right)$ при $a>0$, $\left(-\infty;\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ при $a<0$.
a^x	$(0;+\infty)$
$\log_a x$	$(-\infty;+\infty)$
$a\cos x+b\sin x$	$[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}]$
$x+\dfrac{a}{x}$	$(-\infty;-2\sqrt{a}]\cup[2\sqrt{a};+\infty)$ при $a>0$, $(-\infty;+\infty)$ при $a<0$.
$\dfrac{ax^2}{x^2-b^2}$	$(-\infty;0]\cup(a;+\infty)$ при $a>0$, $(-\infty;a)\cup[0:+\infty)$ при $a<0$.
$\dfrac{ax}{x^2+b^2}$	$\left[-\frac{\lvert a\rvert}{2\lvert b\rvert};\frac{\lvert a\rvert}{2\lvert b\rvert}\right]$
$\dfrac{ax^2}{x^2+b^2}$	$[0;a)$ при $a>0$, $(a;0]$ при $a<0$.

Задачи для самостоятельного решения

Советую вам решать предлагаемые задачи разными способами.

4.1. Найдите множество значений функции: а) $y=\sqrt[4]{8x-x^2}$; б) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; в) $y=\sin x\sin 3x$; г) $y=2^{2x-x^2}$.

4.2. Найдите все значения a, при которых существует положительное решение уравнения: а) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = a$; б) $4^x - 2^{x+1} = a$; в) $x^5 - ax + 4 = 0$; г) $ax^3 + 3x - 1 = 0$.

4.3. Найдите все целые значения функции

$$y = 3{,}5\sqrt{4\cos 2x + 6\sin^2 x + 5}.$$

4.4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x - x^2 - 4\sqrt{2 + x - x^2}.$$

4.5. Найдите все a, при которых на отрезке $[0;\pi]$ уравнение $\cos x + \sin x = \cos a + \sin a$ не имеет решений.

4.6. Найдите все a, при которых имеет решение уравнение: а) $2^{\frac{1}{x}} = \frac{2a-1}{a^2-1}$; б) $2^{2x-x^2} = \frac{a-2}{a^2-1}$; в) $\frac{a-3^x}{4^x-3\cdot 2^x+2} = 0$.

4.7. Найдите все a, при которых имеет решение уравнение: а) $x^2 + \frac{1}{x^2+2} = a$; б) $\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+5} = a$; в) $\frac{x^2-a}{x^2-1} = b$ при любом $b \le 0$.

4.8. Решите неравенства: а) $\frac{x-2}{2\sqrt{x}-3} \le 1$; б) $\frac{\log_2 x - \log_x 4}{\log_x \frac{x^2}{8}} \le 2$.

4.9. Найдите все целые значения k, при которых существует решение уравнения $2\cos 2x = k(4\cos x - 3)$.

4.10. Найдите множество значений функции

$$y = x^2 + 2x - 6|x - 1|.$$

4.11. Изобразите на плоскости образ первого координатного угла при отображении $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

4.12. Какие значения может принимать: а) xy, если $x^2 + xy + y^2 \le 3$; б) $x^2 + y^2$, если $x + |y| \ge \sqrt{2}$?

4.13. Изобразите на плоскости множество точек с координатами (a, b), для которых имеет решение система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

4.14. Докажите, что не существует такой функции $f(x)$, для которой $f(\sin x) = \sin 4x$.

4.15. Укажите ошибку в рассуждении, приведенном в замечании после решения задачи 16.

Комментарии и советы

4.1. Решение п. б) несколько отличается от решений задач других пунктов.

4.2. При решении пп. а, б) не забудьте, что $x > 0$, а при решении пп. в, г) придется дифференцировать.

4.3. Придется исследовать всего-навсего линейную функцию.

4.4. См. решение задачи 3.

4.5. Найдите множество значений b, при которых уравнение $\cos x + \sin x = b$ не имеет решений на $[0; \pi]$.

4.6. В пп. а, б) надо найти все a, при которых левая часть лежит в области значений правой части данного уравнения. В задаче пункта в) есть одна тонкость.

4.7. В задаче пункта а) надо дифференцировать, пункт б) проще. При решении пункта в) рассмотрите отдельно случаи $a < 1$ и $a > 1$.

4.8. Рассмотрите функцию $y = \frac{x^2-2}{2x-3}$.

4.9. Вспомните предыдущую задачу.

4.10. Раскройте модуль – и все.

4.11. Задача сводится к вопросу о коэффициентах квадратного трехчлена, корни которого неотрицательны.

4.12. а) Рассмотрите образ данного множества при отображении предыдущей задачи. б) Воспользуйтесь геометрическим смыслом выражения $x^2 + y^2$.

4.13. Стандартно.

4.14. Легко понять и обосновать, что из равенства $\sin x = \sin y$ не следует равенство $\sin 4x = \sin 4y$.

4.15. Попробуйте определить функцию $f(x)$.

Ответы и комментарии

4.1. а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1)$; в) $\left[-1; \frac{9}{16}\right)$; г) $(0; 2]$.

4.2. При: а) $a > 7$; б) $a > -1$; в) $a \geq 5$; г) $a \geq -4$.

4.3. Только 10.

4.4. $-\frac{23}{4}$.

4.5. При $a \in \left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.6. При: а) $a \in (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$;
б) $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$; в) $a \in (0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

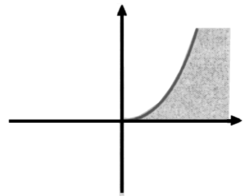
4.7. При: а) $a \geq \frac{1}{2}$; б) $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$; в) $a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

4.8. а) $\left[0; \frac{9}{4}\right)$; б) $(0; 1) \cup (1; 2\sqrt{2}) \cup \{4\}$.

4.9. $k \in \mathbb{Z}$.

4.10. $[-22; +\infty)$.

4.11. Ответ на рисунке.



4.12. а) $-3 \le xy \le 1$. Обратите внимание, что искомый образ является только частью множества, заданного неравенством $v \ge u^2 - 3$; б) $[1; +\infty)$.

4.13. Множество, заданное неравенством $2y \ge x^2$.

4.14. Воспользуйтесь тем, что $\sin(\pi - x) = \sin x$.

4.15. Знак перед корнем выбирается в зависимости от значения x, а не от значения $\cos x$, как следовало бы.

5. Построение и "чтение" графиков

График или не график. Чтение графиков. Зависимость графиков стандартных функций от значений параметров. Графики кусочно-заданных функций. Преобразования графиков. Асимптоты. Графики "сложных" функций. Построение графиков при помощи производной. Касательные к графикам. Выпуклость.

Обсуждение. Говорят, что 90% всей получаемой человеком информации имеет визуальный характер. И если вы увидели график, то вам легко нарисовать его самим, однако не очень просто дать такое его словесное описание, чтобы тот, кто сам этот график не видел, мог его изобразить самостоятельно. Однако геометрическая наглядность бывает и обманчива. К примеру, невозможно (даже с помощью компьютера) изобразить картинку, на которой будут видны все точки пересечения графиков функций $y = x^6$ и $y = 6^x$. В этой связи бывает трудно провести грань между тем, что воистину очевидно, и тем, что только представляется очевидным; очевидно то, что очень легко доказать.

Самая грубая ошибка, которую можно допустить при построении графика, состоит в том, чтобы изобразить то, что не является графиком вообще никакой функции. Такую ошибку достаточно часто делают в том случае, когда приходится рассматривать несколько случаев в зависимости от значения аргумента (к примеру, если формула, задающая функцию, содержит модуль).

Графики функций – это частный случай множеств, заданных уравнениями. Различие в том, что в уравнении $F(x, y) = 0$ обе координаты ("буквы") равноправны, тогда как уравнение, задающее график функции f, имеет вид $y = f(x)$, или, как иногда бывает полезно записать, $y - f(x) = 0$. С геометрической точки зрения множество является графиком, если всякая вертикальная (т. е. параллельная оси ординат) прямая имеет с этим множеством не более одной точки пересечения. С алгебраической точки зрения, если вам удастся (однозначно) решить уравнение $F(x, y) = 0$ относительно переменной y (т. е. выразить ее через x), то полученная в результате формула и задает функцию, графиком которой является множество, заданное этим уравнением.

Задача 1. Покажите, что никакое из множеств, заданных следующими уравнениям, не является графиком никакой функции, и напишите формулы для некоторых функций, графики которых содержатся в данном множестве: а) $x^2 - xy - 2y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 2y$; в) $x = \sin y$.

а) Фиксируем значение абсциссы x и найдем ординату y так, чтобы точка (x, y) лежала в первом множестве, для чего решим (относительно y) квадратное уравнение $2y^2 + xy - x^2 = 0$. В силу стандартных формул имеем $y = \frac{-x \pm \sqrt{9x^2}}{4} = \frac{-x \pm 3x}{4} = \frac{x}{2}; -x$. Значит, для всякого $x \neq 0$ в данном множестве найдутся две точки с абсциссой x, так что это множество не является графиком никакой функции. Примерами функций, графики которых лежат в рассматриваемом множестве, являются линейные функции $y = -x$ и $y = \frac{x}{2}$, а кроме того, следующие кусочно-линейные функции:

$$y = \begin{cases} -x \text{ при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} \text{ при } x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ при } x \leq 0, \\ -x \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Можно доказать, что других *непрерывных* функций, график которых лежит в данном множестве, не существует.

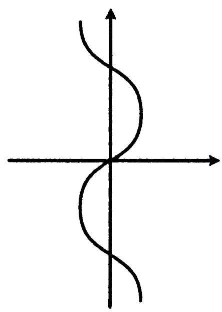
б) Решив данное уравнение относительно y, получим, что

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Из этой формулы следует, что это множество графиком не является. Однако она определяет две функции, графики которых лежат в этом множестве (ими являются верхняя и, соответственно, нижняя полуокружности).

в) Этот пример интересен по крайней мере с трех точек зрения. Интересно, насколько быстро сможет читатель, во-первых, изобразить это (стандартное) множество, во-вторых, узнать среди одной из функций, график которых в нем лежит, известную ему функцию, и, в-третьих, написать формулы для всех других подобных функций.

Множество, заданное уравнением $x = \sin y$, изображено на следующем рисунке; оно симметрично графику синуса относительно прямой $y = x$.



Рассмотрим ту его часть, которая лежит в полосе между прямыми $y = \pm\frac{\pi}{2}$. Из определения арксинуса сразу следует, что она является графиком функции $y = \arcsin x$. Покажите, что формулы $y = \arcsin x + 2\pi k$ и $y = \pi(2k+1) - \arcsin x$, $k \in \mathbb{Z}$, также задают функции, графики которых лежат в этом множестве (для этого надо всего-навсего решить простейшее тригонометрическое уравнение).

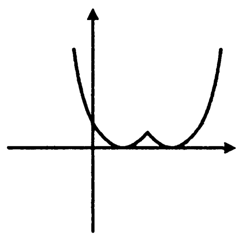
Задача 2. Постройте график функции

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 - |2x - 4|.$$

Имеем,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ при } x \le 2, \\ (x+3)^2 \text{ при } x \ge 2. \end{cases}$$

Искомый график состоит из частей парабол $y = (x-1)^2$ и $y = (x-3)^2$. На первой из них следует взять дугу, лежащую над лучом $(-\infty; 2]$ оси абсцисс, на второй – лежащую над лучом $[2; +\infty)$ (рисунок).



Хорошее дополнительное упражнение: написать уравнение, задающее объединение этих парабол. Обратите внимание, что для этого совсем не надо раскрывать модуль, надо просто правильно возвести в квадрат.

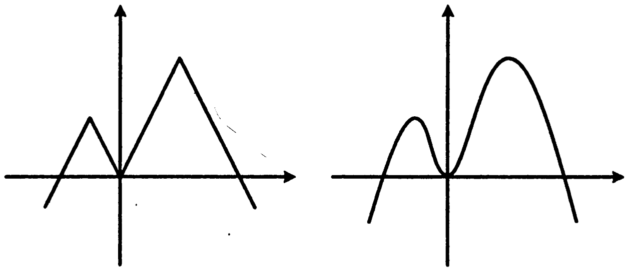
Полезно заметить, что, с формальной точки зрения, график функции f является множеством, заданным следующей совокупностью систем уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ x \le 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = (x-3)^2, \\ x \ge 2. \end{cases}$$

Следовательно, оно является объединением части первой параболы, лежащей в полуплоскости $x \le 2$, и той части второй параболы, которая лежит в полуплоскости $x \ge 2$.

Задача 3. Опишите поведение функций (заданных на всей числовой прямой), графики которых изображены на следующих рисунках.

> Замечание в скобках существенно в силу того, что прямая бесконечна, а нарисовать мы можем только какую-то ее часть. Из картинки может быть неясна даже область определения функции; в силу этого было необходимо сделать уточнение.



Ясно, что обе функции возрастают на: луче $(-\infty; -1]$ и отрезке $[0; 1]$; убывают на отрезке $[-1; 0]$ и луче $[1; +\infty)$, причем первая из них является линейной на каждом из этих промежутков. Видно и их наибольшее значение, равное 2, которое функции принимают при $x = 1$. Если мы поставим задачу: исследовать число решений уравнения $f(x) = a$, то опять-таки никакой разницы между соответствующими уравнениями мы не обнаружим; обе функции имеют еще по две характерные точки: $x = -1$ и $x = 0$, являющиеся, соответственно, точкой максимума и точкой минимума каждой из рассматриваемых функций. Мы уже говорили о том, что число решений уравнения $f(x) = a$ – это число точек пересечения графика с горизонтальной прямой, заданной уравнением $y = a$, так что важна лишь монотонность этой функции, ее значения в точках максимума и минимума и поведение "на бесконечности". Если у двух функций эти характеристики одинаковы, то одинаков и ответ на поставленный вопрос.

Однако если мы, к примеру, поставим задачу о числе решений уравнения $f(x) = 1 + ax$, то ситуация изменится: той информации, которая содержится в правом графике, будет недостаточно, чтобы ответить на этот вопрос.

Опять-таки, речь идет о числе точек пересечения графика и прямой, заданной уравнением $y = 1 + ax$. Каким бы ни было число a, эта прямая проходит через точку $P(0, 1)$ оси ординат, геометрический смысл этого числа – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс. Не будем проводить исследование, а просто заметим, что для функции, график которой изображен на левом рисунке, характерными значениями углового коэффициента являются $a = -1; 0; 1; 2$ – при переходе через каждый из них меняется число точек пересечения. Прямая $y = x + 1$, очевидно, имеет три точки пересечения с левым графиком, однако четыре (вроде бы...) – с правым! Для того чтобы можно было точно ответить на поставленный вопрос, надо построить график $y = \frac{f(x)-1}{x}$.

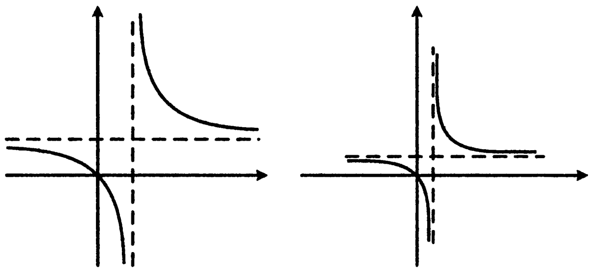
Существуют методы, позволяющие по графикам простых стандартных функций изобразить графики функций, получающихся из них при помощи замен переменной и арифметических преобразований. Кроме того, бывает полезным умение восстанавливать стандартную функцию по виду ее графика.

Задача 4. Изобразите графики функций а) $y = \frac{x}{x-1}$; б) $y = \frac{x}{2x-1}$; в) $y = \left|\frac{x}{x-1}\right|$; г) $y = \frac{|x|}{|x|-1}$.

а) Проведем преобразование $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, из которого следует, что $y = f(x-1) + 1$, где $f(x) = \frac{1}{x}$. Следовательно, искомый график можно получить из гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при помощи двух параллельных сдвигов: на 1 вправо вдоль оси абсцисс и на 1 вверх вдоль оси ординат. Обратите внимание, что все равно, какое преобразование производится первым, так как в результате их последовательного применения мы получим параллельный перенос на вектор $\overline{a}(1, 1)$.

б) Так как $\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2x-1}$, то искомый график получается из графика, построенного в предыдущем пункте, посредством применения двух сжатий: в 2 раза вдоль оси абсцисс и в 2 раза вдоль оси ординат. Как и в предыдущем пункте, неважно, какое из них применятся первым.

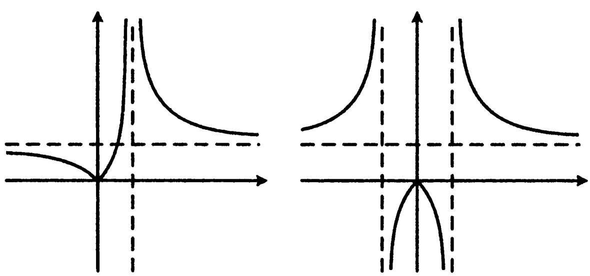
Однако будет ошибкой сначала применить к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ два сжатия, описанные в пункте б), а уж затем параллельные сдвиги из пункта а). В таком случае мы в результате получим график $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(x-1)} + 1 = \frac{4x-3}{4(x-1)}$.



а *б*

в) График $y = |f(x)|$ на рисунке ниже (как он был получен?).

г) Обратите внимание, что данная функция четна, поэтому часть ее графика, лежащая в левой полуплоскости $y \leq 0$, симметрична относительно оси ординат той его части, что находится в правой полуплоскости и которая совпадает с соответствующей частью графика $y = \frac{x}{x-1}$.



в *г*

Полезно уметь решать и задачи, обратные к задаче 4.

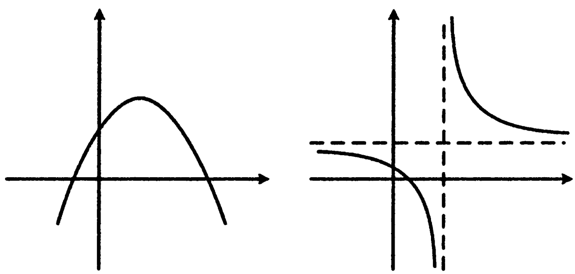
Задача 5. Дана функция $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$. Напишите формулу для функций, графики которых получаются из графика данной функции посредством следующих преобразований: а) параллельного сдвига на 1 влево вдоль оси абсцисс; б) параллельного сдвига на 1 влево вдоль оси абсцисс с последующим сжатием в 2 раза вдоль той же оси; в) сжатия в 2 раза вдоль оси абсцисс и последующего параллельного сдвига на 1 влево вдоль той же оси.

а) Имеем, $g_1(x) = f(x+1) = \frac{x+1}{(x+1)^2+(x+1)+1} = \frac{x+1}{x^2+3x+3}$.

б) Имеем, $g_2(x) = g_1(2x) = \frac{2x+1}{(2x)^2+3\cdot 2x+3} = \frac{2x+1}{4x^2+6x+3}$.

в) Обратите внимание, что ответ на даный вопрос отличается от ответа на предыдущий (ср. комментарий к задаче 4б). Имеем, $g_3(x) = f(2(x+1)) = \frac{2(x+1)}{(2(x+1))^2+2(x+1)+1} = \frac{2x+2}{4x^2+10x+7}$.

Задача 6. Предположим, что нам известно, что на рисунках *а* и *б* изображены парабола и гипербола, соответственно. Какие оценки на параметры квадратичной и дробно-линейной функций следуют из вида их графиков?



а *б*

а) Характерными особенностями параболы $y = ax^2 + bx + c$ являются: направления ее ветвей, расположение вершины и точек пересечения с осью ординат. Поскольку ветви направлены вниз, то $a < 0$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{b}{2a}$, а так как вершина расположена правее оси ординат, то $-\frac{b}{2a} > 0$, значит, $b > 0$. Наконец, значение c является координатой точки пересечения параболы с осью ординат, так что $c > 0$.

б) Характерными особенностями гиперболы $y = \frac{ax+b}{x+c}$ являются: уравнения ее асимптот и четверти, в которых лежит эта гипербола. Асимптотами гиперболы являются прямые $y = a$ и $x = -c$, следовательно, $a > 0$ и $c < 0$. Для того чтобы вывести условие на параметры, при выполнении которых гипербола лежит в, так сказать, второй и четвертой четвертях, можно воспользоваться условием положительности производной дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{x+c}$. Имеем,

$$y' = \left(\frac{ax+b}{x+c}\right)' = \frac{a(x+c)-(ax+b)}{(x+c)^2} = \frac{ac-b}{(x+c)^2},$$

так что в данном случае $ac > b$. Заметим, что вместо дифференцирования можно было выделить константу:

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c}.$$

В нашем случае график получается параллельными переносами из графика $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$, откуда и следует, что $b < ac$.

Попробуем теперь нарисовать эскизы графиков "сложных" функций, не производя дифференцирований.

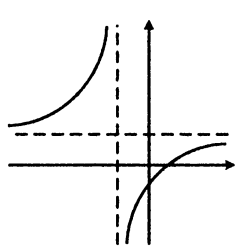
Задача 7. Нарисуйте эскизы графиков функций:

а) $g_1(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$; б) $g_2(x) = \log_{2x}\frac{x}{2}$; в) $g_3(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

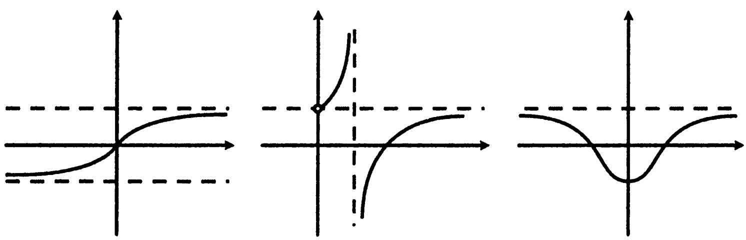
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Заданные функции выражаются через нее следующим образом:

$$g_1(x) = f(2^x), \quad g_2(x) = \frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 2x} = f(\log_2 x), \quad g_3 = f(x^2).$$

Поскольку $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, то график $y = \frac{x-1}{x+1}$ получается из гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ при помощи двух сдвигов – на 1 влево вдоль оси абсцисс и на 1 вверх вдоль оси ординат (рисунок).



В частности, данная функция возрастает на каждом из лучей (но не на их объединении!) $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. Поскольку множеством значений функции $y = 2^x$ является луч $(0;+\infty)$ и эта функция возрастает на всей своей области определения, то функция $g_1(x)$ также является возрастающей. Далее, если $x \to -\infty$, то $2^x \to 0$, значит, $g_1(x) = f(2^x) \to f(0) = -1$. Таким образом, прямая $y = -1$ является горизонтальной асимптотой графика $y = g_1(x)$ при $x \to -\infty$. Поскольку $2^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $g_1(x) = f(2^x) \to 1$, значит, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика $y = g_1(x)$ при $x \to +\infty$. Ясно, что корнем $g_1(x)$ является $x = 0$. Теперь мы в состоянии изобразить эскиз графика этой функции (рисунок а).



а *б* *в*

Функция $y = \log_2 x$ также возрастает на всей своей области определения – луче $(0;+\infty)$, однако ее областью значений является вся числовая ось, поэтому функция $g_2(x)$ не определена при $x = \frac{1}{2}$, она возрастает на интервале $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ и на луче $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Теперь необходимо выяснить поведение нашей функции при стремлении аргумента к 0, $\frac{1}{2}$ и $+\infty$. Если $x \to 0$, то $\log_2 x \to -\infty$, значит, $g_2(x) = f(\log_2 x) \to 1$. Ясно, что $g_2(x) \to 1$ и при $x \to +\infty$. Для исследования поведения функции в окрестности точки $x = \frac{1}{2}$ надо рассмотреть два случая, когда $x \to \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$ и когда $x \to \frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$. В каждом из них $g_2(x) \to \infty$, однако, в силу того, что эта функция возрастает на $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ и на $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, можно заключить, что

$$g_2(x) \to +\infty \text{ при } x \to \tfrac{1}{2},\ x < \tfrac{1}{2}, \text{ и } g_2(x) \to -\infty \text{ при } x \to \tfrac{1}{2},\ x > \tfrac{1}{2}.$$

Эскиз графика изображен на рисунке *б*.

> Обратите внимание, что мы пока не можем ничего сказать о выпуклости графика $y = g_2(x)$.

Функция $g_3(x)$ четна, поэтому мы вправе считать, что $x \geq 0$. Ее график на положительной полуоси будет напоминать график $y = f(x)$, однако будут и отличия. Дело в том, что, как нетрудно понять, производная $g_3'(0) = 0$, значит, касательная к графику в точке $(0, -1)$ горизонтальна, следовательно, этот график имеет где-то на луче $[0; +\infty)$ точку перегиба. Для построения искомого графика в целом осталось заметить, что ось ординат является его осью симметрии (рисунок *в*).

График первой из наших функций вполне может быть симметричен относительно начала координат; таким образом, может быть, она нечетна? Так оно и есть в действительности, поскольку

$$g_1(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -g_1(x).$$

Как уже говорилось, построение графиков функций упрощает исследование уравнений, зависящих от параметра. Рассмотрим следующий типичный пример.

Задача 8. Сколько корней в зависимости от значения a имеет многочлен $x^4 - ax + 3$?

Конечно, можно записать уравнение $x^4 + 3 = ax$ и попытаться понять, в скольких точках (в зависимости от величины углового коэффициента a) прямая $y = ax$ пересекает график многочлена четвертой степени $y = x^4 + 3$. Этот график получается из графика стандартной степенной функции $y = x^4$ при его сдвиге вверх (вдоль оси ординат) на 3 единицы. Прямая $y = ax$ проходит через начало координат, ясно, что если модуль a невелик, то прямая и рассматриваемый график не пересекаются. Если, наоборот, взять достаточно большое значение $|a|$, то точки пересечения появятся. Можно взять, к примеру,

4 Зак. 1116

$a = 5$, вроде бы точек пересечения две, но почему? А сколько их будет, если $a = 4$?

> Вы не сможете не то что обосновать, а даже просто дать правильный ответ на последний вопрос, если не проведете дополнительных вычислений.

Найдем уравнение касательной к графику $y = x^4+3$ в точке с абсциссой $x = 1$. Общее уравнение касательной к графику функции имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

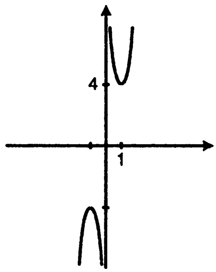
здесь, как обычно, x_0 – абсцисса точки касания. В нашем случае $f(1) = 4$, $f'(1) = 4$, получаем уравнение $y = 4(x - 1) + 4$, или $y = 4x$. Таким образом, проходящая через начало координат прямая $y = 4x$ касается графика. А может быть, она где-нибудь еще его пересечет? С наглядно-интуитивной точки зрения такого быть не может, однако строгое обоснование опирается на более сложное свойство графиков – их *выпуклость*. Более того, кажется очевидным, что при $a > 4$ данное уравнение имеет два корня, что может поставить в тупик, поскольку уравнение четвертой степени, как известно, может иметь четыре корня. Кроме того, "очевидно" – это то, что легко доказать; вряд ли читателю будет очень легко сделать это.

В связи с этим, как говорилось в конце обсуждения предыдущей задачи, разумно переписать данное уравнение в виде $g(x) = a$ и построить график $y = g(x)$. Имеем, $ax = x^4 + 3$, или $a = x^3 + \frac{3}{x}$, таким образом, надо построить график функции $g(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

Данная функция определена при всех $x \neq 0$, и ось ординат является асимптотой ее графика. Ясно также, что $g(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$, соответственно. Для исследования функции на монотонность найдем производную,

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}.$$

Следовательно, функция возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, а убывает на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$, а $g(-1) = -4$ и $g(1) = 4$. Из изображенного на рисунке графика ясно видно, что данное уравнение имеет один корень при $a = \pm 4$, а если $|a| > 4$, то оно имеет два корня.



Всякий человек может сделать ошибку, и предотвратить это очень трудно, главное, что надо уметь свою ошибку обнаружить. К примеру, можно решить задачу двумя способами и проверить совпадение ответов. В задачах, в которых надо построить график, всегда имеется возможность себя проконтролировать. Дело в том, что информация, которую мы получаем, исследуя некоторую функцию, должна быть непротиворечива. Рассмотрим следующий пример.

Задача 9.

а) Может ли быть, что горизонтальная прямая является асимптотой при $x \to +\infty$ для графика $y = f(x)$, а $f'(x) \to c \neq 0$ при $x \to +\infty$?

б) Что можно сказать о числах a и b, если известно, что прямые $y = a$ и $y = b$ являются асимптотами графика возрастающей на всей оси функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, соответственно?

в) Изобразите часть графика функции, если известно, что прямая $y = x$ является его асимптотой при $x \to +\infty$, причем $f''(x) \geq 0$, если x достаточно велико.

а) С наглядной точки зрения этого быть не может; если график имеет горизонтальную асимптоту и при этом существует предел $f'(x)$ при $x \to +\infty$, то, конечно, $f'(x) \to 0$. Самое простое доказательство основано на правиле Лопиталя. Если существует предел $f'(x)$ при $x \to +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

так как $f(x) \to a$.

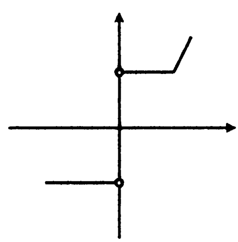
б) Ясно, что $a < b$.

в) Покажите, что $f(x) > x$ при всех достаточно больших x, так что график этой функции приближается ко своей асимптоте, оставаясь выше ее.

Теперь несколько разных задач на построение графиков функций, составленных из стандартных частей.

Задача 10. Постройте график функции $y = |x| + \frac{|x^2-2x|}{x}$.

Рассмотрим три случая: $y = -x + \frac{x(x-2)}{x} = -2$, если $x < 0$. Если $0 < x \leq 2$, то $y = x + \frac{x(2-x)}{x} = 2$. Наконец, если $x \geq 2$, то $y = x + \frac{x(x-2)}{x} = 2x - 2$. Ответ – на рисунке.



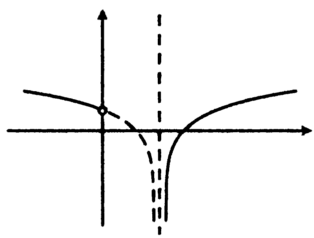
Задача 11. Постройте график функции

$$y = \log_2(x^2 - 3x) - \log_4 x^2.$$

Областью определения данной функции является объединение $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Если $x < 0$, то

$$y = \log_2 x(x-3) - \log_2(-x) = \log_2(3-x).$$

Если $x > 3$, то $y = \log_2(x-3)$. График $y = \log_2(x-3)$ получается при сдвиге графика стандартной логарифмической функции $y = \log_2 x$ на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс, в частности, его асимптотой является прямая $x = 3$. Так как $y = \log_2(3-x) = \log_2(-(x-3))$, то этот график получается из стандартного графика при помощи последовательного применения следующих преобразований: симметрии относительно оси ординат и параллельного сдвига на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс. Осталось заметить, что мы должны взять только ту его часть, для которой $x < 0$. Объединение двух построенных ветвей и является искомым графиком (рисунок).



Задача 12. Какое наибольшее число корней может иметь уравнение $x^{12} + ax + b = 0$?

Конечно, можно рассуждать так же, как и при решении задачи 8. Однако в данной задаче не требуется исследовать зависимость числа корней от значений параметров a и b. Число корней этого уравнения равно числу точек пересечения некоторой прямой и графика степенной функции $y = x^{12}$. Наглядно очевидно, что больше двух точек пересечения они иметь не могут, однако как этот факт *доказать*?

Положим $f(x) = x^{12}+ax+b$, тогда $f'(x) = 12x^{11}+a$. Значит, производная обращается в ноль ровно в одной точке, следовательно, сама функция убывает на некотором луче $(-\infty; x_0]$ и возрастает на луче $[x_0; +\infty)$, поэтому на каждом из них она имеет не более одного корня. Уравнение $x^{12} - 1 = 0$ действительно имеет два решения.

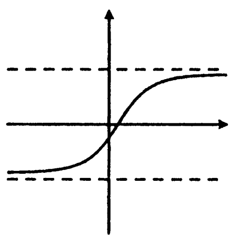
Данную задачу можно обобщить. Назовем функцию $f(x)$ *выпуклой* на некотором промежутке, если $f''(x) \geq 0$ при всех x из этого промежутка, при этом $f''(x)$ не обращается тождественно в ноль ни на каком малом отрезке. Покажем, что всякая выпуклая функция не может иметь более двух корней. Действительно, из условия на $f''(x)$ следует, что первая производная $f'(x)$ является монотонно возрастающей на всей числовой прямой функцией, поэтому она имеет не более одного корня. Следовательно, сама функция $f(x)$ либо монотонна на всей прямой (в таком случае она на может иметь более одного корня), либо монотонно убывает на некотором луче $(-\infty; x_0]$ и возрастает на луче $[x_0; +\infty)$, так что не может иметь более двух корней. Заметим, что поскольку вторая производная линейной функции равна нулю, то функция $f(x)-ax-b$ также будет выпуклой, поэтому график $y = f(x)$ пересекается с любой прямой не более, чем в двух точках. Аналогичное утверждение справедливо и тогда, когда $f''(x) \leq 0$ – такие функции называют *выпуклыми вверх.*

Задача 13. Образуют ли арифметическую прогрессию (взятые в некотором порядке) числа: а) $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$; б) $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$?

Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию в том случае, если $a + c = 2b$. Поскольку косинус убывает на отрезке $[0; \pi]$, а $3 < \pi$, то $\cos 2$ может быть только средним членом прогрессии. Однако $\cos 1 + \cos 3 = 2 \cos 2 \cos 1 \neq 2 \cos 2$, поскольку $\cos 1 \neq 1$. Пункт б) сложнее хотя бы потому, что синус на отрезке $[0; \pi]$ не является убывающей функцией. Докажите, в качестве упражнения (на определение синуса), что $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.

Для решения пункта б) применим другой подход, связанный с геометрической интерпретацией понятия арифметической прогрессии. Рассмотрим на плоскости точки P_n с координатами (n, a_n). Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию, то $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 - d + dn$, следовательно точки P_n лежат на прямой $y = dx + a_1 - d$. Таким образом, если данные числа образуют арифметическую прогрессию, то точки графика $y = \sin x$ с абсциссами $x = 1; 2; 3$ должны лежать на одной прямой, чего не может быть, так как синус на отрезке $[0; \pi]$ является выпуклой вверх функцией.

Задача 14. Может ли изображенный на следующем рисунке график являться графиком отношения двух многочленов?



Ответ: конечно, нет. Если $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены одной степени, то действительно, предел их отношения на бесконечности равен некоторой константе, но одной и той же, как на плюс, так и на минус бесконечности. Таким образом, график $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ обязан иметь одну и ту же асимптоту при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Однако данный график имеет своими асимптотами прямые $y = -1$ и $y = 2$.

Справочник

1. График функции $y = f(x - a) + b$ получается из графика $y = f(x)$ при помощи параллельного переноса на вектор $\overline{a}(a, b)$.

2. График $y = -f(x)$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.

3. График $y = f(-x)$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно оси ординат.

4. График $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ при помощи сжатия в k раз к оси ординат (параллельно оси абсцисс), если $k > 1$, и растяжения в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат (параллельно оси абсцисс), если $0 < k < 1$.

5. График $y = kf(x)$ получается из графика $y = f(x)$ при помощи растяжения в k раз от оси абсцисс (параллельно оси ординат), если $k > 1$, и сжатия в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс (параллельно оси ординат), если $0 < k < 1$.

6. Для построения графика $y = |f(x)|$ надо к той части графика $y = f(x)$, что лежит выше оси абсцисс, добавить образ при осевой симметрии относительно оси абсцисс той части графика $y = f(x)$, что лежит ниже этой оси.

7. Поскольку функция $y = f(|x|)$ является четной и совпадает с $y = f(x)$ при $x \geq 0$, то для построения ее графика надо уничтожить ту часть графика $y = f(x)$, которая лежит левее оси ординат, а вместо нее построить образ при осевой симметрии относительно оси ординат той части графика $y = f(x)$, которая лежит правее этой оси.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Постройте эскизы графиков функций:
а) $y = |x^3 - x| + |x^3 + x|$; б) $y = \cos|x| + |\cos x|$;
в) $y = (x+1)|x| + x|x+1|$; г) $y = |\sqrt{x+2} - x|$.

5.2. Докажите, что если $a(a+b+c) < 0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$ имеет два решения. Верно ли обратное утверждение?

5.3. Постройте эскизы графиков функций: а) $y = 2^{2x-x^2}$; б) $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$; в) $y = 2^{\sin x}$; г) $y = \sin(\pi \cdot 2^{x-1})$.

5.4. Постройте эскизы графиков функций: а) $y = \sin \pi x$; б) $y = 2\sin 2\pi x$; в) $y = \sin\left(\pi(x + \frac{1}{2})\right)$.

5.5. Функция f задана равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \in [-1; 0], \\ \frac{2-x}{2} & \text{при } x \in [0; 2]. \end{cases}$$

Постройте графики $y = f(-x)$, $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $y = f(2x-2)$.

5.6. Опишите преобразования графика $y = \log_2 x$, при помощи которых можно построить графики:

а) $y = \log_2(2x-4)$; б) $y = \log_2|2x-4|$; в) $y = \log_2 \frac{4}{x^2}$;

г) $y = \left|\log_2 \frac{4}{x^2}\right|$.

5.7. Постройте эскизы графиков следующих функций, не прибегая к помощи производной:

а) $y = \frac{1}{1-x^2}$; б) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$; в) $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

5.8. Постройте график функции

$$f(x) = \min\{t^2 - 2t \mid t \in [x; x+1]\}.$$

5.9. Постройте эскиз графика функции $y = \dfrac{1}{|\operatorname{tg} x| + \operatorname{ctg} x}$.

5.10. Найдите все значения a, при которых имеет ровно одно решение уравнение: а) $\sin ax = \frac{1}{2}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\sin 2x = ax + b$ при любом b.

5.11. Найдите наименьшее значение a, при котором при любом b уравнение $\cos \frac{x-2\pi}{3} + \cos \frac{x-4\pi}{5} = b$ имеет не более одного решения на отрезке $[a; 2\pi]$.

5.12. Какое наибольшее число корней может иметь трехчлен n-ой степени?

5.13. Сколько корней имеет уравнение $x^6 = 6^x$?

5.14. Дан равнобедренный треугольник с основанием a, боковой стороной b и углом при вершине $12°$. Докажите, что $b < 5a$.

5.15. Перенесите утверждения пп. 4–7 *Справочника* на множества, заданные уравнениями вида $F(x, y) = 0$.

Комментарии и советы

5.1. а) Рассмотрите четыре случая. б) Ясно, что $\cos|x| = \cos x$. в) Рассмотрите три случая. г) Постройте график функции $y = \sqrt{x+2} - x$, для чего можно использовать производную.

5.2. Сумма $a + b + c$ является значением квадратичной функции.

5.3. Речь идет о построении графиков "сложных" функций (см. задачу 7). Для контроля решения пункта г) посмотрите, сколько раз меняет знак соответствующая функция при значении x, меняющемся от одного натурального значения до другого.

5.4 и 5.5. Задачи на преобразование графиков.

5.6. В этой задаче прежде всего надо сделать правильные преобразования.

5.7. Обращайте внимание на монотонность, знаки функции и ее поведение вблизи характерных точек (а также при стремлении x к бесконечности).

5.8. Обратите внимание, что $f(x) = -1$ при $x \in [0; 1]$.

5.9. В область определения, конечно, не входят точки $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее, так как данная функция π-периодична, то достаточно построить ее график при $x \in (0; \pi)$. Все, что остается сделать, так это провести верные преобразования в случаях $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

5.10. а) Случаи $a > 0$ и $a < 0$ следует рассмотреть отдельно. б) Советую продифференцировать.

5.11. Найдите отрезок, на котором обе функции монотонны.

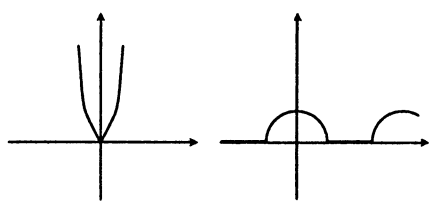
5.12. Ответ ясен при $n \leq 5$. А далее будет столько же корней.

5.13. Очевидно, что данное уравнение имеет одно отрицательное решение. А сколько положительных?

5.14. Есть простое геометрическое решение. Можно использовать аналитические соображения: см. задачу 13б.

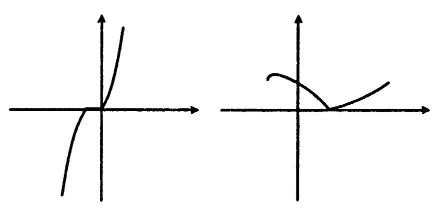
Ответы и комментарии

5.1. Ответы на рисунках.



а *б*

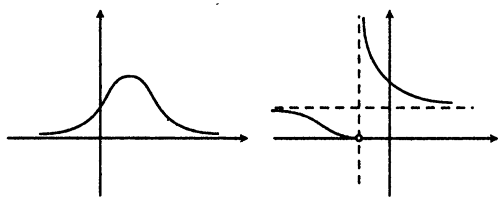
Хорошее параллельное задание, связанное с последним графиком: исследовать число решений уравнения $|\sqrt{x+2} - x| = a$.



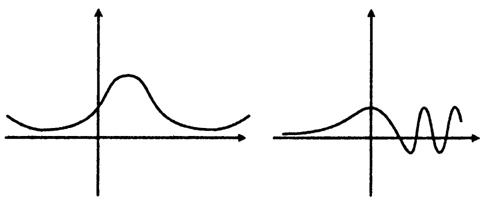
в *г*

5.2. Обратное утверждение неверно, но построить соответствующий пример без геометрической интерпретации не очень просто.

5.3. Ответы на рисунках.



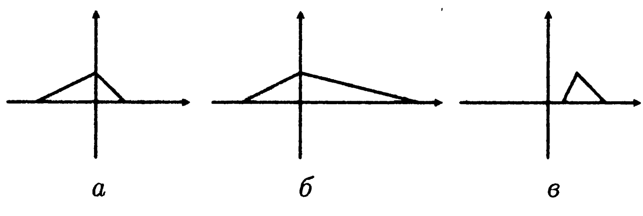
а *б*



в *г*

5.4. в) В действительности это график $y = \cos \pi x$.

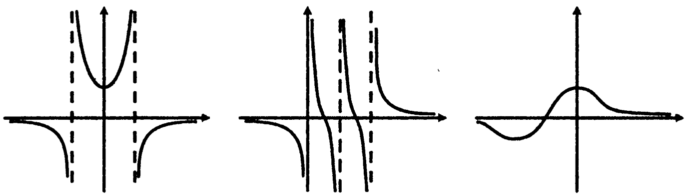
5.5. Ответы на рисунке.



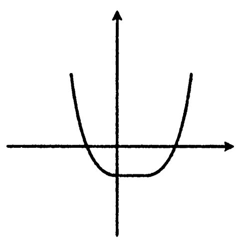
а *б* *в*

5.6. а) $\log_2(2x-4) = 1+\log_2(x-2)$. б) Сначала постройте график $y = \log_2|x|$. в) $\log_2 \frac{4}{x^2} = 2 - 2\log_2|x|$. г) Получается из предыдущего.

5.7. В задаче пункта в), для того чтобы выяснить расположение двух “горбов”, можно и продифференцировать, а можно использовать соображения задачи 4.1.



5.8. Ответ на рисунке.



5.9. Странно, но эта задача вызвала большие трудности у абитуриентов Санкт-Петербургского университета, хотя она, по-существу, ничем не отличается от стандартных задач "с модулем". После несложных преобразований получаем, что

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x & \text{при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x & \text{при } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right). \end{cases}$$

5.10. а) $a \in \left(-\frac{11}{3}; -\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. б) $|a| \geq 2$.

5.11. $a = -\pi$.

5.12. Пять корней при $n \geq 5$.

5.13. Три корня, из которых один – отрицательный, а другой $x = 6$, а третий лежит в интервале $(1; 2)$. Чтобы найти число положительных корней, постройте график $y = \frac{\ln x}{x}$.

5.14. Поскольку $a = 2b\sin 6^\circ$, то надо показать, что $\sin 6^\circ > \frac{1}{10}$, или $\sin\frac{\pi}{30} > \frac{1}{10}$. Так как функция $y = \sin x$ выпукла вверх на $[0;\pi]$, то $\sin x > \frac{3}{\pi}x$ при $x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right]$, откуда и следует искомое неравенство.

6. Алгебраические преобразования, уравнения, системы

Теорема Безу. Кратные корни многочленов. Замены в уравнениях высших степеней. Возвратные и однородные уравнения. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Тригонометрическая замена в кубическом уравнении. Метод Феррари решения уравнений четвертой степени. Обобщенные формулы Виета. Алгебраические тождества и разложения на множители. Основная теорема для симметрических многочленов. Сведение иррациональных уравнений высших степеней к системам алгебраических уравнений. Делимость многочлена от нескольких переменных на линейные множители. Оценки корней многочленов.

Обсуждение. Задача определения корней многочлена есть задача о его разложении на (линейные) множители. В общем случае, как показали Нильс Хенрик Абель и Эварист Галуа, решить ее невозможно, все подобные уравнения, которые предлагаются учащимся и абитуриентам, можно решить при помощи ограниченного числа специальных приемов или же "увидев" путь, на котором можно разложить данный многочлен на множители (например, просто "угадав" его корень) – см. примеры задачи 4 и их решения. Кроме собственно решений алгебраических уравнений и их систем, в данном разделе приведено достаточно большое число задач на доказательство алгебраических тождеств и разложения многочленов на множители. Конечно, в наше время подобные примеры проще всего решать, используя компьютер (собственно говоря, автор так и поступает...). Однако, даже если оставить прагматическую точку зрения, навык в проведении преобразований играет немаловажную роль в работе и инженера, и экономиста, поскольку, прежде чем предоставить компьютеру решить уравнение, его еще надо составить.

Задача 1. Известно, что число $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 8x + a$. Найдите a и остальные корни этого многочлена.

Так как $x = 2$ – корень, то $a - 12 = 0$, так что $a = 12$. Далее используем стандартное утверждение: поскольку $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 8x - 12$, то этот многочлен делится на $x - 2$, т. е. его можно представить в виде $(x-2)p(x)$, где $p(x)$ – это квадратичный многочлен. Для того чтобы найти частное – многочлен $p(x)$ – можно выполнить "деление уголком", а можно просто осуществить разложение на множители:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 6x + 12 =$$
$$= (x-2)(x^2 + x - 6) = (x-2)^2(x+3).$$

Таким образом, данный многочлен имеет еще всего один корень $x = -3$.

> Так сколько же всего корней имеет данный многочлен? Конечно, их два: $x = 2$ и $x = -3$, поскольку при перечислении элементов множества никогда не повторяют один и тот же элемент дважды. Однако в некотором смысле их все же три; в этом случае говорят, что значение $x = 2$ является корнем кратности два. Такое уточнение необходимо хотя бы в силу того, что в формулах Виета для корней квадратного уравнения (и их обобщении для многочленов произвольной степени) корень следует использовать столько раз, какова его кратность.

Как видно, для того, чтобы проверить, что многочлен делится на линейный двучлен $x - a$, совсем не обязательно производить разложение на множители, достаточно проверить, что $x = a$ является корнем этого многочлена. С другой стороны, как выяснить, является ли этот корень кратным?

Задача 2. Докажите, что многочлен: $x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n$ делится на $(x-a)^2$.

Решим задачу разными способами, в первом из которых воспользуемся стандартными формулами. Имеем,

$$x^n - nxa^{n-1} + (n-1)a^n = x^n - a^n - na^{n-1}(x-a) =$$
$$= (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1} - na^{n-1}).$$

Нетрудно видеть, что $x = a$ является корнем многочлена, стоящего в правой скобке, значит, он тоже делится на $x - a$, следовательно, данный многочлен делится на $(x-a)^2$.

Другой подход, как это ни странно, основан на применении производной. Предположим, что $p(x) = (x-a)q(x)$, т. е. $x = a$ – корень многочлена $p(x)$. Тогда $p'(x) = q(x) + (x-a)q'(x)$, следовательно, $p'(a) = q(a)$, значит, многочлен $q(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда число a является корнем производной исходного многочлена $p(x)$. Имеет место и более общий факт: $x = a$ является корнем многочлена $p(x)$ кратностью не менее k тогда и только тогда, когда

$$p(a) = p'(a) = \ldots = p^{k-1}(a) = 0.$$

Так как $(x^n - nxa^{n-1} + (n-1)a^n)' = nx^{n-1} - na^{n-1}$, то, действительно, $x = a$ является корнем производной. Далее, поскольку вторая производная равна $n(n-1)x^{n-2}$, то $p''(a) \neq 0$, поэтому кратность этого корня равна двум.

Задач, подобных только что решенной, можно сформулировать неограниченно много. Дело в том, что для всякого многочлена $p(x)$ многочлен $p(x) - p(a) - p'(a)(x-a)$ имеет число $x = a$ корнем кратности по крайней мере два. Причем сформулированный результат имеет прозрачный геометрический смысл: прямая $y = kx + b$ касается графика многочлена $p(x)$ в точке с абсциссой a тогда и только тогда, когда $x = a$ является кратным корнем разности $p(x) - kx - b$, иными словами, кратным корнем уравнения $p(x) = kx + b$.

Следующая задача по своей тематике относится к началам анализа, а по идее своего решения – к теме “Многочлены”.

Задача 3. Найдите асимптоты графика $y = \frac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}$.

Можно стандартным образом найти предел $\frac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}$ при $x \to \infty$, а можно поступить иначе. Разделив x^3+x^2+2x на x^2+1 с остатком, получим, что $x^3 + x^2 + 2x = (x+1)(x^2+1) + x - 1$, следовательно,

$$\frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Ясно, что $\frac{x-1}{x^2+1} \to 0$ при $x \to \infty$, таким образом, искомой асимптотой графика является прямая $y = x + 1$.

В решениях следующей задачи будут введены основные приемы определения корней многочленов.

Задача 4. Решите уравнения:

а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 1$;

б) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$;

в) $(x^2-x+3)^2-3(x^2-x+3)(2x^2-x+2)+2(2x^2-x+2)^2 = 0$;

г) $4x^3 - 5x + 2 = 0$;

д) $8x^3 - 6x - 1 = 0$;

е) $x^4 + 4x - 1 = 0$.

а) Самый естественый подход – симметризовать многочлен, стоящий в правой части, чего можно добиться при помощи замены $y = x - \frac{5}{2}$, что в результате даст многочлен

$$\left(y+\tfrac{3}{2}\right)\left(y+\tfrac{1}{2}\right)\left(y-\tfrac{1}{2}\right)\left(y-\tfrac{3}{2}\right) = \left(y^2-\tfrac{9}{4}\right)\left(y^2-\tfrac{1}{4}\right) = y^4 - \tfrac{5}{2}y + \tfrac{9}{16}.$$

Таким образом, в результате замены мы получим биквадратное уравнение $16y^4 - 40y^2 - 7 = 0$, стандартная замена в котором дает уравнение $16z^2 - 40z - 7 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{20\pm\sqrt{512}}{16}$, причем второй из них отрицателен. Следовательно, $y = \pm\frac{\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}$, таким образом, $x = \frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}$.

Другой вариант решения (по сути, равносильный) состоит в группировке крайних и средних скобок левой части данного уравнения, перемножив которые мы получим уравнение

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 2) = 1.$$

Замена $t = x^2 - 5x + 4$ дает квадратное уравнение $t(t + 2) = 1$.

б) Многочлен $p_n(x)$ степени n называется *возвратным*, если его коэффициенты при x^k и x^{n-k} равны друг другу. Если его степень n нечетна, то $x = -1$ заведомо является его корнем, следовательно, $p_n(x) = (x + 1)q_{n-1}(x)$, причем многочлен q_{n-1} также окажется возвратным, а его степень четна. Многочлен $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1$ является возвратным. Поделив на x^2, получим уравнение $x^2 + x - 10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, в котором сделаем замену $t = x + \frac{1}{x}$. Так как $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$, то в результате мы придем к квадратному уравнению $t^2 + t - 12 = 0$, откуда $t = 3; -4$. Осталось решить два квадратных уравнения, в итоге $x = -2 \pm \sqrt{3}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

в) Суть решения данного уравнения состоит в том, чтобы использовать его однородность относительно двух квадратичных выражений. Напомним, что алгебраическое выражение $p(x, y)$ от двух переменных является однородным, если все его одночлены имеют одинаковую суммарную степень (к примеру, таковым является многочлен $x^2 - 3xy + 2y^2$). Если в данном уравнении ввести вспомогательные переменные $u = x^2 - x + 3$ и $v = 2x^2 - x + 2$, то мы как раз и получим однородное уравнение $u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$. Это уравнение можно просто решать как квадратное относительно одной из переменных или же ввести еще одну вспомогательную переменную $t = \frac{u}{v}$. В результате мы получим, что $u = v$ или $u = 2v$. Конечно, можно было сразу поделить обе части данного уравнения на $(2x^2 - x + 2)^2$ и положить $t = \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 - x + 2}$.

Если $u = v$, то $x^2 = 1$, так что $x = \pm 1$, если $u = 2v$, то мы получим уравнение $3x^2 - x + 1 = 0$, которое корней не имеет.

г) Иногда корень можно "подобрать", однако хорошо бы делать это не наугад. У многочленов с целыми коэффициентами возможно найти их рациональные корни, используя следующий факт. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то число p является делителем его свободного члена, а q – делителем коэффицента при его старшем члене. В частности, все рациональные корни многочленов

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_k \in \mathbb{Z}$, являются целыми.

Таким образом, в данном примере рациональные корни надо искать среди чисел $\pm 1; \pm 2; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}$, из которых только $x = \frac{1}{2}$ действительно является корнем. Так как

$$4x^3 - 5x + 2 = (2x - 1)(2x^2 + x - 2),$$

то уравнение имеет еще два корня, $x = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$.

д) Нетрудно проверить, что рациональных корней данное уравнение не имеет, поэтому "подобрать" корень не удастся. Не напоминает ли вам что-нибудь выражение $4x^3 - 3x$? Вообще, в математике бывает, что решение возникает *по ассоциации* с чем-то известным (а потому, чем больше знаешь – тем больше может быть разнообразных ассоциаций). Автор намекает на формулу косинуса тройного угла: действительно, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Следовательно, если сделать замену $x = \cos t$, то данное уравнение преобразуется к виду $\cos 3t = \frac{1}{2}$, откуда $t = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку нас интересуют только значения $x = \cos t$, то ответ: $x = \cos\frac{\pi}{9}; \cos\frac{5\pi}{9}; \cos\frac{7\pi}{9}$.

Может показаться, что приведенное рассуждение имеет слишком частный характер, однако дело обстоит совсем наоборот. Дело в том, что если кубическое уравнение имеет три действительных корня, то они всегда могут быть выражены через тригонометрические функции. Действительно, сделаем в приведенном уравнении $x^3 + px + q = 0$ замену

$x = ky$, при этом коэффициент k подберем так, чтобы отношение коэффициентов при y^3 и y в полученном в результате этой замены уравнении было бы равно $-\frac{4}{3}$. Таким образом, в уравнении $k^3y^3 + kpy + q = 0$ потребуем, чтобы $\frac{k^2}{p} = -\frac{4}{3}$, так что $k^2 = -\frac{4p}{3}$. Следовательно, уравнение преобразуется к виду $\frac{kp}{3}(4y^3 - 3y) = q$. Теперь, после замены $y = \cos t$, получим уравнение $\cos 3t = \frac{3q}{kp}$. Полученное тригонометрическое уравнение имеет решение, если $\left|\frac{3q}{kp}\right| \leq 1$, или $9q^2 \leq k^2p^2 = -\frac{4}{3}p^3$, или $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$. Полученное неравенство имеет место как раз тогда, когда исходное уравнение имеет три корня (с учетом их кратности; см. задачу 6.2). Приведем (для красоты) окончательный ответ:

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}q}{2\sqrt{-p^3}} + \frac{2\pi n}{3}\right), \quad n = 0, 1, 2.$$

е) Данное уравнение рациональных корней, конечно, не имеет, поэтому понизить степень не удастся. Идея решения состоит в том, чтобы постараться представить данный многочлен в виде разности квадратов квадратичного и линейного многочленов. Поскольку в данном многочлене нет члена, содержащего x^3, а коэффициент при x^4 равен 1, то квадратичный многочлен должен иметь вид $x^2 + a$. Итак,

$$x^4 + 4x - 1 = (x^2 + a)^2 - c(x + b)^2 = x^4 + (2a - c)x^2 - 2bcx + a^2 - b^2c,$$

таким образом, $c = 2a$ и искомое разложение должно иметь вид

$$x^4 + 4x - 1 = (x^2 + a)^2 - 2a(x + b)^2 = x^4 - 4abx + a^2 - 2ab^2.$$

Приравняв коэффициенты при x и свободные члены, получим систему

$$\begin{cases} ab = -1, \\ 2ab^2 - a^2 = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ab = -1, \\ a^2 + 2b = -1. \end{cases}$$

Прямая подстановка приводит к уравнению $a^3 + a - 2 = 0$, корнем которого является $a = 1$, так что $b = -1$. Значит,

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4x - 1 = (x^2+1)^2 - 2(x-1)^2 = \\
= (x^2 + x\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}),
\end{aligned}
$$

откуда $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$.

Кстати, то, что многочлен x^3+x-2 имеет только один действительный корень, очевидно, так как задаваемая им функция возрастает на всей числовой прямой.

Метод, использованный при решении задачи 4е, известен как метод Феррари. Многочлен степени 4 с действительными коэффициентами раскладывается в произведение двух квадратичных многочленов с действительными коэффициентами. Суть метода состоит в том, что для того, чтобы найти коэффициенты квадратичных многочленов – сомножителей, достаточно решить кубическое уравнение.

Задача 5. Корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ при некотором a образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

Данная задача предлагалась на вступительных экзаменах, и то, что нужно для ее решения, в общем, не выходит за рамки школьной программы. Конечно, удобно симметризовать условие, обозначив через b средний член прогрессии, а через d, как обычно, ее разность. Поскольку числа $b-d$, b и $b+d$, по условию, являются корнями уравнения, то данный многочлен можно представить в виде произведения

$$
\begin{aligned}
x^3 - 5x^2 + 3x + a = (x-b+d)(x-b)(x-b-d) = \\
= (x-b)((x-b)^2 - d^2) = (x-b)^3 - d^2(x-b) = \\
= x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 - d^2x + bd^2.
\end{aligned}
$$

Поскольку равенство многочленов – это равенство их коэффициентов, то, приравняв коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получим систему

$$\begin{cases} -6 = -3b, \\ 3 = 3b^2 - d^2, \\ a = bd^2 - b^3, \end{cases}$$

откуда $b = 2$ и $d = \pm 3$ (а $a = 10$). Таким образом, ответ: прогрессия $-1, 2, 5$. Может быть, надо еще указать и прогрессию $5, 2, -1$.

В приведенном решении мы, по-существу, доказали и воспользовались формулами Виета для кубического уравнения. Итак, если x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$, то

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ = (x - x_1)(x^2 - (x_2 + x_3)x - x_2x_3) = \\ = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

Нетрудно выписать аналогичные формулы для корней многочлена произвольной степени (см. *Справочник*).

> Обратите внимание, что в этих формулах корень должен участвовать столько раз, какова его кратность!

В следующей задаче будут приведены некоторые полезные тождества.

Задача 6. Докажите тождества:

а) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;

б) $(x + y)^2 + (xy - 1)^2 = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$;

в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$;

г) $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) =$
$= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$

а) Конечно, можно раскрыть скобки и привести подобные члены, а можно выразить левую часть в виде разности квадратов:

$$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

б) Проще всего установить это тождество, раскрыв скобки в его левой и правой частях.

в) Если раскрыть скобки в правой части, то получится 18 одночленов, из которых 14 должны попарно сократиться, однако в преобразованиях можно сделать ошибку. Будет полезнее пойти другим путем – путем разложения на множители. Итак, имеем,

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y)(x^2-xy+y^2)+z^3-3xyz = \\ &= (x+y)(x^2-xy+y^2)+z(x^2-xy+y^2)- \\ &\quad -z(x^2-xy+y^2)+z^3-3xyz = \\ &= (x+y+z)(x^2-xy+y^2)-z(x^2+y^2-z^2+2xy) = \\ &= (x+y+z)(x^2-xy+y^2)-z(x+y+z)(x+y-z) = \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx). \end{aligned}$$

г) Ясно, что раскрывать скобки в левой части “в лоб” вряд ли целесообразно, поскольку всего у нас окажется $3^4 = 81$ одночлен, разумнее сгруппировать их по две. Имеем,

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2 = a^2+b^2-c^2+2ab$$

и

$$(b+c-a)(c+a-b) = c^2-(a-b)^2 = c^2-a^2-b^2+2ab,$$

таким образом, левая часть равна

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

Кстати, выражение в левой части участвует в формуле Герона для площади треугольника.

Приведем следствие формулы 5в. Поскольку

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \tfrac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^3 + (z-x)^2),$$

то $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$ тогда и только тогда, когда $x+y+z=0$ или $x=y=z$.

Неожиданным образом это тождество используется при решении иррациональных уравнений с кубическими корнями.

Задача 7. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}$.

Если $a+b=c$, то

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 + 3abc = c^3.$$

Поэтому, возведя обе части данного уравнения в куб и воспользовавшись им еще раз, получим, что

$$x - 1 + x + 1 + 3x\sqrt[3]{2(x^2-1)} = 2x^3,$$

или $3x\sqrt[3]{2(x^2-1)} = 2x(x^2-1)$. Следовательно, $x = 0; \pm 1$ или $\sqrt[3]{4(x^2-1)^2} = 3$, откуда $x^2 - 1 = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $x^2 = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $x = \pm\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$. Осталось проверить, что мы не получили "лишних" решений. В силу сказанного, если $a^3+b^3+3abc = c^3$, то $a+b=c$ или $a=b=-c$. Однако в нашем случае второй вариант невозможен, поскольку $x-1 \neq x+1$.

Задача 8. Найдите:

а) x^5+y^5, если $x+y=2$ и $x^3+y^3=5$;

б) $x^5+y^5+z^5$, если $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^3+y^3+z^3=a^3$.

Систему пункта а)

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x^3+y^3=5 \end{cases}$$

можно решить прямой подстановкой, а потом найти сумму пятых степеней найденных значений x и y, однако провести аналогичное вычисление для системы б) будет затруднительно.

В силу этого, первую из этих систем мы также будем решать, используя выражение симметрических многочленов через элементарные симметрические многочлены.

Положим $u = x + y$, $v = xy$. Имеем,

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv.$$

Следовательно, $u = 2$ и $u^3 - 3uv = 5$, откуда $v = \frac{1}{2}$. Смысл дальнейшего рассуждения состоит в том, что искать значения самих исходных переменных не имеет смысла. Действительно,

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = 10 - \tfrac{1}{4} \cdot 2 = 9{,}5.$$

б) Положим $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ и $w = xyz$. Имеем,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = u^2 - 2v.$$

Далее,

$$\begin{gathered} x^3 + y^3 + z^3 = \\ = 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = \\ = 3w + u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv + 3w. \end{gathered}$$

Таким образом, из первых двух уравнений системы следует, что $u = a$, $v = 0$, а из третьего, что и $w = 0$. В силу формул Виета для кубического уравнения, x, y и z являются корнями уравнения

$$x^3 - ux^2 + vx - w = 0,$$

которое, как оказалось, в данном случае имеет вид $x^3 - ax^2 = 0$. Таким образом, две из неизвестных равны нулю, а третья равна a, так что ответ ясен: $x^5 + y^5 + z^5 = a^5$.

Многочлен от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется симметрическим, если он не изменяется при всех перестановках входящих в него переменных. Для многочленов $p(x, y)$ от двух переменных условие выглядит совсем просто: $p(x, y) = p(y, x)$.

По-другому его можно сформулировать следующим образом: коэффициенты при одночленах $x^k y^l$ и $x^l y^k$ должны быть равны друг другу. Существует n элементарных симметрических многочленов от n переменных, которыми являются многочлены, появляющиеся в формулах Виета. Основная теорема утверждает, что всякий симметрический многочлен выражается через элементарные симметрические многочлены. К примеру, имеются два элементарных многочлена от двух переменных, $u = x+y$ и $v = xy$, а

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = u^5 - 5u^3v + 5uv^2.$$

В разделе "Иррациональные уравнения" мы не рассматривали корней степени выше второй. Такие уравнения, по-существу, решаются другими методами. Первый пример был дан в задаче 6. В следующей задаче приведен еще один.

Задача 9. Решите уравнение $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1.$

Два корня очевидны: $x = \pm\frac{1}{2}$. Можно доказать (при помощи производной), что других корней нет. Другой способ решения основан на сведении данного уравнения к системе алгебраических уравнений. Положим $u = \sqrt[5]{\frac{1}{2} + x}$ и $v = \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x}$, тогда

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^5 + v^5 = 1. \end{cases}$$

Систему можно решить стандартным способом: сделав подстановку $v = 1 - u$, после преобразований мы получим уравнение $u(u-1)(u^2 - u + 1) = 0$, откуда $u = 0; 1$.

Разложение на множители часто используется при решении систем алгебраических уравнений.

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30, \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11. \end{cases}$$

Нетрудно разложить правую часть первого уравнения на множители и привести систему к виду

$$\begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy) = 30, \\ xy(x+y) + xy + x + y = 11. \end{cases}$$

Теперь ясно, что, положив $t = xy(x+y)$ и $z = xy + x + y$, получим систему

$$\begin{cases} zt = 30, \\ z + t = 11, \end{cases}$$

значит, $(z,t) = (5,6); (6,5)$. Теперь положим $u = x + y$ и $v = xy$, имеем

$$\begin{cases} uv = 5, \\ u + v = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} uv = 6, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Как продолжить, думаю, понятно.

Ответ: $(x,y) = (2,1); (1,2); \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right); \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$.

Необходимо подчеркнуть, что, вообще говоря, подобные системы решить невозможно. В данном случае решение можно было провести только в силу того, что оказалось возможным представить эту систему в виде своего рода композиции трех стандартных систем, каждая из которых сводится к квадратному уравнению. В следующем примере используется возможность получить однородное уравнение.

Задача 11. Решите систему

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy, \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2. \end{cases}$$

Как видно, ни одно из данных уравнений системы не является однородным, однако если выразить xy из первого уравнения и подставить во второе, то мы получим однородное и, более того, симметричное уравнение

$$45(x^4 + y^4) = 17(x^2 + y^2)(x^2 + 2xy + y^2).$$

Одним из его решений является $(x, y) = (0, 0)$. Далее, поделив обе части на x^2y^2, получим уравнение

$$45\left(\tfrac{x^2}{y^2} + \tfrac{y^2}{x^2}\right) = 17\left(\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x}\right)\left(\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x} + 2\right).$$

В результате замены $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ мы получим уравнение

$$45(t^2 - 2) = 17t(t + 2),$$

или $14t^2 - 17t - 45 = 0$, откуда $t = -\frac{9}{7}; \frac{5}{2}$. Уравнение $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{9}{7}$ решений не имеет. Если $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$, то $y = 2x$ или $x = 2y$. Из первого уравнения следует, что $x = 2; 4$, откуда и следует ответ: $(x, y) = (0, 0); (2, 4); (4, 2)$.

Задача 12. Упростите выражения:

а) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \dfrac{2x(x-1)^2}{x^4 + x^2 + 1} + \dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8 + x^4 + 1}$;

б) $\dfrac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$;

в) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

а) Разумнее всего сначала сложить две первые дроби, воспользовавшись тождеством 5а. Числитель суммы равен

$$(x^2 - x + 1)^2 + 2x(x-1)^2 = x^4 - x^2 + 1,$$

далее аналогично. Ответ: $\frac{x^8 - x^4 + 1}{x^8 + x^4 + 1}$.

б) Данное выражение представляет собой квадратичный многочлен $p(x)$. Подставив $x = a$, получим, что

$$p(a) = \frac{ac(b-a)}{b-c} + \frac{ab(a-c)}{b-c} = \frac{abc - ac^2 - abc + a^2b}{b-c} = a^2.$$

Ясно, что $p(b) = b^2$ и $p(c) = c^2$. Поскольку квадратный трехчлен однозначно определяется своими значениями в трех различных точках, то $p(x) = x^2$.

в) Ответ: $a+b+c$. Можно сразу привести к общему знаменателю и произвести разложение на множители, однако разумнее, как и в примере а), сначала сложить первые две дроби. Имеем,

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}=\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)}{(a-b)(c-b)(c-a)}=$$
$$=\frac{ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)}{(a-b)(c-b)(c-a)}=$$
$$=\frac{(a-b)(ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(c-b)(c-a)}=$$
$$=\frac{a^2b+ab^2-a^2c-abc-b^2c}{(c-b)(c-a)}.$$

Знаменатель полученной дроби равен знаменателю третьей из данных дробей. Вычислим числитель их суммы:

$$a^2b-a^3+ab^2-abc+c^3-b^2c=$$
$$=a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2)=(b-c)(a^2+ab-bc-c^2)=$$
$$=(b-c)((a-c)(a+c)+b(a-c))=(c-b)(c-a)(a+b+c),$$

откуда и следует ответ.

Задача 13. Разложите на линейные множители многочлены:

а) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$;

б) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

а) Найдем целые корни данного многочлена. Нетрудно проверить, что $x=1$ – корень, так что $x-1$ является его множителем:

$$x^4-x^3-9x^3+9x^2+26x^2-26x-24x+24=(x-1)(x^3-9x^2+26x-24).$$

Корнем также является и $x = 2$, откуда

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 14x + 12x - 24 =$$
$$= (x-2)(x^2 - 7x + 12).$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 7x + 12$ являются $x = 3; 4$, откуда и следует ответ: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

б) Вначале воспользуемся формулой разности кубов, сгруппировав первую и вторую пару слагаемых, поскольку сразу видно, что в сгруппированных выражениях имеется общий множитель $b+c$, а затем используем формулу разности квадратов. Итак,

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 =$$
$$(b+c)((a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2) - (b+c)(b^2 - bc + c^2) =$$
$$= (b+c)((a+b+c)^2 - b^2 + a^2 - c^2 + a^2 + ab + ac + bc) =$$
$$= (b+c)((a+c)(a+2b+c) + (a+c)(a-c) + (a+b)(a+c)) =$$
$$= (b+c)(a+c)(a+2b+c+a-c+a+b) =$$
$$= 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Есть и другой подход к решению этой задачи, основанный на следующем свойстве многочленов от нескольких переменных. Пусть, к примеру, дан многочлен $p(x, y, z)$, причем $p(x, -x, z) = 0$, т. е. при подстановке $x = -y$ данный многочлен обращается в ноль. Тогда существует такой многочлен $q(x, y, z)$, что $p(x, y, z) = (x+y)q(x, y, z)$. Очевидно, что многочлен из нашего примера б) обращается в ноль как при $a = -b$, так и при $b = -c$, а также и при $c = -a$, Значит, он делится на каждый из линейных двучленов $a+b$, $b+c$ и $c+a$, следовательно, он делится и на их произведение. Так как данный многочлен – кубический, то он равен $k(a+b)(b+c)(c+a)$, где k – некоторая константа. Найти ее несложно, если подставить $c = b = a$, то получим равенство $24a^3 = k \cdot 8a^3$, так что $k = 3$.

Задача 14. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то

а) $ab + bc + ca \leq 0$;

б) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

а) Так как $a+b+c=0$, то

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0,$$

значит, $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\leq 0$. Другой способ:

$$ab+c(a+b)=ab-(a+b)^2=-(a^2+ab+b^2)\leq 0.$$

б) В силу равенства пункта а, $a^2+b^2+c^2=-(2ab+2bc+2ca)$, откуда

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4abc(a+b+c))=$$
$$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

С другой стороны,

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

откуда и следует ответ.

Задача 15. Докажите, что следующие многочлены делятся на трехчлен x^2+x+1:

а) $x^{3k}+x^{3l+1}+x^{3n+2}$ при любых натуральных k,l,n;

б) $x^{2n}+x^n+1$, если n не кратно трем;

в) $(x+1)^n-x^n-1$, если остаток при делении n на 6 равен 1 или 5.

а) Так как одним из множителей в разности

$$x^{3k}+x^{3l+1}+x^{3n+2}-(x^2+x+1)=x^{3k}-1+x(x^{3l}-1)+x^2(x^{3n}-1)$$

является многочлен x^3-1, делящийся на x^2+x+1, то и данный многочлен делится на x^2+x+1.

б) Утверждение доказывается индукцией по n, поскольку разность

$$x^{2n+6} + x^{n+3} + 1 - (x^{2n} + x^n + 1) = x^{2n}(x^6 - 1) + x^n(x^3 - 1)$$

делится на $x^2 + x + 1$, и очевидно, что оно верно при $n = 1, 2$.

в) Используем утверждение предыдущего пункта. Заметим, что по условию n нечетно и не делится на 3. Имеем,

$$(x+1)^n - x^n - 1 = (x^{2n} + (x+1)^n) - (x^{2n} + x^n + 1).$$

Первая скобка делится на x^2+x+1, так как n нечетно, вторая – в силу предыдущего пункта, поскольку n не делится на 3.

Самый естественный способ решения этой задачи основан на использовании комплексных чисел (см. Дополнение 1).

Задача 16. Докажите, что уравнение $x^7 = 12x^5+x^4+5x^2+1$ имеет единственный положительный корень, который при этом лежит в отрезке $[3; 4]$.

Покажем, что данное уравнение не имеет корней на луче $[4; +\infty)$. Действительно, если $x \geq 4$, то

$$x^7 \geq 16x^5 = 12x^5 + 4x^5 \geq 12x^5 + 16x^4 > 12x^5 + x^4 + 5x^2 + 1.$$

Если же $0 < x \leq 3$, то $x^7 \leq 9x^5 < 12x^5 + x^4 + 5x^2 + 1$. Следовательно, все положительные корни данного уравнения содержатся в отрезке $[3; 4]$. Можно найти производную и доказать, что она положительна на этом отрезке, однако в нашем случае естественнее поступить по-другому.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^5} + \frac{1}{x^7} = 1.$$

Поскольку выражение, стоящее в его левой части, убывает на $(0; +\infty)$, то более одного корня уравнение иметь не может.

В решении последней задачи использовалась оценка корней многочлена. Сейчас мы получим одну общую оценку, которая

5 Зак 1116

точной не является; в конкретных случаях бывает возможно получить более точные оценки.

Рассмотрим многочлен $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Положим $r = 1 + \max|a_i|$. Оказывается, что все корни многочлена $p(x)$ лежат на отрезке $[-r; r]$. Для удобства введем обозначение $m = \max|a_i|$. Действительно, если $|x| > r$, то

$$\begin{aligned}
|x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n| &\geq |x|^n - \big(|a_1||x|^{n-1} + \ldots + |a_n|\big) \geq \\
&\geq |x|^n - m\big(1 + |x| + \ldots + |x|^{n-1}\big) = |x|^n - m\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} = \\
&= \frac{|x|^{n+1} - (m+1)|x|^n + m}{|x| - 1} = \frac{|x|^n\big(|x| - (m+1)\big) + m}{|x| - 1} > 0.
\end{aligned}$$

Справочник

1. Обобщения двух известных тождеств “сокращенного умножения”.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots + b^{2n})$$

2. Теорема о делении с остатком и ее следствия. Для всяких многочленов $p(x)$ и $q(x)$ существуют единственные многочлены $d(x)$ и $r(x)$, причем степень многочлена r меньше степени q, такие что $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

Следствие 1. Теорема Безу. Число a является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $x - a$.

Следствие 2. Если многочлен $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обращается в ноль при $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$, то этот многочлен делится на $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, т. е. существует такой многочлен $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)q(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

3. Обобщенные формулы Виета. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\tfrac{a_1}{a_0},$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \tfrac{a_2}{a_0},$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \tfrac{a_n}{a_0},$$

причем в этих формулах каждый корень участвует столько раз, какова его кратность. Также следует учитывать, что в этих формулах должны присутствовать *все* корни многочлена, в том числе и комплексные.

4. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Если число $\frac{p}{q}$, где p и q не имеют общих делителей, есть корень многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, у которого все его коэффициенты a_k – целые числа, то p является делителем a_n – свободного члена данного многочлена, а q – делителем коэффициента a_0 при его старшей степени. В качестве следствия получаем, что все рациональные корни многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами сами являются целыми числами.

5. Основная теорема о симметрических многочленах. Назовем многочлен $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрическим, если для всякой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ индексов $(1, 2, \ldots, n)$ верно, что $p(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Теорема. Для всякого симметрического многочлена p существует такой многочлен $q(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, что имеет место тождество

$$q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

здесь $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ – многочлены, которые были определены в предыдущем пункте (так называемые *элементарные симметрические многочлены*).

Задачи для самостоятельного решения

Конечно, можно вместо уравнений рассматривать неравенства; разница невелика. Если вам удалось найти корни уравнения, то, разложив многочлен на множители, будет совсем нетрудно решить соответствующее неравенство, поскольку для этого есть стандартный прием – так называемый *метод интервалов.*

6.1. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, и найдите остальные его корни.

6.2. При каких значениях параметров p и q приведенное кубическое уравнение $x^3+px+q=0$ имеет: а) кратный корень; б) три различных действительных корня?

6.3. Решите уравнения: а) $x^3+(1-a^2)x+a=0$;
б) $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$; в) $x^4=\frac{11x-6}{6x-11}$.

6.4. Решите уравнения: а) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$;
б) $x^4+2x^3-20x^2+4x+4=0$.

6.5. Решите неравенства: а) $3x^3-5x^2-5x-1\geq 0$;
б) $x^3+2x^2+2\geq \frac{1}{x}$.

6.6. Решите уравнение $\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x)^2}=\sqrt[n]{1-x^2}$.

6.7. Известно, что $a<b<c$, $a+b+c=6$ и $ab+bc+ca=9$. Докажите, что $0<a<1<b<3<c<4$.

6.8. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \\ xy+yz+zx=27. \end{cases}$$

6.9. Разложите на множители многочлены:
а) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$;
б) $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$;
в) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$.

6.10. Решите системы

а) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=xy+2(\sqrt{2}-1), \\ x^2+y^2=x^2y^2. \end{cases}$

6.11. Решите уравнение $\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{2}}-\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{2}}=x$.

6.12. Докажите, что многочлен: а) $(x+1)^n-x^n-2x-1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$, если n четно; б) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ делится на $(x-1)^3$.

6.13. Найдите все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найдите это решение.

6.14. Решите системы:

а) $\begin{cases} x^2=2y-1, \\ x^4+y^4=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2x^2-1)=1. \end{cases}$

6.15. а) Может ли прямая в двух различных точках касаться графика $y=x^3+2x^2-3x+1$? б) Найдите прямые, касающиеся графика $y=x^4+2x^3+x^2+12x+5$ в двух различных точках.

6.16. Докажите, что многочлен $\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1}+1$ не имеет кратных корней.

Комментарии и советы

6.1. Все, что надо сделать – это дважды возвести в квадрат равенство $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ и проследить, какие еще корни при этом могут появиться.

6.2. Для ответа на первый вопрос используйте признак существования кратного корня или же воспользуйтесь формулами Виета для кубического многочлена. Для ответа на второй проще всего использовать технику математического анализа.

6.3. Угадайте некоторые корни.

6.4. В примере б) корень вам подобрать не удастся, воспользуйтесь тем, что это уравнение напоминает возвратное, и модифицируйте соответствующую замену.

6.5. Разложите на множители.

6.6. Оно однородное.

6.7. Рассмотрите кубический трехчлен, корнями которого являются числа a, b, c.

6.8. Используйте формулы Виета.

6.9. а) Множители очевидны. б) Если подумать, то один множитель будет ясен. в) См. пункт а.

6.10. а) См. тождество задачи 6б. б) Возведите в квадрат первое уравнение.

6.11. См. задачу 7.

6.12. а) Очевидно. б) См. задачу 2.

6.13. Задача на выделение полного квадрата.

6.14. а) После прямой подстановки получится уравнение степени 4, один корень которого виден. Полезно заметить, что $y \geq \frac{1}{2}$. б) Задача – тригонометрическая.

6.15. а) См. комментарий к задаче 2. б) Угадайте ответ и постарайтесь доказать, что он – единственный.

6.16. См. задачу 2.

Ответы и комментарии

6.1. Уравнение $x^4-10x^2+1=0$; корни $-\sqrt{2}-\sqrt{3}; \pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})$. Уравнения степени ниже четвертой получить не удастся, доказывать не будем, поскольку это завело бы нас слишком далеко.

6.2. а) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$; б) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$. Дадим ответ на первый вопрос, воспользовавшись формулами Виета. Пусть корнями данного уравнения являются числа t, t, u. Тогда $2t+u=0$, $2ut+u^2=p$ и $t^2u=-q$. Исключив u и t из этих трех равенств, мы и получим искомое соотношение между коэффициентами. Второе утверждение проще всего получить, если использовать производную.

6.3. а) $x=a; \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-4})$ (условие, при котором уравнение имеет три корня, очевидно). б) $x=-1; 2$. в) $x=-1; 2; \frac{1}{2}$.

6.4. а) $x=1; 2; \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

б) Сделайте замену $t=x+\frac{2}{x}$; ответ: $2\pm\sqrt{2}; -3\pm\sqrt{7}$.

6.5. а) $x \in \left[1-\sqrt{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty)$.
б) $x \in [-1-\sqrt{2}; 0) \cup [\sqrt{2}-1; +\infty)$.

6.6. Если n четно, то $x=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+1}$;

если n нечетно, то $x=\frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n+1}$.

6.7. Найдите промежутки монотонности и постройте график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

6.8. $x = y = z = 3$.

6.9. а) $3(x - y)(y - z)(z - x)$. б) $(x + y + z)(xy + yz + zx)$. в) $-(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$.

6.10. а) $(x, y) = (2, 1); (1, 2); (-2, 1); (1, -2); (-3, 0); (0, -3)$. б) $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

6.11. $x = 0; \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

6.12. а) Достаточно проверить, что $x = 0; -\frac{1}{2}; -1$ являются корнями данного многочлена.
б) Убедитесь, что $p(1) = p'(1) = p''(1) = 0$.

6.13. $a = -\frac{1}{2}$; $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6.14. а) $(x, y) = (\pm 1, 1)$. б) Замена $x = \cos t$, $y = \sin t$.
Ответ: $(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right); \left(\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$

6.15. а) Нет, не существует. б) $y = 12x + 5$.

7. Тригонометрические соотношения

Определение тригонометрических функций. Основные соотношения между ними и их следствия. Тождества в треугольнике. Значения для "нестандартных" углов. Формулы сложения.

Обсуждение. Ни с какой разумной точки зрения нельзя оправдать то внимание, которое уделяется тригонометрии в школе. Конечно, тригонометрические функции являют собой основной (в школе – единственный) пример периодических функций, поэтому их изучение важно для математического образования. Конечно, при решении многих геометрических задач необходимо использовать тригонометрические функции. Однако зачем школьников понуждают решать такое количество уравнений, большинство из которых имеют искусственный характер (измените один коэффициент и решить его будет невозможно)? Далее, при изучении данного раздела школьной программы учащимся приходится достаточно много запоминать: значения тригонометрических функций, формулы приведения, формулы аддитивности и их многочисленные следствия. Да, с точки зрения математика, многие тригонометрические соотношения красивы, но школьникам не под силу увидеть их скрытый смысл. Оправдать изучение тригонометрии могло бы изучение комплексных чисел, чего не происходит в обычной средней школе. А если смысла не видно, то учение лишается основного внутреннего мотива, остается только внешний, а именно: сдать выпускной и вступительный экзамены. В этой связи учителю необходимо хоть как-то оправдаться перед своими учениками за то, что он заставляет их заниматься вроде бы бессмысленной деятельностью.

Итак, какие обучающие функции может нести тригонометрия? Важно подчеркивать связь с геометрией, поскольку основными формулами, используемыми при "решении треугольников" являются формула косинусов и формула (теорема) синусов. И, наоборот, "стандартные" значения тригонометрических функций являются следствием простых соотношений в равнобедренном прямоугольном и равностороннем треугольниках. Далее, с одной стороны, тригонометрические преобразования просты, поскольку, грубо говоря, все можно выразить через синус и косинус, с другой стороны, они более сложны, поскольку между этими функциями имеется алгебраическое соотношение, в силу чего одна и та же функция может быть представлена бесчисленным числом способов; к примеру, ее можно умножить на сумму квадратов синуса и косинуса. Наконец, более естественны задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений и, в частности, задачи с параметрами.

При решении тригонометрических уравнений на первое место выступает умение "видеть" на пару шагов вперед. Очень часто приходится наблюдать работы, в которых несколько страниц исписаны преобразованиями данного в условии выражения без какого-либо плана. Подобные задачи должны приучить вначале составить план, а уж потом начинать его реализовывать. При этом для того чтобы не попасть в тупик, полезно вначале представить себе в уме, что же получится, если пойти по выбранному пути.

При изучении тригонометрии важно понимать, что синус и косинус можно определить аксиоматически. Именно если функции $c(x)$ и $s(x)$ таковы, что:

1. Они непрерывны на всей числовой прямой;
2. $c^2(x) + s^2(x) = 1$;
3. $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$ и $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$;
4. Наименьшим положительным корнем уравнения $c(x) = 1$ является $x = 2\pi$, то

$$c(x) = \cos x \text{ и } s(x) = \sin x.$$

Доказать это утверждение не слишком сложно, но только если мы будем использовать комплексные числа.

Почти каждую тригонометрическую задачу можно решить разными способами. Хорошим тоном является поиск решений, использующих минимум техники. Следующая задача является хорошим упражнением на свойства синуса и косинуса, как функций, и на одну из формул приведения. При этом важную роль играет понимание того, что π – это число!

Задача 1. Расположите в порядке возрастания числа $\cos 1$, $\sin 1$, $\cos 2$ и $\sin 2$.

Все, что надо знать – это монотонность синуса и косинуса, простые формулы приведения, а также простые оценки числа π. Поскольку $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$, то $\cos 1 < \sin 1$. Так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то $\cos 2 < 0$. Наконец, так как $\pi - 2 > 1$, то $\sin 2 = \sin(\pi - 2) > \sin 1$. Таким образом, ответ: $\cos 2 < \cos 1 < \sin 1 < \sin 2$.

> Как вам понравится следующее рассуждение: так как синус и косинус изменяются в пределах от -1 до 1, то их сумма меняется от -2 до 2? Кстати, а что в этом утверждении является справедливым?

Задача 2. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения: а) $a\cos^2 x + b\sin^2 x$; б) $a\cos x + b\sin x$.

а) Имеем,

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x = a\cos^2 x + b(1 - \sin^2 x) = b + (a - b)\sin^2 x.$$

При $a = b$ данное выражение постоянно и равно a. Предположим, что $a > b$. Поскольку $\sin^2 x$ меняется в пределах от 0 до 1, то наименьшее значение этого выражения равно b, а наибольшее равно $b + (a - b) = a$. Если $a < b$, то наименьшее значение равно a, а наибольшее равно b. Таким образом, данное выражение меняется в пределах от $\min\{a, b\}$ до $\max\{a, b\}$.

б) Воспользуемся тем, что если $u^2 + v^2 = 1$, то найдется такое число (угол) α, что $u = \cos\alpha$ и $v = \sin\alpha$. В нашем случае пусть $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Имеем,

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha),$$

следовательно, наименьшее значение равно $-\sqrt{a^2+b^2}$, а наибольшее равно $\sqrt{a^2+b^2}$. В частности, справедливо неравенство

$$|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

По самому определению, периодом и синуса, и косинуса является число 2π, откуда нетрудно получить, что периодом функции $\sin\omega x$ является $\frac{2\pi}{\omega}$. Однако не всегда по виду тригонометрического выражения легко определить период соответствующей функции.

Задача 3. Найдите периоды функций:

а) $y = \cos^4 x + \sin^4 x$; б) $y = \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$.

а) Наиболее простой способ решения задачи основан на стандартном преобразовании:

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x =$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \tfrac{1}{4}(1-\cos 4x) = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 4x,$$

из которого следует, что период данной функции совпадает с периодом $\cos 4x$, равным $\frac{\pi}{2}$. Кстати, из этого преобразования видно, что наименьшее значение данного выражения равно $\frac{1}{2}$, а наибольшее равно 1.

б) Удобно воспользоваться формулой, представляющей произведение синусов в виде разности косинусов, именно

$$\sin\tfrac{3x}{2}\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}(\cos x - \cos 2x).$$

“Очевидно”, что период равен 2π, однако известно, что период разности функций может быть меньше периода каждой из них, поэтому некоторое рассуждение необходимо провести. Найдем значения, в которых функция равна -1: $\frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x) = -1$ только тогда, когда $\cos x = -1$ и $\cos 2x = 1$, что имеет место при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, период не может быть меньше 2π.

Зная стандартные значения синуса и косинуса, нетрудно вычислить значения этих функций в других точках. К примеру, $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$. С другой стороны, мы могли бы воспользоваться соотношением аддитивности, написав, что $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Задача 4. Найдите значение при $x = \frac{\pi}{12}$ выражения:

а) $\cos^4 x + \sin^4 x$; б) $\cos x + \sin x$; в) $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$.

Можно прямо найти значения косинуса и синуса, воспользовавшись тем, что $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, откуда следует, что $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ и $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Мы, однако, поступим по-другому, проведя несколько полезных преобразований.

а) Из формулы 3а: $\cos^4\frac{\pi}{12} + \sin^4\frac{\pi}{12} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

б) Имеем, $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

в) Можно использовать тождество

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x},$$

так что $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Другой подход к решению этой задачи основан на преобразовании

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 5. Пусть A, B, C – углы треугольника. Докажите, что:

а) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

б) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ тогда и только тогда, когда он является прямоугольным;

в) $\operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A) = 0$ тогда и только тогда, когда он – равнобедренный.

а) Так как $A + B + C = \pi$, то, к примеру, $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$, откуда

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2} + 2\sin\tfrac{C}{2}\cos\tfrac{C}{2} = \\ = 2\cos\tfrac{C}{2}\left(\cos\tfrac{A-B}{2} + \cos\tfrac{A+B}{2}\right) = 4\cos\tfrac{A}{2}\cos\tfrac{B}{2}\cos\tfrac{C}{2}.$$

> Обратите внимание на решения пунктов б, в этой задачи. Слишком часто встречаются такие, с позволения сказать, "рассуждения": если угол C – прямой, то $\cos C = 0$ и также $\sin B = \cos A$, значит, $\cos^2 A + \cos^2 B = \cos^2 A + \sin^2 A = 1$, что и требовалось доказать.

б) Приведенное рассуждение, конечно, доказывает, что если треугольник – прямоугольный, то данное соотношение имеет место. Суть задачи состоит в доказательстве обратного утверждения. Проведем преобразования:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 = \\ = \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C - 1 = \\ = \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C = \\ = -\cos C(\cos(A - B) + \cos(A + B)) = -\cos A\cos B\cos C = 0$$

тогда и только тогда, когда один из углов треугольника – прямой.

в) Ясно, что доказывать надо только одно утверждение из двух, поскольку второе очевидно. Оставшееся утверждение естественно переформулировать следующим образом: если $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 0$ и $x + y + z = 0$, то хотя бы одно из чисел x, y или z равно πk, $k \in \mathbb{Z}$. Итак,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z,$$

откуда и следует требуемое.

Задача 6. Упростите выражения:

а) $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; б) $\dfrac{\cos^6 x + \sin^6 x - 1}{\cos^4 x + \sin^4 x - 1}$;

в) $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}$.

а) Конечно, можно использовать соотношения аддитивности и значения синуса и косинуса от $\frac{\pi}{3}$ (проведите такое вычисление). Поступим по-другому. В силу формул удвоения,

$$\cos^2 x + \cos^2\left(\tfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\tfrac{\pi}{3} - x\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2x + 1 + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3} + 2x\right) + 1 + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3} - 2x\right)\right) =$$
$$= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}(\cos 2x + 2\cos\tfrac{2\pi}{3}\cos 2x) = \tfrac{3}{2}.$$

б) Нами уже было показано, что

$$\cos^4 x + \sin^4 x - 1 = \frac{1}{4}(\cos 4x - 1).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим, что

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) =$$
$$= 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2x = \tfrac{5}{8} + \tfrac{3}{8}\cos 4x,$$

поэтому $\cos^6 x + \sin^6 x - 1 = \frac{3}{8}(\cos 4x - 1)$, таким образом, значение данной дроби равно $\frac{3}{2}$.

в) Казалось бы, все просто, так как

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = (\cos x + \sin x)^2$$
$$\text{и } 1 - \sin 2x = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = (\cos x - \sin x)^2,$$

однако все, что мы можем получить, так это равенство

$$\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = |\cos x + \sin x| + |\cos x - \sin x|.$$

Дальнейшее упрощение возможно при дополнительных предположениях. Если $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, то $\cos x + \sin x \geq 0$

и одновременно $\cos x - \sin x \geq 0$, поэтому данное выражение равно $2\cos x$; читатель может рассмотреть остальные случаи самостоятельно.

Поскольку косинус – непрерывная функция, то, к примеру, она принимает значение $\frac{1}{3}$, однако почему-то среди ее значений для разумных углов $\frac{1}{3}$ никогда не встречается. Дело в том, что, как не слишком сложно доказать, среди значений косинуса при x, являющимся рациональным кратным π, единственными рациональными значениями являются $0; \pm 1$ и $\pm\frac{1}{2}$.

Задача 7. а) Докажите, что значения $\cos x$ и $\sin x$ одновременно являются рациональными числами тогда и только тогда, когда рационально значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (за исключением пары значений $(-1, 0)$). б) Известно, что $\cos x + \cos y = a$ и $\sin x + \sin y = b$. Найдите $\cos(x-y)$ и $\cos(x+y)$.

а) Утверждение задачи является прямым следствием симпатичных и полезных тождеств:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

> Обратите внимание на то, что последние две формулы дают представление и синуса, и косинуса в виде рациональных функций от тангенса половинного угла. Это представление, в принципе, можно использовать и при решении тригонометрических уравнений, но, к сожалению, при этом будут получаться слишком сложные уравнения.

б) Имеем,

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y =$$
$$= \frac{1}{2}\left((\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2\right) - 1 = \frac{a^2+b^2}{2} - 1.$$

Перепишем данные равенства в виде

$$2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}=a,\quad 2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}=b,$$

откуда следует, что $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{b}{a}$. Следовательно,

$$\cos(x+y)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Задача 8. Вычислите:

а) $\cos\frac{\pi}{32}$; б) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корней}}$.

а) Ясно, что $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Продолжая в том же духе, получим, что

$$\cos\frac{\pi}{32}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}.$$

б) Думаю, что ни у кого не вызовет сомнений то, что

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корней}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\to 2\text{ при }n\to\infty.$$

Всем хорошо известно, как можно при помощи циркуля и линейки построить квадрат, правильные треугольник и шестиугольник. Издавна известно, что можно построить и правильный пятиугольник. Первым открытием юного (ставшего потом великим) Гаусса был метод построения правильного семнадцатиугольника. Оказывается, что возможность (или невозможность) геометрического построения имеет алгебраическую природу. Ясно, что, имея единичный отрезок, мы сможем построить отрезок длины, к примеру, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и можно доказать, что невозможно построить отрезок длины $\sqrt[3]{2}$ (таким образом, стоявшая с античных времен задача об удвоении куба неразрешима, что было доказано уже в XIX веке). Длина стороны вписанного в единичную окружность правильного пятиугольника равна $2\sin\frac{\pi}{5}$, поэтому вопрос о его построении при помощи циркуля и линейки напрямую связан со значением синуса угла $\frac{\pi}{5}$.

Задача 9. а) Докажите, что $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.
б) Найдите значения $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{10}$.

Ответим на вопросы пункта б), используя равенство пункта а). В обозначении $x=\cos\frac{2\pi}{5}$, оно имеет вид $2x^2-1+x=-\frac{1}{2}$, или $4x^2+2x-1=0$, откуда $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Так как искомое значение положительно, то $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Имеем, $\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}$, поэтому, положив $x=\cos\frac{\pi}{5}$, получим уравнение $4x^2-2x-1=0$, так что $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Имеем, $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Наконец, так как $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{10}$, то $\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Таким образом, нам осталось установить равенство а), которое удобно переписать в виде $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$. Следующее преобразование выглядит искусственным, однако его идея имеет геометрическую природу (сумма векторов, идущих из центра правильного пятиугольника в его вершины, равна нулю). Умножив левую часть равенства на $\sin\frac{\pi}{5}$ и воспользовавшись представлением произведения в виде суммы, получим $\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{5\pi}{5}-\sin\frac{3\pi}{5}$, которая очевидным образом равна нулю.

Задача 10. а) Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=1$ и $BC=3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что $\angle CAD+\angle EAD+\angle FAD=\frac{\pi}{2}$.
б) Докажите, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}+\operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}=\frac{\pi}{4}$.

Ясно, что для доказательства утверждения первого пункта достаточно показать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$, что есть частный случай равенства б (для $n=1$).

Положим $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$, $y = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}$ и вычислим тангенс их суммы. Имеем,

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+2}}{1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}} = \frac{n+2+n(n+1)}{(n+1)(n+2)-n} = 1$$

Поскольку $x+y$ лежит в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то отсюда и следует, что $x+y=\frac{\pi}{4}$.

Как ни странно, но если аргументы синуса образуют арифметическую прогрессию, то имеется формула для суммы значений, в которой не будет знака многоточия. В следующей задаче приведены частные случаи этой формулы.

Задача 11. Найдите суммы:

а) $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$.

б) $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.

в) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx$.

а) Так как $\sin(x+\pi) = -\sin x$, то $\sin\frac{(k+n)\pi}{n} = -\sin\frac{k\pi}{n}$, следовательно, данная сумма равна нулю.

б) Умножив данную сумму на $\sin\frac{\pi}{2n}$ и воспользовавшись представлением произведения синусов в виде разности косинусов, получим выражение

$$\tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2n}-\cos\tfrac{3\pi}{2n}+\cos\tfrac{3\pi}{2n}-\ldots+\cos\tfrac{(2n-3)\pi}{2n}-\cos\tfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2n}-\cos\tfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2n}-\cos\left(\pi-\tfrac{\pi}{2n}\right)\right) = \cos\tfrac{\pi}{2n},$$

значит, данная сумма равна $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

в) Имеем,

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx = \tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx).$$

Умножив выражение в скобках на $\sin x$ и воспользовавшись соответствующей формулой (см. предыдущий пункт), получим выражение

$$\tfrac{1}{2}(\sin(2n+1)x-\sin x) = \sin nx\cos(n+1)x,$$

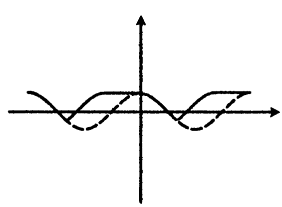
откуда и следует ответ: $\frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2\sin x}$. Конечно, предполагается, что $\sin x \neq 0$, но в противном случае сумма, очевидно, равна нулю.

Предложите следующую задачу вашим ученикам безо всяких предварительных обсуждений. Если они с ней не справятся, то дайте более простую, такую как задача 5.8.

Задача 12. Постройте график $y = f(x)$, где

$$f(x) = \max\{\sin t \mid t \in [x; x + \tfrac{\pi}{2}]\}.$$

Если $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то в отрезке $[x; x+\frac{\pi}{2}]$ лежит $t = \frac{\pi}{2}$, значение синуса в котором равно 1; оно и является наибольшим, таким образом, $f(x) = 1$. Если $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, то $[x; x+\frac{\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, следовательно, поскольку на этом отрезке синус убывает, то он принимает наибольшее значение на левом конце $[x; x + \frac{\pi}{2}]$, таким образом, $f(x) = \sin x$. Если $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$, то $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Осталось рассмотреть случай, когда $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$. Этот случай в действительности надо разбить на два, так как наибольшим значением синуса на отрезке $[x; x + \frac{\pi}{2}]$ будет его значение либо на левом конце, либо на правом, при $x \in [\pi; \frac{5\pi}{4}]$ и $x \in [\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}]$, соответственно. Искомый график на рисунке (пунктиром обозначен график синуса).



Задачи с обратными тригонометрическими функциями часто вызывают трудности. Все, что надо знать, так это то, что

$$x = \arcsin a \iff \begin{cases} \sin x = a, \\ x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

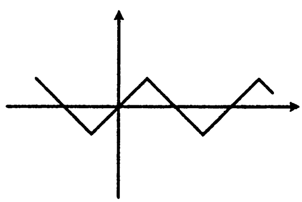
$$x = \arccos a \iff \begin{cases} \cos x = a, \\ x \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Задача 13. Постройте график функции $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

По определению, $\sin(\arcsin x) = x$ при всех $x \in [-1; 1]$, однако, опять-таки, по определению, $\arcsin(\sin x) = x$ только при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $y = \pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x = \sin y$. Значит,

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin y) = y = \pi - x.$$

Осталось заметить, что функция f является 2π-периодичной (покажите это). Искомый график – на рисунке.



Задача 14. Решите уравнение $2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$.

Если $\alpha = \arcsin x$, то $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2x^2$. Таким образом, $\cos(2 \arcsin x) = \cos(\arccos(1 - 2x^2))$, однако отсюда еще не следует, что $2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$ всегда (при всех допустимых значениях x), т. е. при всех $x \in [-1; 1]$. Дело в том, что из того, что $\cos \alpha = \cos \beta$, не следует, что $\alpha = \beta$, поэтому необходимо провести дополнительное исследование. Обозначим через l левую часть уравнения, а через r – правую. По определению арксинуса и арккосинуса, $-\pi \leq l \leq \pi$, $0 \leq r \leq \pi$, значит, для равенства $l = r$ необходимо, чтобы $l, r \in [0; \pi]$, что имеет место при $x \in [0; 1]$. Поскольку на отрезке $[0; \pi]$ косинус строго монотонен, то при сделанных предположениях на x из равенства $\cos l = \cos r$ следует, что $l = r$. Таким образом, ответ: $x \in [0; 1]$.

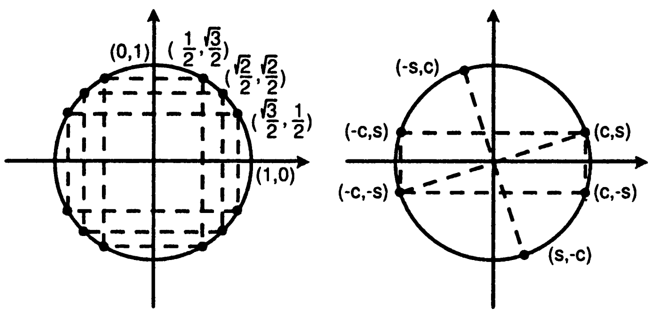
Можно подумать, что автор зря поместил следующую задачу в данный раздел, однако ей здесь самое место; по сути она геометрическая (тригонометрическая), что, в общем, видно по самой ее формулировке – не зря же предел равен 2π. Чтобы найти ее решение, надо "ощутить" правильную подстановку, что нетрудно сделать, если "чувствуешь" формулы.

Задача 15. Пусть $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$, $a_1 = 2$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = 2\pi$.

Итак, пусть $a_n = 2\sin\varphi_n$, таким образом, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\sqrt{4 - a_n^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2\varphi_n} = 2\cos\varphi_n$, откуда следует, что $a_{n+1} = 2\sin\frac{\varphi_n}{2}$. Значит, $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$. Осталось воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 2\pi \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2\pi.$$

Справочник



1. Формулы аддитивности.

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y;$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y};$$
$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right).$$

Следует иметь в виду, что правая часть в формуле тангенса суммы определена на более узком множестве, чем левая, поскольку к ограничениям $x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ добавляются ограничения $x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Тригонометрические функции кратных углов.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2 - 1;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x =$$
$$= \cos x(4\cos^2 x - 3) = \cos x(1 - 4\sin^2 x);$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x =$$
$$= \sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x(4\cos^2 x - 1);$$
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^3 x}{3\operatorname{tg} x - tg^3 x}.$$

Обратите внимание, что $\operatorname{tg} 2x$ определен при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, для существования левой части в формуле тангенса двойного угла еще необходимо, чтобы $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Формулы понижения порядка.

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x};$$
$$\cos^4 x = \tfrac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3);$$
$$\sin^4 x = \tfrac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3).$$

4. Преобразование суммы в произведение.

$$\cos x + \cos y = 2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2};$$
$$\cos x - \cos y = 2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{y-x}{2};$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2};$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\tfrac{x-y}{2}\cos\tfrac{x+y}{2}.$$

5. Преобразование произведения в сумму.

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y);$$
$$2\sin x\sin y = \cos(x-y)-\cos(x+y);$$
$$2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y).$$

6. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла.

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2};$$
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Обратите внимание. что при выражении синуса и косинуса через тангенс половинного угла одно решение может быть упущено, поскольку этот тангенс не существует при $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Первую формулу надо также использовать с осторожностью, так как выражение $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ определено на меньшем множестве, чем две другие дроби.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Вычислите: а) $\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}2^\circ\ldots\operatorname{tg}89^\circ$; б) $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$.

7.2. Изобразите множество, заданное неравенством

$$\cos(x+y)\geq\cos(x-y).$$

7.3. Расположите в порядке возрастания числа $\sin 1$, $\operatorname{tg}1$, $\sin 2$ и $\operatorname{tg}2$.

7.4. Изобразите на плоскости множество: а) всех пар (a,b), при которых неравенство $\sin(x+a)\geq\sin x+b$ верно для всех действительных x; б) середин отрезков, концы которых лежат на графике $y=\sin x$ (хорд этого графика).

7.5. Приведите примеры таких функций f, для которых период функции $f(\sin x)$ равен а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

7.6. Вычислите суммы:

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$;

б) $\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$.

7.7. Упростите выражение

$\cos^2(x+y) + \cos^2 y - 2\cos x\cos y\cos(x+y)$.

7.8. Пусть A, B и C – углы некоторого треугольника. Докажите, что:

а) $\cos A + \cos B + \cos C > 1$;

б) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$;

в) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$.

7.9. Что можно сказать о треугольнике ABC, если:

а) $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A) = 0$; б) $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$?

7.10. Найдите периоды функций:

а) $y = \sin x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$; б) $y = \cos x\cos 2x\cos 3x$.

7.11. Докажите тождества:

а) $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{tg} 3x$;

б) $\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z) = 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}$

7.12. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение $|2\sin x + 1| + |2\cos x - 1| = a$.

7.13. Докажите, что:

а) $\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$; б) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

7.14. Докажите, что кривая

$$x^4 + 2005x^3y - 6x^2y^2 - 2005xy^3 + y^4 = 0$$

делит единичную окружность на восемь равных дуг.

7.15. Найдите предел произведения $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}$.

Комментарии и советы

7.1. Используйте формулы приведения.

7.2. Сначала упростите неравенство.

7.3. См. задачу 1; покажите, что $\operatorname{tg} 1 > \sin 2$.

7.4. а) Используйте следующее очень простое соображение: неравенство $f(x) \geq c$ верно при всех x тогда и только тогда, когда c не превосходит наименьшего значения функции f. б) Точка (a, b) является серединой хорды графика $y = \sin x$ тогда и только тогда, когда найдутся такие числа x_1, x_2, что $2a = x_1 + x_2$ и $2b = \sin x_1 + \sin x_2$. Используйте также предыдущее указание.

7.5. Подберите такие функции указанных периодов, которые могут быть выражены через $\sin x$.

7.6. а) Вычислите тангенс. б) См. задачу 3.

7.7. Проще всего дополнить выражение до полного квадрата.

7.8. а) Выведите формулу, аналогичную формуле задачи 5а.

б) $\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}(A + B)$. в) $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)}$.

7.9. См. задачи 5б, в.

7.10. Избавьтесь от произведений.

7.11. а) Преобразуйте произведения $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$. б) В выражении, стоящем в левой части, сгруппируйте слагаемые по два.

7.12. Положите $u = \cos x$, $v = \sin x$. Что за множество на плоскости задает уравнение $\left|u - \frac{1}{2}\right| + \left|v + \frac{1}{2}\right| = \frac{a}{2}$?

7.13. а) См. задачу 7.11. б) См. задачу 9а.

7.14. Сведите задачу к поиску корней уравнения $\operatorname{tg} kx = a$.

7.15. См. задачи 12б, в.

Ответы и комментарии

7.1. а) 1, поскольку $\operatorname{tg} 89^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 1^\circ}$ и т. д. б) 1; кроме формулы приведения используется представление произведения синусов в виде разности косинусов.

7.2. Ответ: "бесконечная шахматная доска" (со стороной, равной π), так как данное неравенство записывается в виде $\sin x \sin y \leq 0$.

7.3. $\operatorname{tg} 2 < \sin 1 < \sin 2 < \operatorname{tg} 1$.

7.4. а) Множество, заданное неравенством $y \leq -2|\sin \frac{x}{2}|$.
б) Множество, заданное неравенством $|y| \leq |\sin x|$.

7.5. К примеру: а) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$; б) $f(x) = 3x - x^3$.

7.6. а) $\frac{\pi}{4}$. б) $\frac{3}{2}$.

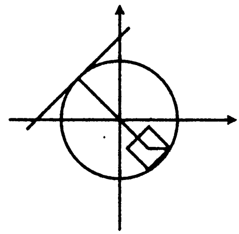
7.7. $\sin^2 x$.

7.8. а) $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

7.9. а) Он равнобедренный. б) Равнобедренный или прямоугольный.

7.10. а) $\frac{2\pi}{3}$. б) π.

7.12. $a \in [\sqrt{3} - 1; 2(\sqrt{2} + 1)]$. См. рисунок.



7.14. Получите уравнение $\operatorname{tg} 4\varphi = -\frac{4}{2005}$.

7.15. Ответ: $\frac{2}{\pi}$, так как данное произведение равно $\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$.

8. Тригонометрические уравнения, системы, неравенства

Сведение тригонометрических уравнений к системам алгебраических уравнений. Тригонометрические уравнения с дополнительными ограничениями. Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические уравнения, содержащие радикалы. Исследование тригонометрических уравнений. Решение тригонометрических неравенств; "метод интервалов" на окружности. Некоторые стандартные методы решения тригонометрических уравнений.

Обсуждение. В определенном смысле тригонометрические уравнения – это специальный случай систем алгебраических уравнений. Действительно, если записать данное уравнение в виде $f(\cos x, \sin x) = 0$ (выразив все входящие в него тригонометрические выражения через синус и косинус), то система

$$\begin{cases} f(u, v) = 0, \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

равносильна исходному уравнению. Однако ранее в *разделе 6* было показано, что, наоборот, чтобы решить кубическое уравнение, полезно свести его к тригонометрическому. Другое дело, что и обратное преобразование бывает полезным (см. задачу 1). Чисто "тригонометрические" решения основаны на возможности сведения данного уравнения к совокупности так называемых простейших тригонометрических уравнений: $\sin kx = a$, $\cos kx = a$ и $\operatorname{tg} kx = a$ посредством а) замены или б) разложения на множители (задача 2). С точки зрения автора, более содержательными являются задачи, в которых на решения накладываются различные ограничения, вытекающие из области его определения, или же явно сформулированные (задача 3); при этом порой приходится решать тригонометрические неравенства. Особое положение занимают тригонометрические уравнения с параметрами в связи с тем, что областью значений синуса и косинуса является всего-навсего отрезок $[-1;1]$ (задача 4). Кроме того, порой именно существующие ограничения на значения позволяют решить данное уравнение (задача 5).

С методической точки зрения неразумно вводить специальные способы решений уравнений различных типов; запомнить их невозможно, а если учащийся попробует это сделать, то вместо общих схем у него в голове будет винегрет.

Уравнения, в которых участвуют обратные тригонометрические функции, не рассматриваются в этом разделе, поскольку идеи их решения не имеют практически ничего общего с идеями решения обычных тригонометрических уравнений (см. далее *раздел 14*).

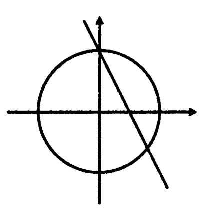
Задача 1. а) Решите уравнение $2\cos x+\sin x = 1$. б) Решите неравенство $\cos x + \sin x \geq 1$. в) Найдите все значения a, при которых имеет решение система

$$\begin{cases} x(x+y) = a, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

а) Положив $u = \cos x$, $v = \sin x$, перейдем к системе

$$\begin{cases} 2u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases}$$

решая которую получим, что $v = 1 - 2u$, так что $5u^2 - 4u = 0$, откуда $u = 0$ или $u = \frac{4}{5}$ (рисунок).



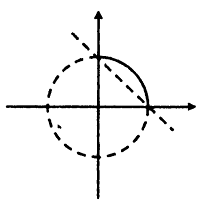
Будет грубой ошибкой написать, что раз $u = \cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, поскольку мы сейчас решаем систему, так что нам необходимо определить значения пары (u, v).

Если $u = 0$, то $v = 1$, если $u = \frac{4}{5}$, то $v = -\frac{3}{5}$, таким образом $(\cos x, \sin x) = (0, 1)$; $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, значит, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или же $x = -\arccos\frac{4}{5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Для того чтобы решить данное неравенство, воспользуемся геометрической интерпретацией множества, заданного системой

$$\begin{cases} u + v \geq 1, \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases}$$

которое является частью единичной окружности, лежащей в первой координатной четверти (рисунок), таким образом, $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



в) Перейдем от алгебраической системы к тригонометрическому уравнению посредством замены $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, получив в результате уравнение $2\cos t(\cos t + \sin t) = a$, или $1 + \cos 2t + \sin 2t = a$, или $\cos 2t + \sin 2t = a - 1$, которое имеет решение, если $|a - 1| \leq \sqrt{2}$, таким образом, $a \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

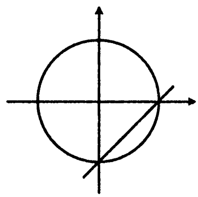
Проведите также другое рассуждение, основанное на исследовании уравнения $2x(x + y) = a(x^2 + y^2)$.

Задача 2. Решите уравнения: а) $\cos 2x = \cos x + \sin x$; б) $\sin 2x = \cos x + \sin x$; в) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

а) Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, то, вынеся общий множитель $\cos x + \sin x$, получим уравнение

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0,$$

так что $\sin x = -\cos x$ или $\cos x - \sin x = 1$. В первом случае имеем $\operatorname{tg} x = -1$, или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, во втором проще всего действовать как в решении пп. а, б задачи 1 (рисунок), так что $x = 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



б) Если $t = \cos x + \sin x$, то $t^2 = (\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$, так что в результате замены мы получим уравнение $t^2 - 1 = t$, или $t^2 - t - 1 = 0$. Его корнями являются числа $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, однако $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}$, поэтому уравнение $\cos x + \sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ не имеет решений. Далее, $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, откуда $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, таким образом, $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Решим задачу двумя способами. Вначале непосредственно сведем данное уравнение к алгебраическому при помощи замены $t = \cos x$. Поскольку $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$ и $\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3) = 4t^3 - 3t$, то мы получим уравнение $t + 2t^2 - 1 + 4t^3 - 3t = 0$, или $(2t+1)(2t^2 - 1) = 0$, откуда $t = -\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Другое рассуждение: так как $\cos x + \cos 3x = 2\cos x \cos 2x$, то мы получаем уравнение $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$, откуда следует, что $\cos 2x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Задача 3. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^2 x = 10$. б) Найдите наибольшее решение уравнения $\cos^2 3x + \cos^2 5x = \sin^2 2x$, лежащее в отрезке $[0; 3]$. в) Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

а) Положив $t = \operatorname{tg}^2 x$, получим уравнение $\frac{4t}{(1-t)^2} + t = 10$, или $t^3 - 12t^2 + 25t - 10 = 0$, один из корней которого равен 2. Выделив линейный множитель, получим $(t-2)(t^2 - 10t + 5) = 0$, так что два других корня равны $5 \pm 2\sqrt{5}$. Так как $5 - 2\sqrt{5} < 2$, то наименьшим положительным корнем данного уравнения является $\operatorname{arctg} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

б) Преобразуем уравнение к виду

$$1 + \tfrac{1}{2}(\cos 6x + \cos 10x) = \sin^2 2x,$$

или $1 + \cos 4x + \cos 6x + \cos 10x = 0$, $2\cos^2 5x + 2\cos 5x \cos x = 0$, или $4\cos 2x \cos 3x \cos 5x = 0$. Значит,

$$x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi k}{2};\ \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi k}{3};\ \tfrac{\pi}{10} + \tfrac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Осталось выделить те из найденных корней, которые лежат в отрезке $[0; 3]$, и найти из них наибольший. Поскольку $\pi < 3\frac{1}{3}$, то в этот отрезок входят значения

$$\left\{\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{\pi}{10}, \tfrac{3\pi}{10}, \tfrac{7\pi}{10}, \tfrac{9\pi}{10}\right\},$$

из которых наибольшим является $\frac{9\pi}{10}$.

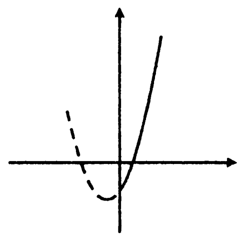
в) Так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}$, то из данного уравнения получим, что $\sin 3x = 0$ или $\cos x \cos 2x = \cos 3x$. Так что $x = \frac{\pi k}{3}$ или же $\cos x + \cos 3x = 2\cos 3x$, откуда $\cos x - \cos 3x = 0$, или $\sin 2x \sin x = 0$. Таким образом, $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Осталось учесть, что, в силу определения тангенса, $\cos x \cos 2x \cos 3x \neq 0$. Из найденных значений следует исключить $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда и получаем ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k; \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Найдите все значения a, при которых уравнение:
а) $\cos 2x + \cos x = a$ имеет решения в отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
б) $a\cos x + \cos 2x = 2$ имеет решения;
в) $\sin x\,(3\sin x + a\cos x) = -1$ не имеет решений.

Решения двух первых задач основаны на исследовании множеств значений функций. Положим $t = \cos x$.

а) По условию, $t \in [0; 1]$, а уравнение имеет вид $2t^2 + t - 1 = a$. На рисунке изображена часть параболы $y = 2t^2 + t - 1$ при $t \in [0; 1]$, из которого и следует, что данное уравнение имеет решения только при $a \in [-1; 2]$.

6 Зак. 1116



Конечно, можно было не рисовать график, а рассуждать следующим образом. Так как функция $f(t) = 2t^2+t-1$ возрастает на $[0;1]$, то множеством ее значений на этом отрезке является отрезок $[f(0); f(1)] = [-1;2]$, в котором и должно находиться значение параметра a.

Безусловно, в этой задаче разумнее было бы не делать замену, а рассуждать следующим образом. Если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $2x \in [0;\pi]$, значит, функция $y = \cos x + \cos 2x$ убывает на данном отрезке, поскольку она является суммой двух функций, убывающих на этом отрезке. Следовательно, в силу теоремы о промежуточном значении для непрерывных функций, множеством ее значений является отрезок с концами в точках $\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi = -1$ и $2\cos 0 = 2$.

б) В результате замены получим уравнение $2t^2 + at - 3 = 0$, которое удобно записать в виде $a = \frac{3-2t^2}{t}$, или $\frac{3}{t} - 2t = a$. Осталось найти множество значений функции $f(t) = \frac{3}{t} - 2t$ при $t \in [-1;0) \cup (0;1]$. Данная функция является суммой функций, убывающих на каждом из рассматриваемых промежутков, причем $f(t) \to -\infty$, если $t \to 0$ и $t \in [-1;0)$. Таким образом, луч $(-\infty; f(-1)] = (-\infty;-1]$ является множеством ее значений на $[-1;0)$. Поскольку f нечетна, то множество ее значений – это объединение $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

в) Сделаем стандартные преобразования:

$$\sin x(3\sin x + a\cos x) = \tfrac{3}{2}(1-\cos 2x) + \tfrac{a}{2}\sin 2x,$$

следовательно, мы получим уравнение $3\cos 2x - a\sin 2x = 5$, которое не имеет решений при $\sqrt{a^2+9} < 5$, откуда следует, что $a \in (-4;4)$.

Задача 5. Решите уравнения:
а) $\sin 6x - 1 = (|\sin x| - \cos 3x)^2$;
б) $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа a);
в) $\cos 3x \cos 5x = 1$.

а) Так как левая часть данного уравнения неположительна, а правая неотрицательна, то обе они должны быть равны нулю, таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 6x = 1, \\ |\sin x| = \cos 3x. \end{cases}$$

Осталось из решений первого уравнения выбрать те, которые также являются решениями и второго уравнения, т. е. из чисел $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, взять те, для которых $|\sin x| = \cos 3x$. Поскольку $3x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, а $\cos 3x \geq 0$, то k должно быть четным, таким образом, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$. Далее, так как $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, что будет иметь место лишь если $k = 3n + 2$, откуда и следует ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как левая часть уравнения может принимать лишь значения $a \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, то возможно провести прямой перебор.

Случай 1. Пусть $a = 2$. Тогда $\sin 2x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Имеем $3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$, так что $[2\cos 3x] < 2$ и этот случай невозможен.

Случай 2. Пусть $a = 1$. Тогда $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$. В первом случае $3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$. Из значений $\cos 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ нам подходит только $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($[\sqrt{2}] = 1$), поэтому число k должно быть четным. Во втором случае, наоборот, n — нечетно. Поэтому $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ или $x = \pi + \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$.

Случай 3. Пусть $a = 0$. Тогда $x = \frac{\pi k}{2}$, $\cos 3x \in \{0, \pm 1\}$. Таким образом, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Случай 4. Пусть $a = -1$. Тогда $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n$. В этом случае $[2\cos 3x] = -2; 1$, так что решений нет.

Случай 5. Наконец, пусть $a = -2$. Тогда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, а число k должно быть четно. Таким образом, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

в) Произведение двух чисел, модуль каждого из которых не больше единицы, может быть равно единице только если оба они равны 1 или же оба равны -1, так что искомые значения совпадают с объединением решений систем

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \cos 5x = -1. \end{cases}$$

Решениями первого уравнения первой системы являются числа $x = \frac{2\pi k}{3}$, которые будут решениями второго уравнения этой системы, если $\frac{10\pi k}{3} = 2\pi n$, что имеет место только если k делится на 3, так что $x = 2\pi k$. Когда мы решаем вторую систему, мы приходим к равенству $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi l}{5}$, откуда $5(2k+1) = 3(2l+1)$, следовательно, число $2k+1$ должно делиться на 3, что имеет место, если $k = 3n+1$. В таком случае $5(6n+3) = 3(2l+1)$, откуда $l = 5n+2$. Значит, $x = \pi + 2\pi n$. Окончательный ответ: $x = 2\pi n; \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Кому-то может показаться, что мы зря проводили такое рассуждение, поскольку ответ "и так очевиден". Однако смысл решения состоял в том, чтобы *убедиться* в том, что уравнение не имеет других решений, кроме как очевидных. Однако в некоторых случаях подобные уравнения могут иметь и неочевидные решения.

Иногда очень простая задача может поставить в тупик своим неожиданным видом.

Задача 6. Решите уравнение $\sin(x+1) + \cos(x+1) = \cos x$.

По-существу, перед нами уравнение вида $a\cos x + b\sin x = 0$, которое сводится к уравнению $\operatorname{tg} x = -\frac{a}{b}$, просто оно слегка странно записано. Действительно,

$$\sin x \cos 1 + \cos x \sin 1 + \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1 = \cos x,$$

или

$$(\cos 1 - \sin 1)\sin x = (1 - \sin 1 - \cos 1)\cos x.$$

Поскольку $\sin 1 \neq \cos 1$, то

$$\operatorname{tg} x = \tfrac{1-\sin 1-\cos 1}{\cos 1-\sin 1}, \text{ так что } x = \operatorname{arctg} \tfrac{1-\sin 1-\cos 1}{\cos 1-\sin 1} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Для решения следующей задачи требуется проявить искусство "видеть на ход вперед", т. е. уметь предвидеть успешность проводимого вами преобразования.

Задача 7. Решите уравнение $(1+\sin x)\cos x = \cos 2x \cos 3x$.

Умножив обе части на два и воспользовавшись формулой для произведения косинусов, получим уравнение

$$2\cos x + 2\sin x \cos x = \cos 5x + \cos x,$$

или $\sin 2x = \cos 5x - \cos x$. Смысл произведенного преобразования состоит в том, что после приведения подобных членов в правой части оказалась разность косинусов, которую представим в виде призведения синусов, причем одним из них будет как раз $\sin 2x$ – выражение, стоящее в левой части уравнения. Итак, $\sin 2x = -2\sin 2x \sin 3x$, откуда $\sin 2x = 0$ или $\sin 3x = -\frac{1}{2}$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Достаточно часто можно, к сожалению, видеть в ответах, к примеру, что $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. при задании двух серий решений почему-то ученик использует различные буквы. К сожалению, даже в некоторых учебных пособиях можно видеть такие ответы. Но подумайте, есть ли разница в том, чтобы написать, что $x = 2k$, где k – целое, или что $x = 2h$, где h – целое? В обоих случаях речь идет об одном и том же множестве $\{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ и не все ли равно, какая буква была при этом использована. Нет ошибки в том, чтобы использовать, как это было сделано в начале данного абзаца, разные буквы там, где можно было использовать одну. Однако дело в том, что непонимание порой приводит к тому, что ученик использует одну и ту же букву там, где необходимо было использовать разные!

Задача 8. Решите системы

а) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x \cos y \cos z = \frac{1}{12}, \\ \sin x \sin y = \frac{2}{3}, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$

а) Ответ:
$(x, y) = (2\pi k, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n)$; $(\pi + 2\pi k, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n)$;
$(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$; $(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

В чем разница между ответом $(x, y) = (2\pi k, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n)$, где $k, n \in \mathbb{Z}$, и "ответом" $(x, y) = (2\pi k, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$? А разница очень проста и очень велика. К примеру, если значения x и y независимо друг от друга могут быть равны 1 и 2, то надо записать, что $(x, y) = (k, l)$, $k, l \in \{1, 2\}$, и будет ошибкой написать, что $(x, y) = (k, k)$, $k = 1, 2$, поскольку вторая запись означает, что решений всего два, тогда как их в действительности четыре.

Между тем решить данную систему очень просто. Из первого уравнения следует, что $\sin x = 0$ или $\cos y = 0$, при этом если $\sin x = 0$, то варианты $x = 2\pi k$ и $x = \pi + 2\pi k$ надо рассматривать отдельно, так как в первом из них $\cos x = 1$, значит, из второго уравнения следует, что $\sin y = \frac{1}{2}$, а во втором мы получим, что $\sin y = -\frac{1}{2}$. Аналогично, если $\cos y = 0$, то следует по отдельности положить $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

б) Данная система существенно сложнее предыдущей. Имеем, $\cos z = -\cos(x + y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y = \frac{2}{3} - \cos x \cos y$. Положив $t = \cos x \cos y$, подставив выражение для $\cos z$ в первое уравнение, получим, что $t(\frac{2}{3} - t) = \frac{1}{12}$, откуда $t = \frac{1}{2}; \frac{1}{6}$. Итак,

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin x \sin y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{6}, \\ \sin x \sin y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Если сложить уравнения первой системы, то мы получим, что $\cos(x - y) = \frac{7}{6}$, а это невозможно. Складывая и вычитая уравнения второй системы, получим, что

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{5}{6}, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $x + y = \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k$, $x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$, причем следует рассмотреть все четыре возможных комбинаций знаков "+" и "−". Рассмотрим одну комбинацию знаков.

Если $x + y = \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k$ и $x - y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi(k+n) \\ \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi(k-n) \\ \pi - \arccos\frac{5}{6} - 2\pi k \end{pmatrix}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

> Внимание: нельзя заменять $k + n$ на l и $k - n$ на m и написать, что $l, m \in \mathbb{Z}$, так же, как нельзя заменить букву k в выражении для z на какую-то другую!

Теперь рассмотрим две задачи с радикалами.

Задача 9. Решите уравнение $4\sin x + \sqrt{6 - 6\operatorname{tg}^2 x} = 0$.

Нетрудно получить, что $4\sin x|\cos x| = \sqrt{6\cos 2x}$, однако далее придется разбирать разные случаи в зависимости от знака косинуса. Как известно, "лучшее – враг хорошего", так что если данное вам тригонометрическое уравнение можно самой простой заменой свести к такому алгебраическому уравнению, которое нетрудно решить, то лучше так и поступить. В данном случае замена $t = \sin x$ в исходном уравнении приведет к уравнению $\sqrt{\frac{6(1-2t^2)}{1-t^2}} = -4t$. Ясно, что после возведения в квадрат мы получим биквадратное уравнение, в котором сделаем замену $u = t^2$, учтя, что $-1 \le t \le 0$. Имеем, $8u^2 - 14u + 3 = 0$, откуда $u = \frac{3}{2}; \frac{1}{4}$. Следовательно, $t = \sin x = -\frac{1}{2}$, откуда получаем ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{\sin x + \cos x - a} = \sqrt{\sin 2x - \frac{1}{2}}$.

Ответ: при $a \in \left[-\frac{1}{2} - \sqrt{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

Тому, кто осознал содержание разделов 2 и 3, не представит никакой сложности решить данную задачу. Действительно, после стандартной замены $t = \cos x + \sin x$ и возведения в квадрат, получим систему

$$\begin{cases} t - a = t^2 - \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} \leq t^2 \leq 2, \end{cases}$$

которая имеет решение, если a попадает в множество значений функции $f(t) = \frac{3}{2} + t - t^2$ на объединении $\left[-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$. Для того чтобы не запутаться при поиске множества значений, полезно использовать соображения, основанные на монотонности квадратичной функции. Функция f возрастает на $\left[-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$, значит, отрезок $\left[-\frac{1}{2} - \sqrt{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ является множеством ее значений на $\left[-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$. На отрезке $\left[\sqrt{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ эта функция убывает, значит, множеством ее значений будет отрезок $\left[-\frac{1}{2} + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$. Осталось заметить, что найденные отрезки, очевидно, не пересекаются.

Неожиданно простая задача.

Задача 11. Решите уравнение $\cos^{20} x + \sin^5 x = 1$.

Ясно, что $\cos^{20} x \leq \cos^2 x$ и $\sin^5 x \leq \sin^2 x$, поэтому если x является решением данного уравнения, то

$$1 = \cos^{20} x + \sin^5 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

значит, $\cos^{20} x = \cos^2 x$ и одновременно $\sin^5 x = \sin^2 x$, что имеет место только при $x = \pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Дорогие учителя, решая тригонометрические уравнения, ваши ребята привыкают писать ответ вида $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, но всегда ли они понимают, что означают подобные формулы? Как уже было сказано, для проверки полезно предлагать "задачи с ограничениями".

Задача 12. Решите неравенства:

$$\text{а) } (x-1)\sin x \geq 0; \quad \text{б) } \sin(x^2 + 2x) \geq 0.$$

а) Ясно, что данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 1, \\ \sin x \leq 0. \end{cases}$$

Решениями первой из выписанных систем является та часть объединения отрезков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, которая содержится в луче $[1; +\infty)$. Так как $1 < \pi$, то искомое пересечение состоит из объединения отрезка $[1; \pi]$ и отрезков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ (т. е. $k \in \mathbb{N}$). Решением второй системы неравенств является объединение отрезков $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, где $k = 0, -1, -2, \ldots$ Ответ: $[1; \pi]$; $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$; $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, где $k = 0, -1, -2, \ldots$

б) Искомым ответом является объединение множеств решений систем квадратных неравенств $2\pi k \leq x^2 + 2x \leq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Выясним прежде всего, при каких целых k имеет решение неравенство $x^2 + 2x \leq \pi + 2\pi k$, или $x^2 + 2x - (2k+1)\pi \leq 0$. Ясно, что надо написать условие неотрицательности дискриминанта: $1 + (2k+1)\pi \geq 0$, которое имеет место при $k = 0, 1, 2 \ldots$ Ответом является объединение

$$\left[-1 - \sqrt{1 + (2k+1)\pi}; -1 - \sqrt{1 + 2k\pi}\right];$$
$$\left[-1 + \sqrt{1 + 2k\pi}; -1 + \sqrt{1 + (2k+1)\pi}\right],$$

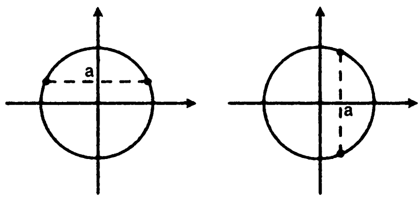
где $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Не стоит давать слишком много задач, подобных только что разобранной. Ее смысл состоит лишь в том, чтобы проверить, понимают ли школьники то, что они пишут. Уже по одной задаче можно увидеть: поняли или нет. Если не поняли – предложите еще одну, но не перебарщивайте; в этих задачах нет изящества, они некрасивы.

Решение стандартных тригонометрических неравенств проще всего осознать, используя определение тригонометрических функций, изображая дуги единичной окружности. Точки, соответствующие решениям неравенства $\sin t \geq a$, являются решениями системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geq a, \end{cases}$$

которая задает дугу единичной окружности, лежащую выше прямой $y = a$ или на ней (левый рисунок). Значения переменной t, при которых точка попадает на указанную дугу, лежат на отрезках $[\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.



Обратите внимание, что решение неравенства $\sin t \le a$ будет иметь другой вид, именно

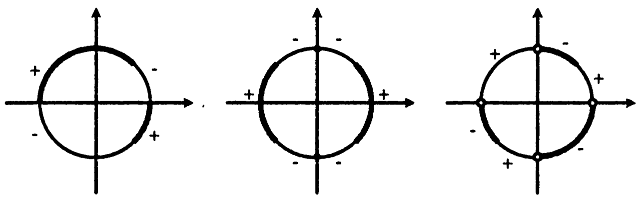
$$t \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Правый рисунко используется для иллюстрации решений неравенств $\cos t \ge a$ и $\cos t \le a$, которыми являются объединения отрезков $[-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, и соответственно, $[\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

При решении неравенств следующей задачи будет удобно использовать аналог известного “метода интервалов”, с той только разницей, что нам будет удобно изображать точки не на прямой, а на единичной окружности.

Задача 13. Решите неравенства: а) $\sin x \ge \sin 2x$; б) $\cos x \cos 3x \ge 0$; в) $\cos x + \frac{1}{\cos x} \ge \sin x + \frac{1}{\sin x}$.

а) Перепишем неравенство в виде $\sin x(1 - 2\cos x) \ge 0$ и нанесем на единичную окружность точки, соответствующие корням уравнения $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$, т. е. две точки, в которых $\sin x = 0$, и две, в которых $\cos x = \frac{1}{2}$ (рисунок *а*). На дуге $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ имеем $\sin x \ge 0$ и $1 - 2\cos x \le 0$, следовательно, правая часть неравенства неположительна, в знак чего поставим рядом с этой дугой знак “$-$”. Далее, на следующей в положительном направлении дуге $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, первый сомножитель $\sin x$ сохраняет прежний знак, между тем как второй меняет знак на противоположный, следовательно, на этой дуге левая часть данного неравенства неотрицательна; ставим рядом с ней знак "+". Нетрудно видеть, что в рассматриваемом примере имеет место чередование знаков левой части неравенства при переходе через каждый из ее корней. Выбирая те дуги, рядом с которыми стоит "+", получаем ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



а *б* *в*

б) Рассуждения аналогичны: сначала отмечаем на окружности точки, соответствующие корням $\cos x \cos 3x = 0$, таким образом, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, (рисунок *б*), затем начинаем определять знаки левой части неравенства на каждой из дуг.

Однако следует обратить внимание, при переходе через верхнюю точку окружности (равно, как и через нижнюю) меняется знак обоих сомножителей, поэтому ответ в задаче имеет вид: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Конечно, в данном случае можно было воспользоваться формулой косинуса тройного угла, преобразовав неравенство к виду $\cos^2 x\,(4\cos^2 x - 3) \geq 0$, откуда $\cos x = 0$ или же $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Вначале сделаем преобразования:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} - \sin x - \frac{1}{\sin x} = (\cos x - \sin x) - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x} =$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x}(\cos x \sin x - 1) = \frac{\cos x - \sin x}{2\cos x \sin x}(\sin 2x - 2) \leq 0.$$

Так как $\sin 2x \leq 1$, то полученное неравенство равносильно

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x} \leq 0,$$

которое можно решать тем же методом, что и предыдущие неравенства. При этом так же, как и в методе интервалов, следует учитывать те точки, в которых равен нулю знаменатель, выкалывая их, так сказать, из единичной окружности (рисунок *в*). Ответом является объединение следующих промежутков: $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; $\left(\pi+2\pi k; \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$; $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 14. Решите уравнение $\sqrt{a+2\cos 2x} = a\cos x$.

Как это часто бывает в задачах с параметрами, особенно в тригонометрических, ответ по структуре не прост:

$$\begin{array}{ll} x = \pm\arccos(-\frac{1}{\sqrt{a+2}}) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, & \text{при } a \in [-1; 0); \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}, & \text{при } a = 0; \\ x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{a+2}} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, & \text{при } a \in (0; 2) \cup (2; +\infty); \\ x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}, & \text{при } a = 2. \end{array}$$

При $a = 2$ получаем уравнение $2|\cos x| = 2\cos x$, т. е. $\cos x \geq 0$. При $a = 0$ имеем $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Вообще, только при $a = 2$ получаем, что $\cos x = 0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $a\cos x > 0$. После замены $t = \cos x$ получим уравнение $\sqrt{a+2(2t^2-1)} = at$, откуда $a-2 = (a^2-4)t^2$. Случай $a = 2$ уже исследован, так что $t^2 = \frac{1}{a+2}$. Решив неравенства $0 < \frac{1}{a+2} \leq 1$, получим, что $a \geq -1$. Таким образом, $t = -\frac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a \in [-1; 0)$ и $t = \frac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a > 0$.

Последняя из обсуждаемых задач посвящена стандартным для вступительных экзаменов в некоторые вузы задачам.

Задача 15. Решите уравнения:

а) $3\cos^2 x - 5\cos x = 0$; в ответ записать (в градусах) решение, удовлетворяющее условию $0° < x < 180°$;

б) $\sin(2x - 15°) = \cos(15° - 3x)$; в ответ записать сумму решений, удовлетворяющих условию $0° \leq x \leq 100°$;

в) $\dfrac{1}{1+\sin^2 x} + \dfrac{1}{1+\cos^2 x} = \dfrac{48}{35}$;

г) $2\sin 2x - \cos 2x = \dfrac{\operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg} x + 1}$;

д) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2$.

а) Решив квадратное уравнение, получим, что $\cos x = \frac{5}{3}; 0$, откуда $\cos x = 0$, единственным решением которого, лежащим в интервале $(0°; 180°)$, является $x = 90°$.

б) Прежде всего воспользуемся формулой приведения:

$$\sin(2x - 15°) = \cos(90° - (2x - 15°)) = \cos(105° - 2x)$$

и запишем уравнение в виде $\cos(105° - 2x) = \cos(15° - 3x)$. Таким образом, получаем, что $105° - 2x = 15° - 3x + 360°k$ или же $105° - 2x = -15° + 3x + 360°k$, откуда $x = -90° + 360°k$ или $5x = 120° + 360°k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ни одно из решений первой серии не входит в указанный отрезок, а точки второй серии $x = 24° + 72°k$ лежат в $[0; 100°]$ при $k = 0, 1$. Ответ: $120°$.

в) Конечно, можно сделать замену $t = \sin^2 x$, однако проще сложить стоящие в левой части дроби, получив в результате уравнение

$$\frac{3}{1 + \frac{1}{4}\sin^2 2x} = \frac{48}{35}, \quad \text{или} \quad 4\sin^2 2x = 3,$$

откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

г) После естественной замены $t = \operatorname{tg} x$ получим уравнение

$$\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{t+3}{t-1}, \quad \text{или} \quad t^2 + t - 2 = 0,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

д) Поскольку $2 = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$, то это уравнение можно преобразовать к однородному относительно $\cos x$ и $\sin x$, именно $\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$, откуда $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$, так что $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k; \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Справочник

Уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$ имеют решения только при $|a| \le 1$.

Уравнение	Решения
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = a$	$x = \arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Решите:

а) уравнение $\cos 4x + \frac{3}{2} = 4\sin^2 x$;

б) неравенство $\cos x \ge \cos 2x$.

8.2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{\frac{\pi}{6} - \sin x} = \sqrt{\frac{\pi}{6} + \cos x}$;

б) $\sqrt{3\sin x - 4\cos x} = \sqrt{5\sin x + 8\cos x}$;

в) $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x$.

8.3. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x + \sin x + \sqrt{\sin x} = 1 - \cos x$;

б) $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin x$.

8.4. Решите уравнения:

а) $\sin 2x = \sqrt{\cos 3x - \cos^3 x}$;

б) $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin 3x}{4\cos x - 2}}$;

в) $\cos 3x + \sqrt{3}\sin x = |\cos x|$.

8.5. Найдите все $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, для которых

$$\sin^2 k + \cos^2 2k + \sin^2 3k \ge 1.$$

8.6. Решите уравнения:

а) $4\cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x$;

б) $\sin x + \cos x = \sin 5x - \cos 3x$.

8.7. Решите неравенство: $\cos^2 x - \frac{2}{\cos x} \leq 2 - \cos x$.

8.8. Решите системы:

а) $\begin{cases} \sin(x+y) = \cos x + \cos y, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1. \end{cases}$

8.9. Решите уравнение $(\sin x - \cos 6x)^2 + (\cos x + 6\sin 6x)^2 = 0$.

8.10. Решите уравнение $\cos 2x = a(\cos x - \sin x)$ при $x \in [0;\pi]$.

8.11. Найдите углы α, β, γ треугольника, если известно, что

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = \frac{3}{2}, \\ \cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma = 1. \end{cases}$$

8.12. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{6} - 2x\right| = \operatorname{tg} 3x$.

8.13. Найдите наименьшее возможное положительное решение уравнения $\cos x + \sin x = \sin ax$.

8.14. Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sin(\pi x^2) = \sin(\pi x).$$

8.15. Решите уравнение $\sin\frac{1992\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos x}$.

Комментарии и советы

8.1. И данное уравнение, и данное неравенство сводятся к квадратным.

8.2. Главное в задаче – это из корней уравнений, полученных в результате возведения в квадрат, отобрать те, которые являются корнями исходных уравнений.

8.3. В обеих задачах надо произвести разложение на множители. Возможно, что будет проще найти нужные преобразования, если вначале сделать замены: а) $u = \sqrt{\sin x}$, $v = \cos x$; б) $u = \sin x$, $v = \cos x$.

8.4. Во всех уравнениях используется формула тройного угла, в первых двух необходимо внимательно использовать условие неотрицательности его левой части.

8.5. Замените "букву k" "буквой x" и решите полученное неравенство. Будьте внимательны при применении "метода интервалов на окружности".

8.6. В обоих уравнениях полезно применить преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот.

8.7. Сведите неравенство к алгебраическому, при этом целесообразно сразу учесть, что $|\cos x| \leq 1$.

8.8. а) Второе уравнение является линейным, а потому система сводится к одному уравнению, при решении которого нецелесообразно использовать формулу синуса (косинуса) суммы. б) Сложите данные уравнения.

8.9. Ясно, что данное уравнение равносильно системе из двух уравнений с одним неизвестным, из которой будет следовать, что $\cos x = 0$. Все ли решения этого уравнения будут решениями системы?

8.10. Изобразите часть графика $y = \cos x + \sin x$ при $[0; \pi]$.

8.11. Получите систему $u + v = \frac{3}{2}$, $uv = \frac{1}{2}$.

8.12. Задача выглядит стандартной, но в ней не очень просто получить правильный ответ. Подсказка: при $x \geq \frac{\pi}{12}$ уравнение решений не имеет.

8.13. Собственно говоря, это задача на исследование множества значений функции (см. задачу 8.10).

8.14. Собственно говоря, это задача на свойства рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами. Надо доказать, что если число x рационально, а $x^2 + x$ – целое, то само число x является целым.

8.15. Собственно говоря, задача состоит в том, чтобы найти все целые числа k и l, для которых справедливо одно из равенств $1992 = l(4k+1)$ и $2 \cdot 1992 = (2l+1)(4k+1)$; кстати, очевидно, что второе решений не имеет.

Ответы и комментарии

8.1. а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. б) $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.2. а) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. б) $x = \pi - \operatorname{arctg} 6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.3. а) $x = 2\pi k; \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
б) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.4. а) $x = \frac{\pi k}{2}; -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
б) $x = \pi + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 4\pi k; \frac{\pi}{4} + 4\pi k; \frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
в) $x = 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.5. Решением неравенства является объединение отрезков $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$; $\left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, но $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{4} < 1 < \frac{4\pi}{3}$. Ответ: $k = 2, 3, 5, 6$.

8.6. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Если ваш ответ по форме не совпал с приведенным, то вы сразу не огорчайтесь, вполне возможно, что они в действительности совпадают.
б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{8} + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \arcsin\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.7. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \{\pi + 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.8. а) $\left(\frac{5\pi}{6}+\pi k, \frac{\pi}{6}+\pi k\right); \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right); \left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, 2\pi n\right); \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

8.9. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.10. $x = \frac{\pi}{4}$ при любом значении a; кроме того, $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}}$ при $1 \le a < \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{a}{\sqrt{2}}$ при $-1 \le a < 1$.

8.11. $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{1}{2}, \arccos \frac{1}{2}\right); \left(\arcsin \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, \arccos \frac{1}{2}\right)$.

8.12. $x = \frac{\pi}{5}\left(k + \frac{1}{6}\right)$, где $k \le 0$, причем $k \ne -1, -6 - 11, \ldots$

8.13. $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos x + \sin x > 1$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

8.14. Все целые числа.

8.15. $x = 16\pi; 3984\pi; -48\pi; -1328\pi$.

9. Производная и ее приложения

Наибольшее и наименьшее значения, множество значений. Исследованис функций на монотонность и построение графиков. Касательные к графикам. Доказательство тождеств и неравенств. Число решений уравнения. Выпуклые функции. Производная и кратные корни многочленов. Приближенное решение уравнений.

Обсуждение. В предыдущих разделах книги мы уже неоднократно использовали производную для исследования функций и построения их графиков, в данном разделе мы будем делать это более систематично и разнообразно. Во всех примерах будут использованы только первая и, иногда, вторая производная данной функции в связи с тем, что именно они, так сказать, "видны невооруженным взглядом". Когда мы смотрим на график некоторой функции, мы сразу выделяем участки, на которых функция монотонна, – им соответствуют промежутки постоянства знака первой производной. Кроме того, мы видим, "в какую сторону выпукл" данный график – вверх или вниз, что указывает на знак второй производной этой функции. Характерным примером является график кубического многочлена $y = x^3 - 3x$, на котором имеются все четыре возможные комбинации знаков первых двух производных. Знаки третьей (и последующих) производных так просто определить визуальным образом не удается.

Важность понятия производной состоит уже в том, что при ее использовании искусство исследования функции становится ремеслом. Можно уже в 8 классе найти наибольшее значение функции $y = x^2(3 - x)$ при помощи частного случая неравенства Коши, однако при этом приходится делать своего рода искусственные преобразования: $x^2(3-x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (3-x)$, увидеть которое обычному восьмикласснику не под силу. С другой стороны, самый обычный одиннадцатиклассник в состоянии вычислить производную y', найти ее корни и, в результате, наибольшее значение этой функции.

Наше систематическое изучение мы начнем с решения двух стандартных задач.

Задача 1. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = x(x-2)^2$ при $x \in [-2; 2]$;

б) $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ при $x \in [-2; 2]$;

в) $f(x) = \cos^8 x + \sin^8 x$ при $x \in \mathbb{R}$;

г) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ при $x \in (-1; +\infty)$.

а) Имеем, $f'(x) = (x-2)^2+2x(x-2) = (x-2)(3x-2) = 0$ при $x = 2; \frac{2}{3}$. Наибольшее и наименьшее значение данной функции на отрезке $[-2; 2]$ надо искать среди ее значений, содержащихся в таблице

x	-2	$\frac{2}{3}$	2
y	-32	$\frac{32}{27}$	0

Значит, наименьшим значением является $f(-2) = -32$, а наибольшим является $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$. Поскольку данная функция непрерывна, то множеством ее значений на данном отрезке является отрезок между ее наименьшим и наибольшим значениями; таким образом, ответ: $\left[-32; \frac{32}{27}\right]$.

б) Имеем, $f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, значит, $f'(x) = 0$ только при $x = -1$. Составим таблицу значений

x	-2	-1	2
y	$3\sqrt[3]{4} - 4$	1	$3\sqrt[3]{4} + 4$

Ясно, что $3\sqrt[3]{4} - 4 < 1 < 3\sqrt[3]{4} + 4$. С другой стороны, так как $27 > 16$, то $\sqrt[3]{4} > \frac{4}{3}$. Значит, $3\sqrt[3]{4}-4 > 0$, однако среди значений функции есть нулевое, $f(0) = 0$!

Дело в том, что автор намеренно совершил ошибку, заключающуюся в том, что при поиске наибольшего и наименьшего значений функции он проигнорировал ее значения в точках, в которых производная не существует, а их необходимо учитывать, что и показывает рассматриваемый пример!

Кстати, подобной ошибки можно было бы избежать, если вдобавок исследовать функцию на монотонность. Так как $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}}$, то $f'(x) > 0$ при $x < -1$ и $x > 0$, значит, эта функция возрастает на отрезках $[-2; -1]$ и $[0; 2]$, а убывает на $[-1; 0]$. Таким образом, ее значение при $x = 0$ стоит принимать в расчет. Итак, ответ: $[0; 3\sqrt[3]{4} + 4]$.

в) Не будем производить никаких тригонометрических преобразований, а тупо продифференцируем:

$$f'(x) = -8\cos^7 x \sin x + 8\sin^7 x \cos x = 8\cos x \sin x(\sin^6 x - \cos^6 x).$$

Значит, $f'(x) = 0$ при $x = \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Достаточно вычислить значения при $x = 0; \frac{\pi}{4}$ (почему?). Имеем, $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$; ответ: $[\frac{1}{8}; 1]$.

г) Имеем,

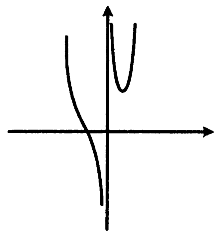
$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2x + 2 - x - 2}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}},$$

таким образом, $f(0) = 1$ – наименьшее значение. Поскольку $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (а также при $x \to -1$, $x > -1$), то функция не ограничена сверху. Ответ: $[1; +\infty)$.

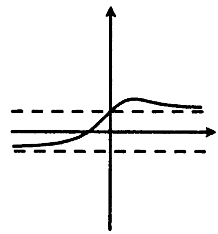
Конечно, при решении задач пунктов б) и г) было бы уместно сделать замены $t = \sqrt[3]{x}$ и $t = \sqrt{x+1}$ с тем, чтобы исследовать далее более простые функции $g(t) = 2t^3 + 3t^2$ и, соответственно, $g(t) = \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}$.

Задача 2. Постройте графики функций: а) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$; г) $f(x) = x + \sin 2x$.

а) Так как $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, то $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$, значит, данная функция возрастает на луче $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$. Для построения ее графика полезно выяснить ее поведение при $x \to \infty$ и $x \to 0$. Нетрудно видеть, что $x \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$, $x \to +\infty$ при $x \to 0$, если $x > 0$, и $x \to -\infty$ при $x \to 0$, если $x < 0$. Осталось подсчитать $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$; график – на рисунке *а*.



а



б

б) Имеем,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

значит, данная функция возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1+\infty)$; $f(1) = \sqrt{2}$. При иссследовании поведения функции при $x \to \infty$ можно допустить ошибку, посчитав, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$. Однако этот результат войдет в противоречие с тем, что функция возрастает на $(-\infty; 1]$, тогда как $f(0) = 1$. В действительности, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$, а $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$, тем самым, каждая из прямых $y = \pm 1$ является асимптотой графика (рисунок *б*).

в) Имеем, $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$. Будем строить часть графика на отрезке $[0; 2\pi]$; интересующими нас точками (в которых производная обращается в ноль) являются значения $x = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$. Составим таблицу значений данной функции

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	1

Рассматриваемая функция монотонна на каждом из отрезков с концами в этих точках, а характер монотонности следует из величины найденных значений. С другой стороны, для контроля можно определить знаки производной (рисунок).

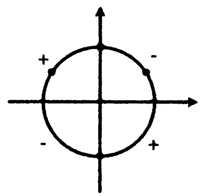
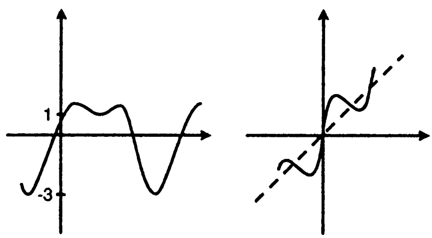


График изображен на рисунке *в*.



в *г*

г) Так как $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$, то $f'(x) = 0$ при $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. График данной функции пересекает прямую $y = x$ в точках с абсциссами $x = \frac{\pi k}{2}$ (рисунок *г*). Интересно проследить, не может ли ее значение, к примеру, в точке $x = \frac{\pi}{3}$ (в точке максимума) быть больше ее значения при $x = \pi$? Имеем, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \pi$, поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} < 2 < \frac{2\pi}{3}$.

Производную можно с успехом применять не только при поиске наибольшего (наименьшего) значения функции, но и при исследовании последовательностей. Если задана последовательность чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$, то имеет смысл ввести функцию так, чтобы $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Найдите наибольший член последовательности: а) $a_n = 9n + 1 - 2n^2$; б) $a_n = \frac{n+1}{n^2+19}$; в) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

а) Положим $f(x) = 9x + 1 - 2x^2$ и исследуем ее поведение при $x \geq 1$. Автор считает дурным тоном дифференцировать эту функцию, поскольку хорошо бы помнить свойства квадратичной функции и не находить ее производную. Итак, в нашем случае функция f возрастает на отрезке $\left[1; \frac{9}{4}\right]$ и убывает на луче $\left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$, следовательно, наибольшим членом последовательности является одно из чисел a_2 или a_3. Так как $a_2 = 11 > a_3 = 10$, то наибольшим является второй член $a_2 = 11$.

б) Пусть $f(x) = \frac{x+1}{x^2+19}$. Имеем,

$$f'(x) = \frac{x^2 + 19 - 2x(x+1)}{(x^2+19)^2} = \frac{19 - 2x - x^2}{(x^2+19)^2}.$$

Таким образом, $f(x) \geq 0$ при $x \in [1; \sqrt{20} - 1]$ и, поскольку, $3 < \sqrt{20} - 1 < 4$, то наибольший член – это a_3 или a_4. В нашем случае $a_3 = \frac{4}{28} = a_4 = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

в) Вначале полезно сделать преобразование $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ для того, чтобы далее исследовать функцию $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ вместо того, чтобы исследовать $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Имеем, $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, поэтому эта функция возрастает на $[1; e]$ и убывает на $[e; +\infty)$. Поскольку $2 < e < 3$, то наибольшим из значений данной функции является $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$. Из неравенства $2^3 < 3^2$ следует, что $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, значит, наибольшим членом последовательности является $a_3 = \sqrt[3]{3}$.

Вычисление производных бывает полезным при доказательстве тождеств. Если функция f задана и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a; b)$, то она постоянна на этом отрезке. Смысл следующей задачи состоит не столько в вычислении производных, сколько в выводе следствий из полученных равенств.

Задача 4. Вычислите производные функций:
а) $y = \arcsin x + \arccos x$; б) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
в) $y = \arcsin(\sin x)$; г) $y = 1 + x + \ldots + x^n$.

а) Имеем, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ при всех $x \in (-1;1)$, следовательно, сумма $\arcsin x + \arccos x$ постоянна на отрезке $[-1;1]$ и равна $\frac{\pi}{2}$, поскольку $\arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

б) В силу формулы производной "сложной" функции, имеем

$$\left(f\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' = f'\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right),$$

значит,

$$\left(\operatorname{arctg} \tfrac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2},$$

а так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, то $\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = 0$ всюду при $x \neq 0$.

| Однако мы не вправе утверждать, что данная сумма постоянна всюду при $x \neq 0$.

Действительно, если $x = -1$, то $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, а при $x = 1$ имеем $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{при } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

в) Прежде всего следует иметь в виду, что данная функция не дифференцируема в точках, в которых $\sin x = \pm 1$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу производной сложной функции, имеем,

$$(\arcsin(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} =$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \\ -1 & \text{при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right). \end{cases}$$

Следовательно, $\arcsin(\sin x) = x + b$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ и равен $b - x$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Покажите самостоятельно, что

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k & \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \\ \pi - x - 2\pi k & \text{при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right). \end{cases}$$

г) В силу формулы суммы геометрической прогресии, имеем, $1+x+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, откуда, дифференцируя обе части этого равенства, получим, что

$$1+2x+\ldots+nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \\ = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Для того чтобы доказать, что $f(x) \geq 0$ при всех x из некоторого промежутка, необходимо и достаточно показать, что наименьшее значение функции f на этом промежутке не меньше нуля. А для поиска наименьшего значения мы вполне можем применить методы дифференциального исчисления. Таким образом, производная вполне может быть использована при доказательстве неравенств, правда, пока только от одной переменной.

Задача 5. Докажите неравенства: а) $\ln(1+x) \leq x$ при всех $x > -1$; б) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$ при всех x; в) $x^\alpha \geq y^\alpha + \alpha y^{\alpha-1}(x-y)$, где $\alpha > 1$, x и $y > 0$.

а) Найдем производную функции $f(x) = x - \ln(x+1)$. Имеем, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, значит, $f'(x) < 0$ при $x \in (-1;0)$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$. Следовательно, эта функция строго убывает на промежутке $(-1;0]$ и строго возрастает на луче $[0;+\infty)$, поэтому она достигает своего наименьшего значения при $x = 0$. Таким образом, $f(x) = x - \ln(x+1) > f(0) = 0$ при всех $x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$, что и требовалось доказать.

б) Пусть $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$, тогда $f'(x) = \sin x - x$. Докажем теперь, что $\sin x < x$ при всех $x > 0$ и $\sin x > x$ при $x < 0$. Так функция $x - \sin x$ нечетна, то достаточно доказать только первое неравенство. Конечно, оно известно, поскольку используется при выводе одного из замечательных пределов, однако те, кто его забыл, могут продолжить рассуждать в прежнем духе. Имеем, $(x - \sin x)' = 1 - \cos x \geq 0$, значит, эта функция строго возрастает на всей оси. Поскольку при $x = 0$ она равна нулю, то, действительно, $x - \sin x > 0$ при всех $x > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$, значит, $f(x) \geq f(0) = 0$, что и требовалось получить.

в) В этом примере мы, по крайней мере на первый взгляд, имеем две переменные, однако данное неравенство является однородным. После замены $t = \frac{x}{y}$, мы получим неравенство $t^\alpha \geq 1 + \alpha(t-1)$, $t > 0$, которое будем доказывать уже привычным методом. Если $f(t) = t^\alpha - \alpha(t-1)$, то $f'(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - 1)$. Так как $\alpha > 1$, то $t^{\alpha-1} > 1$ при $t > 1$ и $t^{\alpha-1} < 1$ при $0 < t < 1$, значит, $t = 1$ является точкой минимума функции f, так что $f(t) \geq f(1) = 1$.

Какое неравенство будет верно, если предположить, что $0 < \alpha < 1$? Какой геометрический смысл имеют эти неравенства?

Задача 6. Какое наибольшее число корней может иметь уравнение $a^x = x^a$?

Во-первых, $a > 0$. Далее, в задаче следует рассмотреть два случая: $a \in \mathbb{N}$ и $a \notin \mathbb{N}$. Дело в том, что в первом случае областью определения уравнения является вся числовая прямая, тогда как во втором ею является луч $[0; +\infty)$. Предположим, что $a \in \mathbb{N}$. Если число a нечетно, то отрицательных решений уравнение на имеет, если четно, то имеет в точности одно такое решение. Теперь исследуем данное уравнение при призвольном значении a. Так как $x > 0$, то, после логарифмирования обеих частей, получим уравнение $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$. Как мы уже видели при решении задачи 2в, функция $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ строго возрастает на $(0; 1]$ и строго убывает на $[1; +\infty)$, значит, более двух положительных решений уравнение иметь не может. С другой стороны, уравнение $2^x = x^2$ имеет своими корнями на положительной части числовой оси числа $x = 2; 4$. Значит, максимально возможное число корней уравнения данного вида – три.

Теперь разберем несколько стандартных задач геометрического характера.

Задача 7. Найдите множество значений площадей:
а) прямоугольных треугольников, у которых сумма длин гипотенузы и одного из катетов равна m;
б) прямоугольников, две вершины которых лежат на оси абсцисс, а две другие – на графике $y = \sqrt{3-2x^2}$;
в) треугольников, ограниченных осями координат и касательными к графику $y = \sqrt{3-2x^2}$.

а) Длина гипотенузы треугольника с катетом x равна $m-x$, так что длина второго катета равна $\sqrt{m^2-2mx}$, а его площадь равна $\frac{1}{2}x\sqrt{m^2-2mx}$, при этом $x \in \left(0; \frac{m}{2}\right)$. Будет удобнее найти вначале множество значений квадратов площадей треугольников, рассмотрев функцию $f(x) = 4S^2 = x^2(m^2-2mx)$ при $x \in \left[0; \frac{m}{2}\right]$. Поскольку $f'(x) = 2m^2x - 6mx^2 = 2mx(m-3x)$, то эта функция возрастает на $\left[0, \frac{m}{3}\right]$ и убывает на $\left[\frac{m}{3}; \frac{m}{2}\right]$, достигая, тем самым, своего наибольшего значения $\frac{m^2}{27}$ при $x = \frac{m}{3}$. Таким образом, множеством значений площадей треугольников является промежуток $\left(0; \frac{m}{6\sqrt{3}}\right]$.

б) Данная задача вполне аналогична предыдущей. Прежде всего легко понять, что абсциссы вершин прямоугольников равны $\pm x$, где $x \in \left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, а их площадь $S(x)$ равна $2x\sqrt{3-2x^2}$. Для разнообразия и в качестве упражнения в дифференцировании найдем производную самой этой функции, хотя, повторю, удобнее было бы рассмотреть ее квадрат:

$$S'(x) = 2\sqrt{3-2x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{2(3-2x^2-2x^2)}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{2(3-4x^2)}{\sqrt{3-2x^2}},$$

откуда следует, что наибольшее значение этой функции достигается при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и равно $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Искомым множеством значений являстся промежуток $\left(0; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

в) Ясно, что можно брать только касательные к правой половине графика. Если $t \in \left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ – есть абсцисса точки касания, то уравнение касательной имеет вид

$$y = \sqrt{3-2t^2} - \frac{2t}{\sqrt{3-2t^2}}(x-t), \quad \text{или} \quad y = \frac{3-2tx}{\sqrt{3-2t^2}}.$$

Обозначим через $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$ точки пересечения касательной с осями координат. Из найденного уравнения находим значения $x_0 = \frac{3}{2t}$ и $y_0 = \frac{3}{\sqrt{3-2t^2}}$, следовательно, площадь треугольника, ограниченного осями и рассматриваемой касательной, равна

$$\frac{x_0 y_0}{2} = \frac{9}{4t\sqrt{3-2t^2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2t\sqrt{3-2t^2}}.$$

Из решения предыдущей задачи следует, что знаменатель второй дроби меняется от 0 до $\frac{3}{\sqrt{2}}$, значит, искомым множеством значений площадей треугольников является луч $\left[\frac{3}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Решим следующую задачу не совсем обычным способом.

Задача 8. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(b+x-a)(x+a-b)},$$

если $x, a, b > 0$.

Сможете ли вы догадаться об идее решения задачи по ее ответу: $\max f(x) = 2ab$? Напоминает ли вам этот ответ (и формула для самой функции) что-нибудь знакомое? Ответ очень прост: $f(x)$ – это учетверенная площадь треугольника, две стороны которого имеют длины a и b. Площадь такого треугольника является наибольшей, если эти стороны перпендикулярны друг другу. Для сравнения попробуйте решить эту задачу обычным способом...

Для решения следующих задач (за исключением задачи последнего пункта) производная не нужна, однако применяемый в данном разделе подход хорош тем, что думать придется меньше.

Может показаться, что смысл предыдущей фразы противоречит основной концепции автора – "Думать, думать и думать" – однако если у вас имеется калькулятор, то не имеет особого смысла умножать "в столбик" даже двузначные числа. Всегда должны быть задачи, в которых думать все равно придется, и вставлять их в учебный процесс – задача учителей.

Задача 9. Найдите все m, при которых при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения в указанной области:
а) $f(x) = \cos mx$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; б) $f(x) = 2x + m\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
в) $f(x) = x^2 - mx + m^2$, $x \in [1; +\infty)$;
г) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + (m^2+5)x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Поскольку каждая из указанных функций является непрерывной, то задачу можно переформулировать: найдите все m, при которых эта функция строго монотонна на данном множестве. В случае, если функция дифференцируема, это равносильно сохранению знака производной на этом множестве[2].

> Как вы думаете, к чему здесь нужна ссылка на непрерывность рассматриваемой функции?!

а) Ясно, что $m \neq 0$ и, в силу четности косинуса, мы можем считать, что $m > 0$. Имеем, $f'(x) = -m\sin mx$. Производная сохраняет знак на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, если $mx \in [0; \pi]$ при всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, что имеет место, если $\frac{m\pi}{4} \leq \pi$, т. е. при $m \leq 4$.
Ответ: $m \in [-4; 0) \cup (0; 4]$.

б) Производная $f'(x) = 2 + m\cos x$ сохраняет знак на $\mathbb{R}$, если $|m| \leq 2$.

в) Для того чтобы $f'(x) = 2x - m$ сохраняла знак на $[1; +\infty)$, надо, чтобы $f'(1) = 2 - m \leq 0$, т. е. чтобы $m \leq 2$.

г) Производная $f'(x) = x^2 - 3mx + m^2 + 5$ сохраняет знак на $\mathbb{R}$, если дискриминант полученного квадратного трехчлена неположителен. Имеем, $D = 9m^2 - 4(m^2+5) = 5m^2 - 20 \leq 0$ при $|m| \leq 2$.

Стандартным приемом решения уравнений с параметром является их сведение к виду $f(x) = a$, после чего остается только исследовать функцию f и построить ее график. В следующей задаче требуется как раз построить графики функций, появляющихся при исследовании несложных иррациональных

---

[2]Будем говорить, что некая функция сохраняет знак, если она всюду неотрицательна (неположительна) и обращается в ноль лишь в отдельных точках.

уравнений. При этом будет интересно проследить за тем, как изменение некоторых параметров уравнения влияет на вид соответствующего графика.

Задача 10. Постройте графики:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$.

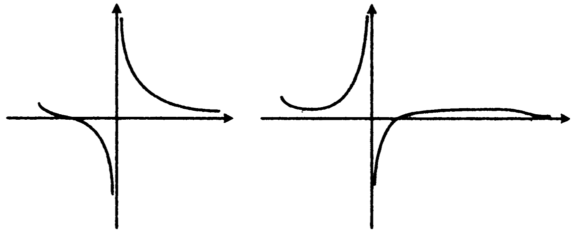
Областью определения всех данных функций является объединение $[-3;0) \cup (0;+\infty)$, причем $y \to \infty$ при $x \to 0$ и $y \to 0$ при $x \to +\infty$.

а) Исследуем поведение данной функции вблизи нуля более детально. Имеем, $y \to -\infty$ при $x \to 0$, $x < 0$ и $y \to +\infty$ при $x \to 0$, $x > 0$. Для исследования функции на монотонность найдем ее производную,

$$y' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{2\sqrt{x+3}} - \sqrt{x+3}+1\right) =$$

$$= \frac{x-2x-6+2\sqrt{x+3}}{2x^2\sqrt{x+3}} = \frac{2\sqrt{x+3}-x-6}{2x^2\sqrt{x+3}}.$$

Теперь найдем промежутки, на которых функция возрастает, для чего решим неравенство $2\sqrt{x+3} \geq x+6$. Так как обе части нетрицательны, то возведем их в квадрат, получив в результате неравенство $x^2+8x+24 \leq 0$, которое не имеет решений. Следовательно, данная функция убывает на каждом из промежутков $[-3;0)$ и $(0;+\infty)$. Для построения графика (см. рисунок *а*) осталось найти значение функции в точке $x=-3$ и ее корень: $x=-2$.



а *б*

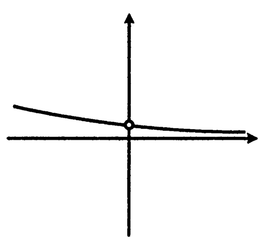
б) В данном случае $y \to +\infty$ при $x \to 0,\ x < 0$ и $y \to -\infty$ при $x \to 0,\ x > 0$. Находим производную:

$$y' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{2\sqrt{x+3}} - \sqrt{x+3} + 2\right) =$$
$$= \frac{x - 2x - 6 + 4\sqrt{x+3}}{2x^2\sqrt{x+3}} = \frac{4\sqrt{x+3} - x - 6}{2x^2\sqrt{x+3}}.$$

Преобразуя неравенство $4\sqrt{x+3} \geq x+6$, получим неравенство $x^2 - 4x - 12 \leq 0$, решением которого является отрезок $[-2; 6]$. Значит, функция возрастает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; 6]$ и убывает на отрезке $[-3; -2]$. Для удобства построения графика (рисунок *б*) можно составить таблицу значений данной функции

x	-3	-2	1	6
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

в) В данном случае $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$, но $x \neq 0$. Таким образом, функция убывает на всей области определения; график – на рисунке *в*.



в

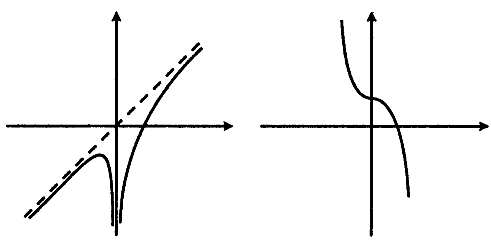
Построенные в этой задаче графики можно использовать для исследования следующих уравнений $\sqrt{x+3} = 1 + ax$, $\sqrt{x+3} = 2 + ax$ и $\sqrt{x+3} = \sqrt{3} + ax$ (см. задачу 10 *раздела 2*). Попробуйте поэкспериментировать в разных классах, что лучше, сначала строить графики и затем предложить решить уравнения или, наоборот, начать с уравнений. Конечно, при решении этих уравнений можно просто построить график $y = \sqrt{x+3}$ и затем следить за числом его точек пересечения с соответствующими прямыми. Однако не всегда легко понять, сколько же касательных к данному графику могут проходить через данную точку.

Задача 11. Найдите количество касательных к графику $y = x^3+1$, проходящих через точки, лежащие на: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

Запишем уравнение касательной к данному графику:

$$y = t^3 + 1 + 3t^2(x - t), \quad \text{или} \quad y = 3t^2x - 2t^3 + 1.$$

а) Положив $y = 0$, получим, что $x = \frac{2t^3-1}{3t^2} = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3t^2}$. График данной функции изображен на рисунке *а*; точка максимума имеет координаты $(-1, -1)$. Следовательно, через точки оси абсцисс с $x < -1$ можно провести три касательных к данному графику, через точку $(-1, 0)$ – две и только одну касательную через точку с абсциссой $x > -1$.



а *б*

Кстати, был ли вам очевиден полученный результат?

б) При $x = 0$ получаем, что $y = 1 - 2t^3$, значит, через каждую точку оси ординат можно провести ровно одну касательную к данному графику.

Задача 12. К графику $y = x^3 + 10x^2 + 13x + 19$ в точке с абсциссой $x = 5$ проведена касательная. Найдите все точки ее пересечения с данным графиком.

Пусть $y = kx + b$ – уравнение касательной. Наша задача состоит в том, чтобы найти все корни многочлена

$p(x) = x^3 + 10x^2 + (13 - k)x + 19 - b$. Конечно, можно найти в явном виде уравнение касательной, чтобы потом найти и корни этого многочлена, пользуясь тем, что один из них ($x = 5$) нам известен. Однако поступим по-другому. Нам известно, что $p(5) = p'(5) = 0$. Если $p(x_0) = 0$, то $p(x) = (x - x_0)q(x)$, где $q(x)$ – многочлен. Далее, $p'(x) = q(x) + (x - x_0)q'(x)$, значит, $q(x_0) = p'(x_0)$. Таким образом, мы доказали, что если $p(x_0) = p'(x_0) = 0$, то значение x_0 является корнем многочлена $p(x)$ кратности не менее двух. В нашей задаче корнями многочлена $p(x)$ будут число 5 (кратности как минимум два) и некоторое неизвестное число x_1. В силу первой из формул Виета для кубического многочлена, $5 + 5 + x_1 = -10$, значит, $x_1 = -20$.

Последние задачи этого раздела связаны с понятием выпуклости функции, которое для простоты будет введено для дифференцируемых функций. Назовем функцию выпуклой, если ее производная строго возрастает. Таким образом, если у этой функции существует и вторая производная, то она неотрицательна и не равна тождественно нулю ни на каком отрезке. Функция называется выпуклой верх (иногда говорят, вогнутой), если ее производная строго убывает. Ясно, что если функция f выпукла, то $-f$ является выпуклой вверх (и наоборот), поэтому все утверждения следующей задачи (с очевидными изменениями) могут быть сформулированы для функций, которые выпуклы вверх. Основные (и важные) примеры: функция e^x является выпуклой, а функция $\ln x$ – выпуклой вверх.

Задача 13. Дана выпуклая функция f. Докажите, что

1) ее график лежит над любой его касательной;

2) функция $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ – возрастающая;

3) $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ при $\alpha \in (0; 1)$;

4) уравнение $f(x) = kx + b$ имеет не более одного решения.

1) Фиксируем x_0; пусть $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Имеем, $g(x_0) = g'(x_0) = 0$. Далее, $g'(x) = f'(x) - f'(x_0) > 0$ при $x > x_0$ и $g'(x) < 0$ при $x < x_0$. Следовательно, значение $g(x_0) = 0$ является наименьшим, откуда и следует неравенство $f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ при всех $x \neq x_0$, которое и означает, что график функции лежит над его касательной.

2) Обратите внимание, что, хотя формула для $\varphi(x)$ не определяет значение этой функции при $x = a$, однако его легко доопределить так, чтобы функция была непрерывна, именно: $\varphi(a) = f'(a)$. Покажем, что производная $\varphi(x)$ неотрицательна при всех $x \neq a$. Имеем,

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2}.$$

Пусть $x > a$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$, где $c \in (a; x)$, значит, $f'(c) < f'(x)$, таким образом, справедливо неравенство $f(x) - f(a) < f'(x)(x - a)$. Случай $x < a$ рассмотрите самостоятельно.

3) Для определенности будем считать, что $x > y$. Положим $\psi(\alpha) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$. Ясно, что $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Достаточно доказать, что эта функция имеет на отрезке $[0; 1]$ одну точку, производная в которой равна нулю, причем это – точка максимума. Вычислим производную:

$$\begin{aligned}\psi'(\alpha) &= f(x) - f(y) - f'(\alpha x + (1-\alpha)y)(x-y) = \\ &= \big(f'(c) - f'(\alpha x + (1-\alpha)y)\big)(x-y).\end{aligned}$$

Так как $f'(x)$ строго возрастает, то $\psi'(\alpha) = 0$ при $\alpha = \alpha_0 = \frac{c-y}{x-y}$, более того, $\psi'(\alpha) > 0$ при $\alpha < \frac{c-y}{x-y}$ и $\psi'(\alpha) < 0$ при $\alpha > \frac{c-y}{x-y}$. Таким образом, α_0 и является точкой максимума.

Геометрический смысл доказанного утверждения: всякая хорда графика выпуклой функции лежит выше самого этого графика.

4) Указание: разность $f(x) - kx - b$ имеет не более одной точки минимума.

Задача 14. 1) Если f – выпуклая функция, то

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

2) Справедливо неравенство (так называемое неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим):

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

1) При $n = 2$ неравенство имеет вид $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, таким образом, оно является частным случаем неравенства пункта 3 предыдущей задачи. Если $n = 3$, то его справедливость следует из цепочки неравенств:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{1}{3}\cdot x_3\right) \le$$
$$\le \frac{2}{3}\cdot f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot f(x_3) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

При других n рассуждение аналогично (можно было сразу доказывать по индукции).

2) Рассмотрев натуральные логарифмы от обеих частей данного неравенства, получим, что оно равносильно неравенству

$$\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n} \le \ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right),$$

которое справедливо в силу аналога неравенства предыдущего пункта для выпуклых вверх функций.

Задача 15. Найдите с точностью 0,02 решение уравнения $x^5 + x^2 + x = 39$.

Ясно, что решение данного уравнения немного больше 2. Покажем, что оно равно 2 с требуемой в задаче точностью. Положим $f(x) = x^5+x^2+x$. Данная функция заведомо выпукла при $x > 0$, значит,

$$f(x) > f(2) + f'(2)(x-2) = 38 + 85(x-2)$$

при $x > 2$. Следовательно, если $f(x) = 39$, то $x-2 < \frac{1}{85} < 0{,}02$.

Справочник

1. Уравнение касательной к графику $y = f(x)$, проведенной в точке с абсциссой x_0: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

2. Формула производной “сложной” функции. Рассмотрим функцию $h(x) = f(g(x))$. Предположим, что существуют производные функции g в точке x_0 и функции f в точке $u_0 = g(x_0)$. Тогда существует и производная $h'(x_0)$, причем $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

3. Теорема Ферма. Если $c \in (a;b)$, $f(x) \leq f(c)$ при всех $x \in (a;b)$ и существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

4. Следствие. Наибольшее (и наименьшее) значение заданной и непрерывной на $[a;b]$ функции f равно ее значению в одной из следующих точек: a, b, корнях уравнения $f'(x) = 0$, точках, в которых f' не существует.

5. Теорема Лагранжа. Если функция f задана и непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то найдется такая точка $c \in (a;b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

6. Следствие 1. Если $f'(x) = 0$ в некотором промежутке, то функция f постоянна на этом промежутке.

7. Следствие 2. Если $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на некотором промежутке, причем производная не обращается тождественно в ноль ни на каком отрезке, то функция f строго возрастает (соответственно, убывает) на этом промежутке.

8. Правило Лопиталя. Если $f(x)$, $g(x) \to 0$ (или же если $f(x)$, $g(x) \to \infty$) при $x \to a$ (где роль a может играть ∞) и существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Задачи для самостоятельного решения

Предлагаемые задачи являются, в основном, не совсем стандартными, для того, чтобы их решить, только "школьных" знаний окажется недостаточно. Разберите еще раз решения задач 5, 11–13.

9.1. Дана функция $f(x) = ax - 2\sqrt{x+1}$, $a > 0$.

а) Найдите все значения a, при которых функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$.

б) Пусть $a = 1$. Найдите наименьшее значение этой функции.

в) Пусть $a = 1$. Найдите уравнения касательных к графику функции f, проходящих через точку $A(5, 0)$.

г) Пусть $a = 1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику данной функции.

9.2. Найдите все точки оси ординат, для которых ближайшей к ним точкой параболы $y = x^2$ является начало координат.

9.3. Найдите наименьшее значение функции:

а) $f(x) = \frac{a^2}{\cos^2 x} + \frac{b^2}{\sin^2 x}$; б) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-6x+10}$.

9.4. Постройте графики: а) $y = x^2e^{-x}$; б) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$;

в) $y = \frac{x-1}{x^2-4}$; г) $y = \frac{x-3}{x^2-4}$.

9.5. Найдите все значения a, при которых:

а) из неравенства $x > a$ следует неравенство $3^x - 1 > 2a$;

б) уравнение $\sqrt{9-x^2} = a + \sqrt{x^2-ax}$ имеет решение.

9.6. Найдите наибольший объем бака без крышки, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, на изготовление которого пойдет 3 квадратных метра листового железа.

9.7. Докажите неравенства: а) $y\ln\frac{x}{y} < x - y$, $x, y > 0$;

б) $x\sin y < y\sin x$ при $0 < x < y < \pi$;

в) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

г) $\ln^2 n > \ln(n-1)\ln(n+1)$, n – натуральное.

9.8. Докажите неравенства: а) $e^{x-1} \geq x$ при всех $x \in \mathbb{R}$;
б) $x_1x_2\ldots x_n < e^{800}$, если $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1997$ и $x_i > 0$.

9.9. Определите (в зависимости от значения a) число решений уравнения:
а) $\sqrt{x^2+1} = a(x+1)$; б) $e^x = ax$; в) $\sqrt{4-2x}+\sqrt{x-1} = a$.

9.10. Найдите число касательных к графику $y = x^2 - 2x$, проходящих через точки, лежащие на: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

9.11. Докажите, что треугольники, образованные осями координат и касательными к графику $y = \frac{k}{x}$, равновелики.

9.12. а) Пусть $p(x)$ – квадратный трехчлен, $p(3) = p(9) = 0$ и $p'(3) = 13$. Найдите $p'(9)$. б) Пусть $q(x)$ – кубический многочлен, $q(1) = q(2) = 0$, $q'(1) = k$, $q'(2) = l$. Найдите третий корень этого многочлена.

9.13. Пусть $q(x)$ – кубический многочлен. Докажите, что:
а) если $q''(x_0) = 0$, то график $y = q(x)$ симметричен относительно точки $(x_0, q(x_0))$; б) не существует прямой, касающейся его графика в двух различных точках.

9.14. Найдите решение уравнения $x^3 + 3^x = 370$ с точностью 0,01.

9.15. Докажите, что если функция f выпукла и $f(x) \to c$ при $x \to +\infty$, то $f'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Комментарии и советы

9.1. а) Покажите вначале, что данная функция не может убывать всюду на $[0; +\infty)$. б) Стандартно.

в) Составьте уравнение относительно неизвестной точки касания (см. задачу 11).

г) Найдите все x, при которых имеет единственное решение уравнение $x(\sqrt{t+1} - 1) = t + 2$.

9.2. Рассмотрите точку $(0, a)$ и составьте функцию, значение которой равно квадрату расстояния от этой точки до точек данной параболы. Останется лишь выяснить, при каких a она принимает свое наименьшее значение при $x = 0$.

9.3. При решении пунктов а и б удобно будет сделать замены. Если вам не удастся понять геометрию задачи пункта в), то вам придется пробиться через некоторые вычисления (не пугайтесь заранее!).

9.4. Для исследования поведения x^2e^{-x} при $x \to +\infty$ удобно воспользоваться правилом Лопиталя.

9.5. а) Два указания: функция $y = 3^x - 1$ возрастающая; прежде всего поймите, при каком соотношении между числами a и b для всякого $x > a$ верно неравенство $x > b$.

б) Рассмотрите по отдельности случаи $a > 0$ и $a < 0$ (случай $a = 0$ очевиден). Изобразите график $y = a + \sqrt{x^2 - ax}$ и постарайтесь понять, при каких условиях он пересекается с верхней полуокружностью $y = \sqrt{9 - x^2}$ в двух точках.

9.6. Пусть x – длина ребра основания бака. Найдите формулу для его объема.

9.7. Общее указание: см. задачу 5. а) Замена $\frac{x}{y} = t + 1$. б) См. задачу 13.2. в) Положите $x = \frac{1}{n}$. г) Воспользуйтесь неравенством $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

9.8. а) См. задачу 5.
б) Используйте неравенство Коши (пункт 2 задачи 14).

9.9. Сведите данные уравнения к виду $f(x) = a$.

9.10. См. задачу 11.

9.11. См. задачу 7.

9.12. Воспользуйтесь представлениями: а) $p(x) = a(x-3)(x-9)$; б) $q(x) = a(x-1)(x-2)(x-t)$ и продифференцируйте их.

9.13. а) Представьте многочлен в виде

$$a_1(x - x_0)^3 + b_1(x - x_0)^2 + c_1(x - x_0) + d_1$$

и определите значения b_1 и d_1.
б) Если x_1 – это одна из абсцисс точки касания графика $y = q(x)$ и прямой $y = kx + b$, то разность $q(x) - kx - b$ делится на ... (см. задачу 12).

9.14. См. задачу 15.

9.15. Если производная f' принимает положительное значение хотя бы в одной точке, то $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Так как f' монотонна, то она имеет предел.

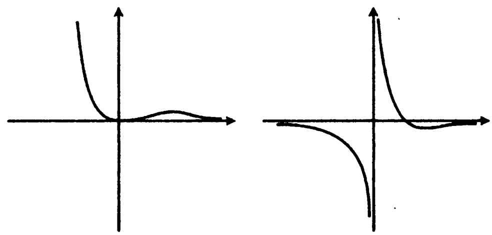
Ответы и комментарии

9.1. а) $a \geq 1$. б) $f(0) = -2$. в) $y = \frac{x-5}{2}$, $y = \frac{2x-10}{3}$.
г) При $x \in (-\infty; -1) \cup \{2 + 2\sqrt{2}\}$.
Можно предложить ребятам построить график $y = x - 2\sqrt{x+1}$ и проверить, насколько полученный ответ отвечает здравому смыслу.

9.2. Точки $(0, y)$, где $y \leq \frac{1}{2}$.

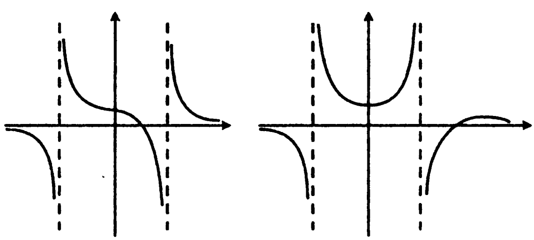
9.3. а) $(a + b)^2$. б) 3. в) $3\sqrt{2}$. Сумма растояний от точки оси абсцисс до точек $(0, 2)$ и $(3, 1)$ будет наименьшей, если $x = 2$.

9.4. Графики – на рисунках.



а *б*

Полезно также постараться понять, какие типы может иметь график $y = \frac{x-a}{x^2-4}$ в зависимости от значения a.



в *г*

9.5. а) $x > a \iff 3^x - 1 > 3^a - 1$, значит, условие будет выполнено только, если $3^a \geq 2a - 1$. Осталось решить неравенство. Воспользуйтесь тем, что функция $y = 3^x$ выпукла. Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

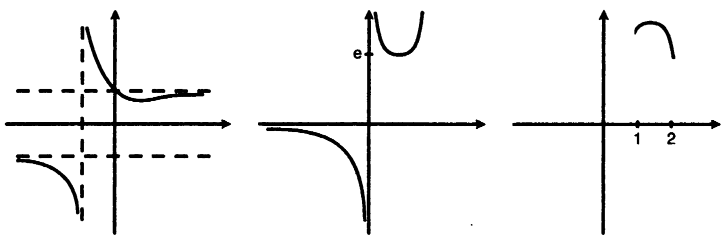
б) Ответ: $a \in \left[\frac{3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

9.6. 0,5 м^3.

9.7. Хорошие упражнения на стандартные неравенства, доказываемые стандартными способами.

9.8. б) Задача достаточно сложная, поэтому будет приведено полное ее решение. Из неравенства Коши (пункт 2 задачи 14) следует, что произведение чисел x_i не превосходит $\left(\frac{1997}{n}\right)^n$, которое, в свою очередь, не превосходит наибольшего значения функции $f(t) = \left(\frac{a}{t}\right)^t = e^{t(\ln a - \ln t)}$ (для $a = 1997$), которое достигается при $t = \frac{a}{e}$ и равно $e^{a/e} = e^{1997/e} \leq e^{800}$, так как $e > 2{,}5$.

9.9. Ответы: а) одно решение при $a < -1$, $a \geq 1$ и $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; два решения при $\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$; б) одно решение при $a < 0$ и $a = e$; два решения при $a > e$; в) одно решение при $1 \leq a < \sqrt{2}$ и $a = \sqrt{3}$; два решения при $\sqrt{2} \leq a < \sqrt{3}$ – следуют из изображенных на рисунках *а–в* графиках $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ $\quad y = \frac{e^x}{x}$ $\quad y = \sqrt{4-2x} + \sqrt{x-1}$.



а *б* *в*

9.10. а) две касательные при $x < 0$ и $x > 2$; одна касательная при $x = 0; 2$; б) две касательные при $y < 0$; одна касательная при $y = 0$.

9.12. а) $p'(9) = -13$; б) $x = \frac{2k+l}{k+l}$.

9.13. а) Так как $b_1 = 0$, а $d_1 = q(x_0)$, то в системе координат с началом в точке $(x_0, q(x_0))$ график q будет задан уравнением $y = a_1x^3 + c_1x$. б) Если бы такая прямая существовала, то $q(x)$ – многочлен степени 3 – делился бы на многочлен четвертой степени $(x-x_1)^2(x-x_2)^2$, чего быть не может.

9.14. $x = 5$.

9.15. Если $f'(x) \to m < 0$, то $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

10. Составление уравнений, неравенств и систем

Эквивалентные задачи на движение и работу. "Средняя" скорость. Уравнения в целых числах. Задачи на проценты. Составление неравенств. "Неоднозначные" задачи на движение. Одна задача линейного программирования.

Обсуждение. Сила математики в том, что ее можно применять для анализа событий реальной жизни, для чего прежде всего необходимо описать происходящие события на присущем ей языке. С этой точки зрения задачи данного раздела существенно ближе к реальности, чем все, что рассматривалось ранее. Традиционно такие задачи называют "текстовыми", и обычно рассматриваются задачи на движения или работу, проценты, задачи на свойства целых чисел, в общем все, что можно описать словами и нетрудно описать уравнениями. В этот раздел не включены (за одним исключением) задачи на прогресии, поскольку они по своей сути текстовыми не являются. Когда сказано, что задана арифметическая прогрессия, то это уже означает, что эта последовательность чисел задана математически.

Главное, что надо сделать при решении текстовых задач, так это распутать их формулировку, правильно составив уравнение(я), неравенство(а). Иногда из условия задачи непосредственно вытекает соотношение между естественными переменными (как в задаче 1), иногда его еще предстоит обнаружить (см. задачу 2). Говоря высоким стилем, эти задачи важны тем, что при их решении прежде всего требуется построить математическую модель описанной в задаче ситуации.

Основные формулы в задачах на движение и работу очевидны: $S = vt$ в случае, если S – расстояние, которое некто прошел (проехал, пробежал) за время t при условии, что двигался с постоянной скоростью v, или $A = pt$, здесь A – величина работы, проделанной за время t с интенсивностью (производительностью труда) p. Как известно, измерять и скорость, и производительность можно в разных единицах, при этом в одном и том же рассуждении использовать разные единицы не следует. Если, к примеру, некто сделал 100 деталей за 5 часов, то производительность его труда (скорость выполнения работы) составляет 20 деталей в час. А можно было сказать, приняв все задание за единицу, что $p = \frac{1}{5}$. При этом будет грубой ошибкой в другом уравнении положить $p = 20$. Далее важно понимать, что можно складывать, а что нет. Бывает, что встречаются такие "рассуждения" (абсолютно бессмысленные с точки зрения здравого смысла): если один насос заполнит бак за 1 час, а второй – за 2 часа, то вместе они наполнят бак за 3(?!) часа. Как вы думаете, что можно изменить в условии задачи, чтобы приведенное решение стало верным? К примеру, если пункт C лежит на дороге между A и B, то сумма расстояний от C до A и B равна расстоянию между A и B. Если нечто происходило сначала в течение t_1 минут (часов, суток), а потом еще в течение t_2, то вся процедура длилась $t_1 + t_2$. Если один субъект произвел p_1 деталь, а другой – p_2 деталей, то всего их было произведено $p_1 + p_2$ штук. В общем, всякое решение – это рассуждение.

Задача 1. Площадь поверхности Земли составляет 510 млн. кв. км. Площадь воды северного полушария на 8 млн. кв. км больше утроенной площади суши южного полушария, а площадь воды южного полушария на 6 млн. кв. км больше удвоенной площади суши северного полушария. Найдите общую площадь суши.

Естественно обозначить через x и, соответственно, y площадь суши северного и южного полушарий (в млн. кв. км). Поскольку общая площадь каждого из полушарий составляет 255 млн. кв. км, то площадь воды в полушариях равна $255 - x$

и $255 - y$ млн. кв. км, соответственно. По условию имеем,

$$\begin{cases} 255 - x = 8 + 3y, \\ 255 - y = 6 + 2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 3y = 247, \\ 2x + y = 249. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что $x = 100$ и $y = 49$, таким образом суши на Земле 149 млн. кв. км.

Задача 2. Двое рабочих, работая на одном станке поочередно, выточили за 12,5 часов 100 деталей, причем каждый из них сделал по 50 деталей. Известно, что, работая одновременно на двух станках, они справились бы с заданием за 6 часов. За сколько часов каждый из них справился бы с этим заданием, работая в одиночку?

> Иногда спрашивают, можно ли считать, что эти рабочие работают с одинаковой производительностью, не обращая внимания на то, что такое предположение противоречит второму условию задачи.

Один из естественных вариантов введения переменных – обозначить через x и y производительности труда первого и второго рабочих, т. е. количество деталей, изготовляемое в час каждым из них. На 50 деталей им потребовалось $\frac{50}{x}$ и $\frac{50}{y}$ часов, а поскольку они работали попеременно, то $\frac{50}{x} + \frac{50}{y} = 12,5$. При одновременной работе на двух станках, они за каждый час делают $x + y$ деталей, значит, за 6 часов они сделают $6(x + y)$ деталей, так что $6(x + y) = 100$. В результате мы получаем систему

$$\begin{cases} 4(x + y) = xy, \\ 3(x + y) = 50, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = \frac{50}{3}, \\ xy = \frac{200}{3}, \end{cases}$$

откуда $x = 10$, $y = \frac{20}{3}$, или наоборот, что значения не имеет. Таким образом, одному из них на задание потребуется $\frac{100}{10} = 10$ часов, а другому $\frac{100}{\frac{20}{3}} = 15$ часов.

Мы могли ввести другие неизвестные и, возможно, это было бы более естественно. Итак, пусть теперь за x и y обозначено время, за которое справится с заданием каждый из рабочих. С половиной задания каждый из них справится за вдвое меньшее время, поэтому $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 12,5$, или $x + y = 25$. Поскольку за один час каждый из рабочих произведет, соответственно, $\frac{100}{x}$ и $\frac{100}{y}$ деталей, то, так как за 6 часов они сделали в совокупности 100 деталей, то $6(\frac{100}{x} + \frac{100}{y}) = 100$, или $6(x + y) = xy$, таким образом, $xy = 150$. Теперь ответ: 10 и 15 часов легко угадываем теми, кому лень решать квадратное уравнение.

Сравним приведенные решения. По сути дела, они ничем друг от друга не отличаются, однако из второго рассуждения ясно видно, что количество деталей здесь ни при чем, всю работу можно было “обозначить за единицу” и далее рассуждать в “частях этой работы”. Другое дело, что в таком случае в первом решении ответы получились бы маленькими, именно $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{15}$, и в соответствующем квадратном уравнении коэффициенты были бы достаточно велики (проверьте).

Задача 3. а) Команда супермарафонской эстафеты 2×50 прошла дистанцию за 12,5 часов. Если бы оба участника этой команды просто бежали навстречу друг другу, то они встретились бы через 6 часов. За сколько часов пробегает всю дистанцию (т. е. 100 км) каждый из них?
б) Для заполнения бака с водой сначала открыли одну трубу, а как только он был заполнен наполовину, то ее закрыли и пустили воду в бак по другой трубе, в результате чего бак был заполнен полностью за 12,5 часов. Если обе трубы открыть сразу, то бак заполнится за 6 часов. За сколько часов бак заполняется водой, если открыта только одна труба?

Решений приводить не следует. Обе сформулированных задачи в точности равносильны предыдущей, они и даны были только для того, чтобы показать, что задачи “на движение” ничем не отличаются от задач “на работу”. Другое дело, что порой надо немного подумать, каким образом можно сделать подобные переформулировки (эстафета!). К примеру, можно написать, что, “достигнув пункта B, некто повернул назад”, но сказать, что, "сделав задание, рабочий стал ломать произведенные им детали", противоречит здравому смыслу. Однако если бак заполнился, то можно начать откачивать воду...

Если вы хотите научить ребят легко и непринужденно решать подобные задачи, то будет весьма уместно предлагать им сформулировать задачу равносильным образом, использовав другой контекст.

Задача 4. В шоссейной гонке один из велосипедистов ехал половину времени со скоростью v_1 и другую половину – со скоростью v_2 (где $v_1 \neq v_2$), а другой проехал половину дистанции со скоростью v_1 и другую половину – со скоростью v_2. Кто из них показал лучшее время?

Обозначим всю дистанцию через S. Если первый велосипедист проехал ее за время t_1, то $v_1 \cdot \frac{t_1}{2} + v_2 \cdot \frac{t_1}{2} = S$, поскольку слагаемые в левой части суть расстояния, которые он проезжал со скоростями v_1 и v_2, соответственно. Таким образом, $t_1 = \frac{2S}{v_1+v_2}$. Второй велосипедист ехал полдистанции со скоростью v_1, затратив на нее время $\frac{S}{2v_1}$, затратил на другую половину время $\frac{S}{2v_2}$, таким образом, он показал время $t_2 = \frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2} = \frac{S(v_1+v_2)}{2v_1v_2}$.

Разность $t_2 - t_1$ равна

$$\frac{S(v_1+v_2)}{2v_1v_2} - \frac{2S}{v_1+v_2} = \frac{S((v_1+v_2)^2 - 4v_1v_2)}{2v_1v_2(v_1+v_2)} =$$
$$= \frac{S(v_1-v_2)^2}{2v_1v_2(v_1+v_2)} > 0,$$

следовательно, лучшее время показал первый велосипедист.

В свое время автор проводил следующий эксперимент. Учащимся предлагалась задача: поезд ехал полдороги со скоростью 160 км/час и полдороги со скоростью 90 км/час. Найдите среднюю скорость поезда. При этом сформулируйте точно, что означает для вас слово – "полдороги". К сожалению, слишком часто ребята понимали среднее как среднее арифметическое, не задумываясь о смысле этого понятия. Если полдороги – это половина расстояния, то средняя скорость равна среднему гармоническому скоростей, с которыми поезд ехал на каждой половине. Как видно из решения задачи 4, средняя скорость равна их среднему арифметическому в случае, когда полдороги – это половина времени, затраченного на весь путь.

Иногда бывает, что постановка задачи такова, что уравнений получается меньше, чем неизвестных переменных. Отчаиваться не стоит, надо посмотреть, может быть, данных достаточно для того, чтобы ответить на поставленный вопрос.

Задача 5. Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через час по тому же маршруту выехал легковой автомобиль, который уже через два часа догнал грузовик и в результате прибыл в пункт B на три часа раньше. Сколько часов грузовик был в пути?

Обозначим через v и V скорости грузовика и легковушки. Поскольку они проехали одно и то же расстояние (до точки, в которой легковой автомобиль догнал грузовик) за 3 и 2 часа, соответственно, то $3v = 2V$, так что $V = \frac{3}{2}v$. Если грузовик на весь путь затратил t часов, то легковой автомобиль проехал его за $t - 4$ часа, значит, $vt = V(t - 4)$, откуда $vt = \frac{3}{2}v(t - 4)$, или $2t = 3t - 12$. Таким образом, грузовик приехал в пункт B через 12 часов.

Смысл следующей задачи состоит в том, чтобы показать различие и связь между абсолютным изменением некоторой величины и ее относительным изменением.

Задача 6. Производственный процесс состоял из двух операций, на каждую из которых затрачивалось одинаковое время. В результате модернизации производительность первой операции увеличилась на 10%, производительность второй – на 20%, а длительность всего процесса уменьшилась более, чем на час. Сколько времени занимал этот процесс до модернизации?

Если производительность увеличена в k раз, то время работы уменьшается ровно в k раз, следовательно, если изначально производственный процесс занимал t часов, то после модернизации производства его длительность стала составлять $\frac{t}{2\cdot 1,1}+\frac{t}{2\cdot 1,2}=\frac{2,3}{2,64}t$ часа. По условию $\frac{2,3}{2,64}t < t-1$, откуда следует, что $t > \frac{2,64}{0,34} \approx 7$ часов и 46 минут.

Задача 7. Два насоса откачивают воду, равномерно поступающую в бак. Если включить первый из них, то полный бак опустеет за 3 часа, если включить второй, то за 2 часа, а если же включены оба, то бак опустеет за 1 час. За какое время наполнится пустой бак, если оба насоса выключены?

Пусть x – это доля бака, поступающая в него за 1 час, y – доля бака, которую откачивает за 1 час первый насос, а z – доля бака, откачиваемая за час вторым насосом. По условию, за три часа первый насос выкачал весь бак, включая всю воду, поступившую в него за это время, таким образом, $1+3x=3y$. Аналогично, $1+2x=2z$ и $1+x=y+z$. Решив полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим, что $x=\frac{1}{6}$, следовательно, бак наполнится за 6 часов.

В некоторых случаях по смыслу задачи значения неизвестных являются целыми, к примеру, когда мы ищем некоторые *количестфа*. В подобных случаях нам не обязательно иметь столько уравнений, сколько имеется неизвестных.

Задача 8. Найдите все двузначные натуральные числа, которые: а) в 7 раз больше суммы своих цифр; б) в 2 раза больше произведения своих цифр.

а) Если за a обозначить первую цифру искомого числа, за b – вторую, то $10a+b=7(a+b)$, или $3a=6b$, так что $a=2b$. Отсюда получаем ответ: искомыми числами являются 21, 42, 63 и 84.

б) Имеем, $10a+b=2ab$, или $b=2a(b-5)$, следовательно, цифра b четна и не может быть меньше 6. Ответ: искомое число равно 36.

Задача 9. Натуральные числа от 1 до kl выписаны в порядке возрастания по строкам таблицы, содержащей k строк и l столбцов. Найдите размеры этой таблицы, если известно, что число 20 находится в ее третьей строке, число 41 – в пятой, а число 103 – в последней.

Поскольку во всякой строке стоят l чисел, то в третьей строке находятся числа от $2l+1$ до $3l$, поэтому $2l+1 \le 20 \le 3l$, откуда следует, что $\frac{20}{3} \le l \le \frac{19}{2}$. Поскольку число l является натуральным, то $l = 7, 8, 9$. Аналогичным образом, $4l + 1 \le 41 \le 5l$, откуда следует, что $\frac{41}{5} \le l \le 10$. Таким образом, $l = 9$. Наконец, в последней строке стоят числа от $(k-1)l + 1$ до kl, таким образом, $9(k-1) + 1 \le 103 \le 9k$, откуда $\frac{103}{9} \le k \le \frac{37}{3}$, значит, $k = 12$.

При решении некоторых задач с целочисленными данными рассуждение должно быть более тонким.

Задача 10. Косцы должны были выкосить два луга. После того, как они два часа работали на большом лугу, часть из них пошла косить второй луг вдвое меньшей площади и закончила работу одновременно с группой, оставшейся на первом лугу. Сколько косцов осталось работать на первом лугу, если один косец скашивает малый луг за 3 дня работы по 8 часов в день.

Если за 1 обозначить площадь малого луга, то производительность труда одного косца равна $\frac{1}{24}$ в час. Обозначим через k число косцов, оставшихся на большом лугу, а через l – ушедших трудиться на малый. После двух часов работы всей группы общей численностью $k + l$ косцов им останется скосить часть большого луга площадью $2 - \frac{k+l}{12}$ и весь малый луг. Поскольку по условию обе группы закончили работу одновременно, то

$$\frac{2 - \frac{k+l}{12}}{k} = \frac{1}{l}, \text{ или } \frac{24 - k - l}{12k} = \frac{1}{l},$$

откуда $k = \frac{l(24-l)}{l+12} = 36 - l - \frac{12 \cdot 36}{l+12}$. Поэтому число $12 \cdot 36 = 2^4 \cdot 3^3$ должно делиться нацело на $l + 12$, где $0 < l < 24$. При помощи простого перебора получаем, что $l = 4; 6; 12; 15$, откуда следует, что $k = 5; 6$.

Две стандартные задачи на проценты.

Задача 11. Заработная плата одной категории государственных служащих повышалась два раза, причем процент, на который она была повышена во второй раз, вдвое больше процента повышения в первый раз. На сколько процентов каждый раз повышалась зарплата, если до первого повышения она составляла 7000 рублей, а после второго – 9240 рублей?

Пусть a – процент, на который в первый раз была повышена зарплата. Таким образом, после первого повышения ее размер составил $7000 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ рублей, а после второго он стал равен $7000 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{2a}{100}\right)$ рублям. Положим $q = 1 + \frac{a}{100}$. Тогда $1 + \frac{2a}{100} = 2q - 1$, и мы получаем квадратное уравнение

$$7000q(2q - 1) = 9240, \text{ или } 2q^2 - q - \tfrac{33}{25} = 0,$$

откуда $q = \frac{11}{10}; -\frac{3}{5}$. Второе число не имеет отношения к данной задаче, таким образом, в первый раз заработная плата была повышена на 10%, а во второй – на 20%.

Задача 12. Фирма взяла в банке кредит под некоторый процент. За первые два года ее долг вырос на 600 тысяч рублей, а за третий – еще на 490 тысяч. Определите объем взятого фирмой кредита.

Если x – объем кредита, $q = 1 + \frac{a}{100}$, где a – ставка по этому кредиту (в годовых процентах), то за год долг возрос до величины xq, за два года – до xq^2, через три года он составит xq^3. По условию

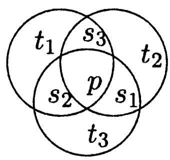
$$\begin{cases} xq^2 - x = 600, \\ xq^3 - xq^2 = 490. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим $\frac{q^2}{q+1} = \frac{49}{60}$, или $60q^2 - 49q - 49 = 0$. Его положительный корень равен $\frac{7}{5}$, таким образом, кредит был взят под 40% годовых. Сумма взятого кредита составляет величину $x = \frac{600}{q^2-1} = 625$ тысяч рублей.

При составлении уравнений не следует скупиться на переменные; как получается – так и получается.

Задача 13. Три студента, готовясь к экзамену, решили в совокупности 100 задач, причем каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один из них, назовем задачу простой, если ее решил каждый из них. Докажите, что среди этих 100 задач трудных было на 20 больше, чем простых.

Обозначим через t_1 число задач, которые решил только первый из студентов, аналогично введем числа t_2 и t_3. Пусть p – это число задач, которые решил каждый из студентов, а s_1, s_2, s_3 – количества задач, которые не были решены только первым, вторым и третьим студентом, соответственно (см. рисунок).



Таким образом, p – число простых задач, $t = t_1 + t_2 + t_3$ – число трудных задач, $s = s_1 + s_2 + s_3$ – число задач, так сказать, средней сложности. Вместе с двумя только что введенными, у нас имеются четыре соотношения, которые можно свести в систему

$$\begin{cases} t_1 + s_2 + s_3 + p = 60, \\ t_2 + s_1 + s_3 + p = 60, \\ t_3 + s_2 + s_1 + p = 60, \\ t + s + p = 100, \\ t_1 + t_2 + t_3 = t, \\ s_1 + s_2 + s_3 = s. \end{cases}$$

Сложив три первых уравнения и использовав два последних, получим, что $t + 2s + 3p = 180$, таким образом,

$$\begin{cases} t + s + p = 100, \\ t + 2s + 3p = 180. \end{cases}$$

Все, что осталось сделать, так это вычесть последнее уравнение из удвоенного предыдущего.

Конечно, уравнение $t + 2s + 3p = 180$ можно было написать сразу. Действительно, в сумме $60+60+60$ количеств задач, решенных каждым из студентов, каждая из задач средней сложности появится два раза, а каждая простая – три. Однако такой способ рассуждения можно охарактеризовать как "олимпиадный". С другой стороны, при составлении системы уравнений ничего придумывать не потребовалось, необходимо было спокойно и методично записать все имеющиеся соотношения между естественным образом введенными переменными.

Задача 14. На прошедших выборах за кандидата, набравшего более 50% голосов уже в первом туре, проголосовали 99% пришедших к урнам избирателей Северного округа и только 1% избирателей Южного округа. Докажите, что если бы избирателей Южного округа пришло на 35% меньше, то этот кандидат получил бы более 60% голосов от числа всех участвовавших в этих выборах.

Пусть n – это число проголосовавших жителей Северного округа, s – Южного. По условию,

$$0,99n + 0,01s > 0,5(s + n), \text{ или } 0,49n > 0,49s, \text{ т. е. } n > s.$$

Покажем, что если бы из Южного округа пришло только $0,65s$ избирателей, то было бы верно неравенство

$$0,99n + 0,01 \cdot 0,65s > 0,6(n + 0,65s), \text{ или } 0,39n > 0,3835s,$$

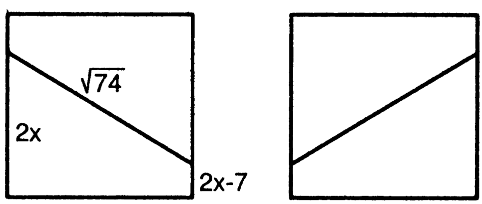
что имеет место, поскольку $n > s$.

В силу привычки, многие считают, что задачи на движение имеют единственное решение. Следующая задача должна развеять это заблуждение.

Задача 15. Два пешехода обходят квадратный участок площадью 49 км^2 по его границе, выйдя одновременно из одного его угла в разные стороны с постоянными скоростями. Встретились они через 4 часа. Найдите скорости пешеходов, если известно, что: а) через 2 часа пути расстояние между ними было равно $\sqrt{74}$ км, б) через 3 часа пути расстояние между ними было равно $\sqrt{29}$ км.

Обозначим через x и y скорости пешеходов. Раз они встретились через 4 часа, то $4(x+y) = 28$, таким образом, $x+y = 7$.

В задаче а) через два часа расстояние между пешеходами (измеряемое вдоль границы участка) будет равно половине его периметра, следовательно, они будут находится в симметричных относительно центра участка точках. Для определенности будем считать, что первый пешеход уже прошел точку поворота. Однако возникают два варианта: возможно, что второй пешеход уже прошел половину прямолинейного участка, а может быть, и нет (рисунки).



В обоих случаях появляются два прямоугольных треугольника, горизонтальный катет которых равен 7, гипотенузы которых по условию равны $\sqrt{74}$, а длина второго катета, как нетрудно видеть, равна $|2x - 2y + 7|$. В силу теоремы Пифагора,

$$(2x - 2y + 7)^2 + 7^2 = 74, \text{ или } (2x - 2y + 7)^2 = 25,$$

откуда $2x - 2y + 7 = \pm 5$, значит, $y - x = 1$ или $y - x = 6$. Поскольку $x + y = 7$, то получаем два ответа: скорости пешеходов составляют 3 и 4 км/час или же 0,5 и 6,5 км/час.

Задача б) еще интереснее, поскольку имеет целых три ответа: 3 и 4 км/час; $1\frac{2}{3}$ и $5\frac{1}{3}$ км/час; $\frac{2}{3}$ и $6\frac{1}{3}$ км/час. Разберитесь с ней самостоятельно.

Последняя из обсуждаемых задач – это первая (и единственная в этой книге) задача из той области математики, которая называется "методы оптимизации" и которая непосредственно связана с реальными приложениями.

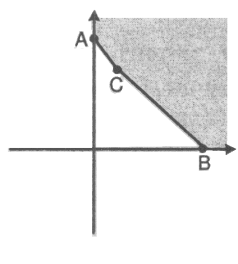
Задача 16. В 1 литре напитка *Буко* (ценой 20 рублей) содержится 3 г красителя E20 и 5 г консерванта E41, а в 1 литре напитка *Суко* (ценой 25 рублей) – 4 г E20 и 6 г E41. Какую сумму необходимо иметь Пете перед походом на ночную дискотеку, чтобы обеспечить свой организм не менее, чем 11 граммами красителя и 17 граммами консерванта?

Предположим, что Петя приобрел x литров первого напитка и y литров второго. Выпив их, он подкрепился $3x+4y$ граммами красителя и $5x+6y$ граммами консерванта. По условию,

$$\begin{cases} 3x+4y \geq 11, \\ 5x+6y \geq 17, \end{cases}$$

кроме того, естественно, что $x, y \geq 0$. При этом Петины затраты составили $20x+25y$ рублей. Конечно, он может взять только напиток *Буко*, в этом случае должны выполняться неравенства $x \geq \frac{11}{3}$ и $x \geq \frac{17}{5}$, значит, ему придется, как минимум, купить $3\frac{2}{3}$ литра, истратив на это 73 рубля 34 копейки. Но, быть может, есть и более экономный вариант?

Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться геометрической интерпретацией данной задачи, вначале изобразив на координатной плоскости множество всех допустимых пар, т. е. подмножество первого координатного угла, заданное найденной системой неравенств:



Построенное множество является “неограниченным четырехугольником” с вершинами в точках $A\left(0, \frac{17}{6}\right)$, $B\left(\frac{11}{3}, 0\right)$ и $C(1,2)$. Задача состоит в том, чтобы найти точку этого множества, в которой значение линейного выражения $20x+25y$ является наименьшим. Уравнения $20x+25y=c$ задают на плоскости семейство параллельных прямых, причем чем меньше c, тем ниже располагается прямая, и наоборот. Ясно, что наименьшее значение выражение $20x+25y$ принимает в одной из угловых точек A, B, C, поэтому проще всего эти значения взять и подсчитать:

(x,y)	$(0, \frac{17}{6})$	$(1,2)$	$(\frac{11}{3}, 0)$
$20x+25y$	70,84 руб	70 руб	73,34 руб

Значение этой функции в точке C равно 70; оно и является искомым.

Справочник

В этот раздел будут включены только рассуждения, связанные с процентами. По определению, процент – это сотая часть числа, поэтому если сказано, что число b составляет $n\%$ от числа a, то $b = \frac{n}{100} \cdot a$. Когда сказано, что число b на $n\%$ больше (меньше) числа a, то это значит, что их разность составляет $n\%$ от данного числа a, именно

a увеличено на $n\%$	$b = a + \frac{n}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{n}{100}\right)a$
a уменьшено на $n\%$	$b = a - \frac{n}{100} \cdot a = \left(1 - \frac{n}{100}\right)a$

Конечно, нельзя уменьшить число более, чем на 100%. Удобно ввести числа $q_+ = 1 + \frac{n}{100}$ и $q_- = 1 - \frac{n}{100}$. Тогда приведенные формулы приобретают очень простой вид: $b = q_+a$ и, соответственно, $b = q_-a$. Предположим, что число сначала увеличили на 20%, а затем результат уменьшили на 20%. Часто приходится слышать, что в результате мы получим первоначальное число, что, конечно, не так, поскольку при втором изменении 20% берутся от другого числа! Имеем:

$$a \mapsto a \cdot 1,2 \mapsto (a \cdot 1,2) \cdot 0,8 = a \cdot 0,96,$$

таким образом, в результате мы получим число, которое на 4% меньше исходного.

В жизни мы сталкиваемся с неоднократным увеличением числа на сколько-то процентов, если кладем сумму на счет в банке. Предположим, что некий банк объявил, что квартальная ставка по данному вкладу составляет 2%. В другом банке сказано, что годовая ставка равна 8,5%. В какой банк выгоднее обратиться? Первая формулировка означает, что каждые три месяца вклад увеличивается на 2%, причем на 2% от той суммы, которая была на счету три месяца назад. Таким образом по прошествии года на счету в первом банке после четырех начислений процентов окажется сумма

$$S \mapsto S \cdot 1{,}02 \mapsto (S \cdot 1{,}02) \cdot 1{,}02 = S \cdot 1{,}02^2 \mapsto S \cdot 1{,}02^3 \mapsto S \cdot 1{,}02^4.$$

Поскольку $1{,}02^4 \approx 1{,}0824$, то годовая ставка по вкладу в первом банке составляет 8,24%, поэтому условия, предлагаемые вторым банком, являются более выгодными.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Найдите все точки оси абсцисс, которые расположены: а) вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(2,0)$; б) ближе к точке $A(0,2)$, чем к точке $B(2,5)$.

10.2. (Задача Льюиса Кэрролла). Из замков A и B по дороге навстречу друг другу одновременно выехали два рыцаря. После встречи первый из них ехал еще 9 часов, а второй еще 16 часов до места своего назначения. Сколько часов затратил каждый из них на весь путь?

10.3. Болид команды Феррари движется по трассе в Дубае со средней скоростью 209 км/час, а болид команды Макларен – со скоростью 204 км/час. Оба они стартовали с первой линии. На каком своем круге по счету Феррари обгонит Макларен уже на целый круг?

10.4. Скорость второго велосипедиста на 25% больше скорости первого. В начальный момент второй отставал на 14 км, а через 4 часа пути расстояние между ними равнялось 2 км. Найдите скорости велосипедистов.

10.5. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом 2 минуты. Второй лыжник догнал первого уже через 1 км от старта. Дойдя до отметки 5 км, он повернул назад и встретился с первым. Найдите скорость первого лыжника, если известно, что эта встреча произошла через 20 минут после его старта.

10.6. В бассейн ведут четыре трубы. Если открыты все четыре, то он заполнится через 4 часа, если открыты первая, вторая и четвертая – через 6 часов, если вторая, третья, четвертая – через пять. За какое время заполнится бассейн, если открыть первую и третью трубы?

10.7. Двум трактористам было поручено вспахать три поля: A, B и C. Поле A на 60% больше, чем поле B, а поле C на 37,5% меньше поля A. Первый тракторист вспахал половину поля A и 40% поля B, а второй – все остальное. У какого из трактористов заработок должен быть выше и на сколько процентов?

10.8. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел четверть пути от A к B, то второму до середины пути оставалось еще 1,5 км, а когда второй прошел половину пути, то первый находился от него на расстоянии 2 км. Найдите расстояние между A и B.

10.9. Гражданин положил в МММ-банк определенную сумму под постоянный месячный процент, рассчитывая за год получить доход 9 тысяч рублей. Однако через полгода ему пришлось снять со счета 4 тысячи рублей. Какова была величина исходного вклада, если в конце года сумма на счету составила 20 тысяч рублей?

10.10. Велосипедист и пешеход отправились одновременно по одному маршруту. Достигнув цели, велосипедист вернулся к пешеходу, а потом снова поехал к конечному пункту маршрута. В тот момент, когда он во второй раз достиг цели, пешеход прошел всего две трети пути. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

10.11. В баке объемом 1 м^3 имеется течь. При помощи насоса можно как заполнять бак, так и откачивать из него воду с производительностью 45 литров в минуту (в обоих режимах). В пустой бак вначале закачали воду, а затем ее откачали, затратив на всю операцию 45 минут. За какое время опустеет полный бак, если насос будет отключен? Сформулируйте также эквивалентную задачу на движение.

10.12. Велосипедист едет по шоссе. Каждые 4,5 км его обгоняет рейсовый автобус и каждые 9 минут мимо него проезжает встречный автобус. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что интервал движения автобусов (в обоих направлениях) равен 12 минутам.

10.13. Найдите все трехзначные числа, которые в 11 раз больше суммы своих цифр.

10.14. Найдите число $x < -20$, если известно, что оно является седьмым членом некоторой бесконечной арифметической прогрессии, сумма первых семнадцати членов которой равна 51, и кроме того, известно, что число $-6x$ также является членом этой прогрессии.

10.15. Ученик должен был перемножить два трехзначных числа и разделить их на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в три раза больше истинного. Найдите все три числа.

10.16. Найдите все возможные наборы из семи чисел, сумма любых четырех из которых равна произведению трех оставшихся.

Комментарии и советы

10.1. Воспользуйтесь формулой для расстояния между двумя точками: а) на прямой; б) на плоскости.

10.2. Найдите двумя способами отношение скоростей рыцарей.

10.3. За одно и то же время Феррари проехал на круг больше.

10.4. Дано ли нам, кто был впереди через 4 часа?

10.5. По прошествии 20 минут со старта первого лыжника и, соответственно, 18 минут со старта второго, они суммарно проехали 10 км.

10.6. Вам может показаться, что данных не хватает, однако это только на первый взгляд.

10.7. Возьмите, к примеру, за 1 площадь поля B. Да, заработная плата начисляется по-честному: во сколько раз больше выработка, во столько раз больше и зарплата.

10.8. Уравнений меньше, чем надо, зато они однородные.

10.9. Придется подбирать корень кубического уравнения.

10.10. Велосипедист доехал от B до пешехода и от него обратно до B за одно и то же время.

10.11. Найдите скорость "утекания" воды.

10.12. Два неизвестных – два уравнения. Если V – скорости автобусов, то расстояние между соседними, идущими в одном направлении, рейсовыми автобусами равно $\frac{V}{5}$.

10.13. См. задачу 8. Покажите, что число единиц не может быть меньше 8.

10.14. Важно то, что если $-6x = a_k$, то число k – натуральное. При этом существенно, что $x < -20$.

10.15. Если a и b – записанные рядом трехзначные числа, то как выражается через них составленное из их цифр шестизначное число?

10.16. Докажите, что все числа должны быть равны друг другу.

Ответы и комментарии

10.1. а) $x = 0; \frac{4}{3}$; б) $x < \frac{25}{4}$.

10.2. 21 и 28 часов. Все, что надо сделать, так это написать пропорцию.

10.3. На сорок втором круге. Интересно, что ответ не зависит от длины круга.

10.4. 16 и 20 км/час или 12 и 15 км/час, в зависимости от того, успел второй велосипедист за 4 часа обогнать первого или же не успел.

10.5. 12 км/час.

10.6. За 7,5 часов. Однако если задать вопрос: за какое время заполнится бассейн, если открыта вторая труба, то на него однозначно ответить не удастся. Попробуйте найти наименьший и наибольший срок, за который заполнится этот бассейн при открытой второй трубе.

10.7. Зарплата второго тракториста должна быть вдвое (т. е. на 100%) больше.

10.8. 4 или 12 км. Правда, в первом случае пешеходы идут уж слишком медленно...

10.9. 16 тысяч рублей.

10.10. В 3 раза.

10.11. За 3 часа 20 минут.

10.12. 15 км/час.

10.13. 198.

10.14. $x = -39$. Рассуждение: если a – первый член, а d – это разность прогрессии, то $x = a+6d$, $a+8d = 3$, $-6x = a+kd$, $k \in \mathbb{N}$. Теперь мы можем выразить x через k: $x = \frac{18-3k}{20-k}$. Поскольку по условию $x < -20$, то $\frac{3k-18}{k-20} < -20$, или $\frac{23k-418}{k-20} < 0$, откуда $18\frac{4}{23} < k < 20$, значит, $k = 19$.

10.15. Это числа 167; $2 \cdot 167 = 334$ и $187^2 = 27889$. Рассуждение: по условию $1000a + b = 3ab$, откуда $1000a = b(3a-1)$. Поскольку числа a и $3a-1$ не имеют общих делителей, то b должно делиться на a, пусть $b = ka$. В таком случае $1000 = k(3a-1)$. Покажите, что отсюда следует, что $k = 2$.

10.16. $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = a$, где $a = 0; \pm 2$. Нетрудно показать, что $(x_1 - x_2)(1 + x_3x_4) = 0$, значит, если $x_1 \neq x_2$, то необходимо $x_3x_4 = -1$, аналогичным образом, $x_4x_5 = -1$ и $x_5x_3 = -1$. Теперь придите к противоречию.

11. Логарифмическая и показательная функции

Оценки значений и их вычисление. Возрастание и убывание. Скорости роста. Преобразования. Задание множеств на плоскости – пропедевтика решения уравнений и неравенств. Определение при помощи соотношений аддитивности.

Обсуждение. В данном разделе мы рассмотрим свойства показательной функции $y = a^x$ и обратной к ней логарифмической функции $y = \log_a x$. В определенном смысле эти функции проще тригонометрических, поскольку они монотонны на всей своей области определения и между ними нет таких разнообразных соотношений, как между тригонометрическими функциями. Однако если поведение, к примеру, синуса достаточно хорошо отражает его график, то та часть графика, к примеру, $y = 2^x$, которую можно нарисовать на листке бумаги, не дает представления о поведении этой функции при больших по модулю значениях ее аргумента. Пример, когда картинка может спровоцировать ошибку, дан в задаче 11.14 (см. комментарий к ее решению). Далее, при решении логарифмических уравнений и неравенств приходится гораздо внимательнее следить за областью определения, так как практически всегда невозможно провести цепочку эквивалентных преобразований. В связи с этим обратите особое внимание на задачу 9.

То, что эти функции просты и естественны с математической точки зрения, следует из формулировки задачи 11: показательная функция однозначно определяется тем, что для нее верна формула $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ и она является непрерывной.

Надо четко представлять себе, что все свойства и соотношения, которые имеют место для логарифмической функции, следуют из соотношений для показательной функции. Обычно самые большие сложности представляют формулы, связывающие логарифмы с различными основаниями. Почему очевидно, что $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$? А потому, что

$$a^{\log_a b \cdot \log_b c} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b c} = b^{\log_b c} = c.$$

Далее доказанное соотношение можно еще записать в виде

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b},$$

который чаще всего и применяется при решении задач (см. задачу 5).

Сложность задач, в формулировке которых участвуют логарифм и экспонента, связана еще и с тем, что нам легко записать, что решением уравнения $2^x = 3$ является число $x = \log_2 3$, но всегда ли мы понимаем, что это за число – "логарифм от трех по основанию два"? Какое из чисел больше, $\log_2 3$ или $\log_3 4$? С ответов на подобные вопросы мы и начнем обсуждение свойств показательной и логарифмической функций.

Задача 1. Докажите, что: а) число $\log_2 3$ иррационально; б) $\log_2 3 > \log_3 4$.

а) Предположим, что $\log_2 3 = \frac{p}{q}$. По определению логарифма это означает, что $3 = 2^{\frac{p}{q}}$, или что $3^q = 2^p$, что невозможно, так как никакая натуральная степень тройки не является степенью двойки.

б) Так как $\log_3 4 = \frac{2}{\log_2 3}$, то надо доказать, что $\log_2 3 > \sqrt{2}$. Поскольку $3 > 2\sqrt{2}$, то $\log_2 3 > \frac{3}{2} > \sqrt{2}$.

Задача 2. а) Решите уравнение $3^{x-\frac{1}{2}} = 0,25^{x-1} + 2,5$. б) Решите неравенство $3^x + 4^x \leq 5^x$.

а) Ясно, что выражение, стоящее в левой части уравнения, определяет функцию, возрастающую на всей числовой оси, между тем как выражение, стоящее в его правой части, определяет убывающую функцию. Следовательно, более одного корня уравнение иметь не может. Подставив $x = \frac{3}{2}$, получим верное равенство.

б) При $x = 2$ получим верное равенство. Однако обе части данного неравенства являются возрастающими на всей оси функциями, поэтому применить соображение, связанное с монотонностью, так сразу не удается. Однако можно поделить обе части на 5^x, получив в результате неравенство $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq 1$, левая часть которого является убывающей функцией. Следовательно, ответ: $x \geq 2$.

Задача 3. а) Докажите, что при всех натуральных $n \geq 50$ верно неравенство $99^n + 100^n < 101^n$. б) Найдите наибольшее возможное значение c, при котором при всех натуральных n верно неравенство $2^n \geq cn^2$.

а) Данное неравенство показывает, что при больших степенях даже не слишком большое различие в основаниях выражений приводит к огромному отличию в результате. Вначале перепишем данное неравенство в виде: $(1,01)^n - (0,99)^n > 1$. Теперь воспользуемся разложением бинома Ньютона, в котором нам не важны значения никаких коэффициентов, кроме первого: $(1+x)^n = 1 + nx + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$. Значит,

$$(1+x)^{50} - (1-x)^{50} = 100x + 2c_3x^3 + \ldots + 2c_{99}x^{99}.$$

Подставив $x = 0,01$, получим требуемое неравенство. Кстати, наименьшим натуральным значением n, при котором оно справедливо, является $n = 49$, однако самый простой способ доказать это – поручить это сделать компьютеру.

б) Ясно, что искомое значение является просто наименьшим членом последовательности $x_n = \frac{2^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдем вначале точку, в которой достигается наименьшее значение функции $y = 2^x \cdot x^{-2}$, для чего вычислим ее производную:

$$\left(2^x \cdot x^{-2}\right)' = 2^x \ln 2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot 2^x \cdot x^{-3} = 2^x \cdot x^{-3}(x \ln 2 - 2),$$

значит, $x = 2\log_2 e$. Так как $2 < e < 4$, то $2 < 2\log_2 e < 4$, поэтому наименьшим членом последовательности является один из членов: $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{8}{9}$, $x_4 = 1$. Значит, $c = \frac{8}{9}$.

Можно было оценить $\log_2 e$ и поточнее, воспользовавшись неравенством $e < 2,8 < 2\sqrt{2}$, так что $2\log_2 e < 3$.

Следующая задача – в которой требуется решить систему показательных уравнений – на первый взгляд кажется несложной, тем более, что ее решение легко угадывается. Однако, как будет видно из ее решения, она не зря помещена в данный раздел.

Задача 4. Решите систему $2^x \cdot 3^y = 6$, $3^x \cdot 4^y = 12$.

Ясно, что пара $(x, y) = (1, 1)$ – решение, но почему нет других? Взяв логарифмы по основанию два от обеих частей каждого из уравнений, получим систему:

$$\begin{cases} x + y\log_2 3 = 1 + \log_2 3, \\ x\log_2 3 + 2y = 2 + \log_2 3. \end{cases}$$

После подстановки получим уравнение $(2 - \log_2^2 3)y = 2 - \log_2^2 3$.

Если коэффициент при y отличен от нуля, то решением является только $y = 1$. Однако почему вдруг $\log_2^2 3 \neq 2$? То, что это действительно так, доказано ранее (задача 16), но доказать это было необходимо!

Задача 5. Найдите промежутки возрастания и убывания функций: а) $f(x) = \frac{3^x - 3^{1-x}}{3^x - 3^{-x}}$; б) $f(x) = \log_{2x^2} 4x$.

Вторую функцию еще надо суметь продифференцировать! Однако не надо вычислять производную и первой функции.

а) Имеем: $\frac{3^x - 3^{1-x}}{3^x - 3^{-x}} = \frac{3^{2x} - 3}{3^{2x} - 1}$, таким образом, $f(x) = g(3^{2x})$, где $g(t) = \frac{t-3}{t-1} = 1 - \frac{2}{t-1}$. Поскольку функция $y = 3^{2x}$ возрастает на всей числовой оси, а функция g возрастает на каждом из лучей $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$, то функция f возрастает на каждом из лучей $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

б) Выразим данную функцию через $\log_2 x$. Имеем

$$\log_{2x^2} 4x = \frac{\log_2 4x}{\log_2 2x^2} = \frac{\log_2 x + 2}{2\log_2 x + 1} = \frac{t+2}{2t+1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(2t+1)},$$

таким образом, $f(x) = g(\log_2 x)$, где $g(t) = \frac{t+2}{2t+1}$. Значит, f убывает на интервале $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и на луче $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

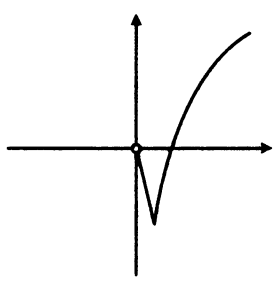
Задача 6. а) Решите уравнение $x-1+\log_3 x = \log_3(2x+2)$. б) Постройте график $y = |\log_2 x + 2x| + \log_2 x - 2x$.

а) Областью определения данного уравнения является луч $(0; +\infty)$. Преобразуем уравнение к виду $x - 1 = \log_3\left(2 + \frac{2}{x}\right)$. Теперь ясно, что более одного решения уравнение иметь не может, так как выражение, стоящее в его левой части, определяет убывающую на $(0; +\infty)$ функцию. Решение $x = 2$ легко угадывается.

б) Прежде всего надо записать данное выражение без модуля. Важно, что функция $f(x) = \log_2 x + 2x$ возрастает на всей своей области определения – луче $(0; +\infty)$, при этом ясно, что $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Значит, значение $\log_2 x + 2x$ является отрицательным при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ и является положительным при $x > \frac{1}{2}$, следовательно,

$$y = \begin{cases} -4x & \text{при } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right], \\ 2\log_2 x & \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \end{cases}$$

график – на рисунке.



Задача 7. Найдите значения: а) $\log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 8$; б) $\frac{\log_2 3}{\log_{24} 2} - \frac{\log_2 12}{\log_6 2}$; в) $2^{\log_5 3} - 3^{\log_5 2}$.

а) Данное произведение, в силу стандартных соотношений между логарифмами, равно $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

б) Давайте для удобства введем обозначение $a = \log_2 3$. Имеем, $\frac{\log_2 3}{\log_{24} 2} = \log_2 3 \cdot \log_2(2^3 \cdot 3) = a(a+3)$. В результате мы получим выражение $a(a+3) - (a+2)(a+1) = -2$.

в) Поскольку $2^{\log_5 3} = 5^{\log_5 2 \log_5 3}$ и $3^{\log_5 2} = 5^{\log_5 3 \log_5 2}$, то данное число равно нулю.

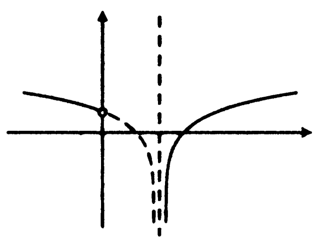
Обратите внимание, что при использовании стандартной формулы $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$, в случае, когда a, b, c являются некоторыми выражениями, следует соблюдать осторожность, так как при этом может изменяться область определения данного выражения. Нельзя писать, что $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, поскольку левая часть этого равенства определена при всех $x \neq 0$, тогда как правая – только при $x > 0$.

Задача 8. Постройте график $y = \log_2(x^2 - 3x) - \log_4 x^2$.

Областью определения данной функции является объединение лучей $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Поскольку $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$, то

$$y = \begin{cases} \log_2(3-x) & \text{при } x \in (-\infty; 0), \\ \log_2(x-3) & \text{при } x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

Графики $y = \log_2(3-x)$ и $y = \log_2(x-3)$ симметричны относительно прямой $x = 3$, однако на первом из них следует взять только ту его часть, где $x < 0$ (рисунок).



На примере решений следующей задачи будут хорошо видны сложности, возникающие при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Задача 9. Изобразите на плоскости множество, заданное следующим уравнением (неравенством):

а) $\log_x y = \log_y x$; б) $\log_{y^2-1} x = \log_{1-y} x$; в) $\log_x xy \le 2$;
г) $x^y = x^{2-y}$; д) $x^{y-1} \ge 1$.

а) Так как $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$, то $\log_x^2 y = 1$, значит, $\log_x y = \pm 1$, откуда $y = x$ или $y = \frac{1}{x}$. Осталось заметить, что $x, y > 0$ и $x, y \ne 1$ (рисунок *а*).

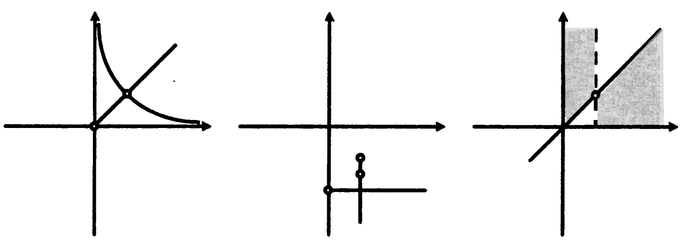
б) Чтобы не сделать стандартную ошибку, введем логарифмы по постоянному основанию, к примеру по основанию 2. Имеем,

$$\frac{\log_2 x}{\log_2(y^2-1)} = \frac{\log_2 x}{\log_2(1-y)},$$

откуда $\log_2 x = 0$ или $\log_2(y^2-1) = \log_2(1-y)$, таким образом, $x = 1$ или $y = -2$ (решение $y = 1$ нас не устраивает). Теперь осталось найти область определения данного уравнения. Ясно, что $x > 0$. Условия на переменную y более сложны:

$$\begin{cases} y^2 - 1 > 0, \\ 1 - y > 0, \\ y^2 - 1 \ne 1, \\ 1 - y \ne 1, \end{cases}$$

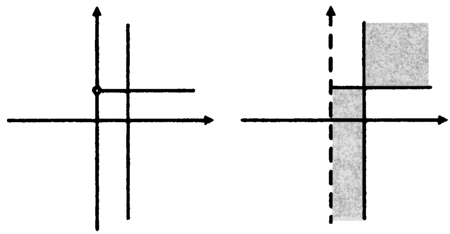
значит, $y \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1)$. Ответ на рисунке *б*.



а *б* *в*

в) Рассмотрим два случая. Если $x \in (0; 1)$, то получаем неравенство $xy \ge x^2$, или $y \ge x$. Если $x > 1$, то $xy \le x^2$, или $y \le x$, при этом необходимо ввести условие $y > 0$. Ответ на рисунке *в*.

г) Прологарифмировав данное уравнение по основанию 2, получим, что $y\log_2 x = (2-y)\log_2 x$, откуда $\log_2 x = 0$ или $y = 2-y$, значит, $x = 1$ или $y = 1$. Учтем, что $x > 0$ (рисунок *г*).



г *д*

д) Аналогично предыдущему, $(y-1)\log_2 x \geq 0$, значит, $y \geq 1$ и $x \geq 1$ или $y \leq 1$ и $0 < x \leq 1$ (рисунок *д*).

Будет очень поучительно проследить за тем, как будут меняться ответы при небольшом изменении условия. К примеру, вместо неравенства в) можно записать $\log_{x^2} xy \leq 1$ или $\log_{xy} x \geq 2$ и т. д.

Задача 10. а) Найдите все c, при которых функция $f(x) = \log_a(x+\sqrt{x^2+c^2})$ является нечетной. б) Напишите формулу для функции, обратной к $f(x) = \log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

а) По условию, $f(-x) = -f(x)$, таким образом,

$$\log_a(-x+\sqrt{x^2+c^2}) = -\log_a(x+\sqrt{x^2+c^2}),$$

откуда $(-x+\sqrt{x^2+c^2})(x+\sqrt{x^2+c^2}) = 1$, или $c^2 = 1$.

б) Для того чтобы найти выражение для функции, обратной к данной, надо решить уравнение $\log_2(x+\sqrt{x^2+1}) = y$.

Имеем, $x+\sqrt{x^2+1} = 2^y$, или $\sqrt{x^2+1} = 2^y - x$. Возведя в квадрат, получим уравнение $x^2+1 = 2^{2y} - 2x\cdot 2^y + x^2$, или $x = \frac{2^y-2^{-y}}{2}$. Осталось проверить, что выполнено неравенство $x \leq 2^y$. Действительно, $\frac{2^y-2^{-y}}{2} \leq 2^y$, поскольку $2^{2y} \geq -1$. Таким образом, обратной к f является функция $g(x) = \frac{2^x-2^{-x}}{2}$.

Смысл следующей задачи состоит в том, что соотношение $a^{x+y} = a^x\cdot a^y$ определяет показательную функцию.

Задача 11. Предположим, что заданная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция f такова, что $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что:

а) если $f(x_0) = 0$, то $f(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

б) если $f \not\equiv 0$, то $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, причем $f(0) = 1$;

в) $f(n) = \big(f(1)\big)^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

г) $f(k) = \big(f(1)\big)^k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$;

д) $f\big(\frac{p}{q}\big) = \big(f(1)\big)^{\frac{p}{q}}$ при всех $p, q \in \mathbb{Z}$;

е) $f(x) = a^x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

а) Если $f(x_0) = 0$, то

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)\cdot f(x_0) = 0.$$

б) Имеем, $f(x) = f\big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\big) = \big(f\big(\frac{x}{2}\big)\big)^2 > 0$. Далее,

$$f(x) = f(x+0) = f(x)\cdot f(0),$$

откуда $f(0) = 1$, так как $f(x) \neq 0$.

в) Имеем, $f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = \big(f(1)\big)^n$.

г) Для $k \in \mathbb{N}$ утверждение уже доказано. Пусть $k = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем, $1 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n)\cdot f(k)$, откуда $f(k) = (f(n))^{-1} = (f(1))^{-n} = (f(1))^k$.

д) Пусть $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Так как $\big(f\big(\frac{p}{q}\big)\big)^q = f(p) = (f(1))^p$ и поскольку все значения положительны, то $f\big(\frac{p}{q}\big) = \big(f(1)\big)^{\frac{p}{q}}$.

е) Рассмотрим последовательность рациональных чисел, стремящуюся к x: $\frac{p_n}{q_n} \to x$. Имеем, $f\big(\frac{p_n}{q_n}\big) = \big(f(1)\big)^{\frac{p_n}{q_n}} \to (f(1))^x$. Так как по условию функция f непрерывна, то $f\big(\frac{p_n}{q_n}\big) \to f(x)$, откуда и следует искомое равенство.

После того как было доказано, что все значения данной функции положительны, можно было поступить по-другому. Давайте рассмотрим функцию $g(x) = \ln f(x)$, соотношение аддитивности для которой имеет более простой вид, именно:

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)\cdot f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y)\ !$$

Среди непрерывных функций таковыми являются только линейные, $g(x) = kx$. Однако существуют, так сказать, "парадоксальные" аддитивные функции. Другое дело, что никакой формулы для них написать нельзя, а можно лишь доказать их существование. Кстати, существование таких функций используется при доказательстве того, что равновеликость многогранников не равносильна их равносоставленности.

Наконец, как нетрудно видеть, логарифмическая функция может быть определена следующими двумя своими свойствами: а) непрерывностью на $(0; +\infty)$; б) соотношением $g(xy) = g(x) + g(y)$.

Задача 12. Решите уравнения:
а) $\log_5 \log_3 \log_2 x = 0$; б) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{1}{6}$; в) $x^x = x^{x^2-2}$.

а) Имеем,

$$\log_5 \log_3 \log_2 x = 0 \iff \log_3 \log_2 x = 1 \iff$$
$$\iff \log_2 x = 3 \iff x = 8.$$

б) Поскольку $\log_4 x = \frac{1}{2}\log_2 x$ и $\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x$, то мы получим уравнение $\log_2 x = \frac{1}{11}$, откуда $x = \sqrt[11]{2}$.

в) По определению, $x > 0$. Рассмотрим логарифмы обеих частей: $x \ln x = (x^2 - 2)\ln x$, или $(x^2 - x - 2)\ln x = 0$, откуда $x = 1$ или $x^2 - x - 2 = 0$. Из корней квадратного уравнения нам подходит только $x = 2$. Ответ: $x = 1; 2$.

Задача 13. Вычислите $-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}$.

Это известная задача-шутка на тему: как записать любое натуральное число при помощи трех двоек. Выражение под логарифмом равно $2^{\frac{1}{2^n}}$, его логарифм равен $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$, значит, все данное выражение равно $-(-n) = n$.

Задача 14. Определите число корней уравнения $x^x = a$ зависимости от значения a.

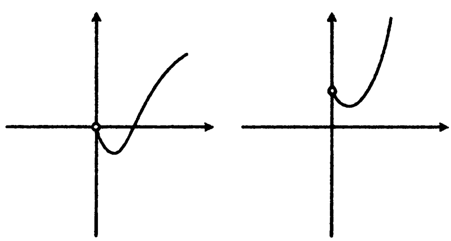
При $a \leq 0$ уравнение не имеет решений. Запишем уравнение в виде $x \ln x = \ln a$ и исследуем функцию $f(x) = x \ln x$. Имеем,

$f'(x) = \ln x + 1$, значит, f убывает на интервале $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ и возрастает на луче $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$. Ясно, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Осталось выяснить поведение этой функции при $x \to 0$, что сразу не очевидно, так как при этом $\ln x \to -\infty$. Проще всего воспользоваться правилом Лопиталя, для чего запишем нашу функцию в виде $f(x) = \frac{\ln x}{x^{-1}}$. Имеем:

$$\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x \to 0,$$

значит, $f(x) = x \ln x \to 0$. Изобразим графики $y = x \ln x$ и $y = x^x$ (рисунки *а* и *б*, соответственно), подсчитав при посредстве калькулятора или компьютера значения этих функций в точке минимума. Имеем,

$$-\frac{1}{e} \approx -0{,}3679 \quad \text{и} \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} \approx 0{,}6922.$$



а *б*

Таким образом, данное уравнение имеет одно решение при $a \geq 1$ и $a = e^{-\frac{1}{e}}$; имеет два решения при $a \in \left(e^{-\frac{1}{e}}; 1\right)$.

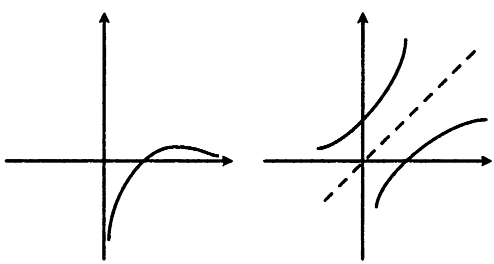
Задача 15. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение:

а) уравнение $a^x = x$; б) система $\begin{cases} y = a^x, \\ x = a^y. \end{cases}$

а) Решение единственно, если, к примеру, $a = 1$. Далее, если $0 < a < 1$, то решение также единственно, поскольку функция $y = a^x - x$ является убывающей. Теперь предположим, что

$a > 1$. Так как решения уравнения $a^x = x$ положительны, то оно равносильно уравнению $\frac{\ln x}{x} = \ln a$. Исследуем функцию $y = \frac{\ln x}{x}$. Имеем $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, значит, $x = e$ является точкой максимума. Из графика $y = \frac{\ln x}{x}$ (рисунок *а*) очевидно, что уравнение $\frac{\ln x}{x} = \ln a$ имеет единственное решение, если $\ln a = \frac{1}{e}$ или же $\ln a \leq 0$, т. е. при $a = e^{\frac{1}{e}}$ и при $a \in (0; 1]$.

б) Поскольку вместе с решением (x_0, y_0) пара (y_0, x_0) также является решением данной системы, то ее единственное решение должно лежать на прямой $y = x$. Значит, уравнение $a^x = x$ должно иметь единственное решение. Однако найденные нами в предыдущем пункте условия на a лишь необходимы для того, чтобы данная система имела единственное решение! Пока доказано, что при найденных значениях параметра a каждое из множеств $y = a^x$ и $x = a^y$ имеет единственную общую точку с прямой $y = x$. Но почему они не могут иметь и другие точки пересечения (не лежащие на этой прямой)?

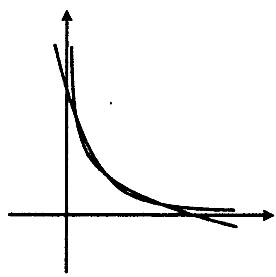


а *б*

Рассмотрим вначале более простой случай $a > 1$. Если $a > e^{\frac{1}{e}}$, то $\frac{\ln x}{x} < \ln a$ при всех $x > 0$, значит, $x < a^x$ и $\log_a x < x$, поэтому $\log_a x < a^x$ при всех $x > 0$ (рисунок *б*). Следовательно, уравнение $\log_a x = a^x$, равно как и данная система, решений не имеет. При $a = e^{\frac{1}{e}}$ имеем $\log_a x \leq a^x$, причем равенство имеет место только при $x = e$, значит, $(x, y) = (e, e)$ – это и есть единственное решение данной системы.

Случай $a \in (0; 1)$ более загадочен. Обозначим через c (единственное) решение уравнения $a^x = x$ и предположим, что

$a^c \ln a < -1$, т. е. касательная к графику функции $y = a^x$ в точке его пересечения с прямой $y = x$ расположена круче прямой $y = -x$. Тогда при x, меньших c и близких к нему, кривая $x = a^y$ будет располагаться под кривой $y = a^x$ (рисунок), следовательно, на интервале $(0; c)$ эти кривые будут иметь точку пересечения. Таким образом, система имеет по крайней мере три решения, если $c > -\frac{1}{\ln a}$, т. е. при $a^{-1/\ln a} > -\frac{1}{\ln a}$, или $a < e^{-e}$.



Теперь докажем, что при $a \in [e^{-e}; 1]$ решение единственно, для чего нам достаточно убедиться в том, что функция $g(x) = a^{-x} \log_a x$ является строго убывающей. Имеем,

$$g'(x) = -a^{-x} \ln a \cdot \log_a x + \frac{a^{-x}}{x \ln a} =$$
$$= -a^{-x} \ln x + \frac{a^{-x}}{x \ln a} = \frac{a^{-x}\left(\frac{1}{\ln a} - x \ln x\right)}{x}.$$

В решении задачи 14 было доказано, что наименьшее значение функции $x \ln x$ достигается при $x = \frac{1}{e}$ и равно $-\frac{1}{e}$. Следовательно, $g'(x) \leq 0$, если $\frac{1}{\ln a} - x \ln x \leq \frac{1}{\ln a} + \frac{1}{e} \leq 0$, что имеет место, если $\frac{1}{\ln a} \leq -\frac{1}{e}$, или $a \geq e^{-e}$. Причем при $a = e^{-e}$ производная $g'(x)$ равна нулю только в одной точке, значит, функция g строго убывает.

Итак, ответ: система имеет одно решение при $a = e^{1/e}$ и $a \in [e^{-e}; 1]$.

Справочник

Функция $y = a^x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$, если $a > 0$. Основными ее свойствами являются

$a^0 = 1$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$(a^x)^y = a^{xy}$

Естественно ее рассматривать при $a \neq 1$, так как в противном случае $y = 1$ при всех x. Данная функция строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает, если $0 < a < 1$.

Функция $y = \log_a x$ по определению является обратной к $y = a^x$; это означает, что

$$a^c = b \iff c = \log_a b, \text{ другими словами, } a^{\log_a b} = b.$$

Если $x = \log_a b$ и $y = \log_a c$, то $bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, значит, $x + y = \log_a bc$, таким образом основное соотношение

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

для логарифмов равносильно соотношению $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ для показательной функции.

Обратите внимание, что это равенство имеет место в предположении, что $b, c > 0$. При решении задачи 8 уже было показано, что при использовании данного соотношения может меняться область определения выражения. Поэтому давайте перепишем его более точно, хотя и более громоздко

$$\log_a bc = \begin{cases} \log_a b + \log_a c, & \text{если } b, c > 0, \\ \log_a(-b) + \log_a(-c), & \text{если } b, c < 0. \end{cases}$$

В предисловии уже была доказана формула, связывающая логарифмы с различными основаниями, для полноты приведем ее и здесь:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b, \text{ или } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Из этой формулы и очевидных равенств вида $\log_a a^p = p$ следуют все основные соотношения для логарифмов. К примеру, положив $c = b$, получим, что $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Далее, $\log_a b^p = \frac{\log_b b^p}{\log_b a} = \frac{p}{\log_b a} = p\log_a b$. Конечно, автор никоим образом не советует объяснять эти равенства подобным образом, однако поупражняться в подобных доказательствах будет полезно.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Вычислите: а) $\log_{0,5} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{5}} 7 \cdot \log_{49} 8$;
б) $\log_{1/7} \frac{49}{7-2\sqrt{6}} + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{6}-1}$; в) $25^{\log_{125} 9 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 2}$;
г) $\frac{\log_3 54}{\log_{18} 3} - \frac{\log_3 486}{\log_2 3}$.

11.2. Упростите: а) $a^{\log_2 a} : 2^{\log_2^2 a}$; б) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$;
в) $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a - 2\log_{c+b} a \log_{c-b} a$, если a, b – это длины катетов прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза.

11.3. Выразите: а) $\log_2 3$; б) $\log_{12} 54$ через $a = \log_6 18$.

11.4. Докажите неравенства: а) $2,25 < \log_2 5 < 2,5$;
б) $\log_2 3 + \log_3 4 < 3$; в) $\log_2 3 + \log_3 8 > 3$.

11.5. Расположите в порядке возрастания числа:
а) $\sqrt{10}$, $2^{\sqrt{2}}$ и $\log_2 10$; б) $\log_2 5$, $\log_3 8$ и $\log_5 32$.

11.6. Найдите наибольшее c, при котором при всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $2^n \geq cn^3$.

11.7. Найдите условия на a, b, c, при выполнении которых при всех $n \in \mathbb{N}$ существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n.

11.8. Докажите неравенство

$$\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 2 \ln 3 \ln 5 < 1 + \ln 2 \ln 3 + \ln 3 \ln 5 + \ln 2 \ln 5.$$

11.9. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением (неравенством): а) $\log_x^2 y = \log_x y$;

б) $\log_{x+y} x^2 = \log_{x-y} x^2$; в) $\log_{x+y}(x-y) \le 1$;

г) $(x+y)^{x-y} \ge 1$.

11.10. Решите: а) уравнение $3^{2x} = 2^{2x} + 2^x + 3^x$;
б) неравенство $|\log_2 x| \ge 2x$.

11.11. Изобразите эскиз графика: а) $y = \log_2^2 x$;

б) $y = |\log_2 2x| + \log_2 x$; в) $y = \log_2(2^x - 1)$.

11.12. Решите: а) уравнение $\log_x(3-2^x)^2 = 0$;
б) неравенство $\log_2(2^x - 1) \le x - 1$;

в) систему $\begin{cases} 2^{x+2} + \log_3 \sqrt{y} = 1, \\ 2^{x+1} + \log_{\frac{1}{3}} y = 3. \end{cases}$

11.13. Докажите, что $\log_{50} 2 + \log_{50} 3 + \ldots + \log_{50} 98 < 97$.

11.14. а) Определите число корней уравнения $x^6 = 6^x$.
б) Найдите все рациональные корни этого уравнения.

11.15. Решите неравенство $\log_{x^2-3}(x^2+6x) < \log_x(x+2)$.

Комментарии и советы

11.1. См. задачу 7.

11.2. Во всех примерах перейдите к одному основанию.

11.3. Легко выразить a через $\log_2 3$.

11.4. а) Нетрудно сравнить логарифм с целым числом.
б, в) Перед вами квадратные неравенства.

11.5. Сравните данные числа с рациональными.

11.6. См. задачу 3б.

11.7. Если число a больше b и c, то может ли при всех $n \in \mathbb{N}$ быть верным неравенство $a^n < b^n + c^n$? Ср. с задачей 2б.

11.8. Будет удобно ввести обозначения для всех логарифмов.

11.9. Будьте внимательны; см. задачу 9.

11.10. а) См. задачу 2б. б) Вам придется доказать то, что с наглядной точки зрения очевидно.

11.11. а) В чем отличие данного графика от графика $y = |\log_2 x|$? б) Раскройте модуль. в) Найдите асимптоту графика.

11.12. а, б) Не забудьте про область определения. в) Собственно говоря, перед вами система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

11.13. Логарифмическая функция является выпуклой вверх.

11.14. Графики вам могут "подсказать" неверный ответ.

11.15. Область определения данного неравенства состоит из двух частей, на одной из которых оно очевидным образом верно, а на другой – очевидно неверно.

Ответы и комментарии

11.1. а) $-\frac{9}{2}$. б) -2. в) 16. г) 6.

Не стоит слишком увлекаться подобными задачами. Можно дать такой совет: требуйте от учеников решать их как можно более экономно, чтобы почти все необходимые преобразования были сделаны сразу. К примеру, задачу в) можно решить таким образом: $5^{\frac{4}{3}\cdot 3\log_5 3\log_3 2} = 2^4 = 16$.

11.2. а) 1. б) 0. в) 0. Основная мысль в решениях примеров а, б состоит в том, чтобы записать a в виде, к примеру, $2^{\log_2 a}$. В примере в) следует перейти к логарифмам по какому-нибудь одному основанию; чтобы было проще писать, рассмотрите натуральные или десятичные логарифмы.

11.3. а) $\log_2 3 = \frac{a-1}{2-a}$. б) $\log_{12} 54 = \frac{2a-1}{3-a}$.

Пример, с одной стороны, неудачный, так как зачем это вдруг надо выражать $\log_2 3$ через $\log_6 18$, когда естественнее поступить наоборот. Однако если нам легко выразить a через b, то нетрудно выразить и b через a.

11.4. а) Очевидно, что $9 < \log_2 625 < 10$. б, в) Положите $a = \log_2 3$; ясно, что это число лежит в интервале $(1; 2)$.

11.5. а) $2^{\sqrt{2}}, \sqrt{10}, \log_2 10$. Покажите, что $2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} < 3$. Далее, $\log_2 10 > 3,25 > \sqrt{10}$. б) $\log_3 8, \log_5 32, \log_2 5$. Очевидно, что $\log_3 8 < 2$, так что это число заведомо является наименьшим. Далее, имеем $\log_2 5 > 2,25 > \sqrt{5}$.

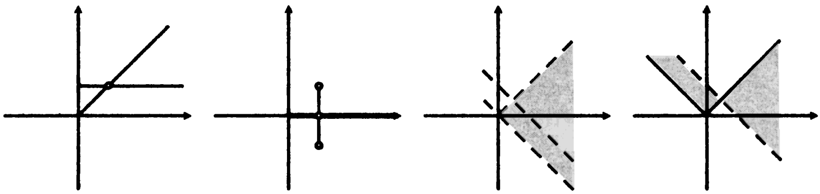
Естественный вопрос: зачем нам такие примеры в наш компьютерный век? Отвечу: как и предыдущие примеры – это упражнения на использование определений математических понятий.

11.6. $c = \frac{1}{4}$, так что $2^n \geq \frac{1}{4}n^3$ при всех натуральных n. Точкой минимума функции $x^{-3}2^x$ будет $x = 3\log_2 e \in \left(3; \frac{9}{2}\right)$, так что наименьшее значение последовательности $x_n = \frac{2^n}{n^3}$ надо искать среди ее членов с номерами $3, 4, 5$.

11.7. Если $a > b \geq c$, то найдется такое натуральное число n, что $1 > \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n$, таким образом, из отрезков длин a^n, b^n и c^n треугольник составить не удастся. Значит, $a = b \geq c$, таким образом, все треугольники – равнобедренные.

11.8. Если положить $a = \ln 2$, $b = \ln 3$ и $c = \ln 5$, то нетрудно разложить на множители разность обеих частей данного неравенства. Затем воспользуйтесь неравенствами $\ln 2 < 1 < \ln 3 < \ln 5$.

11.9. Ответы – на рисунках.

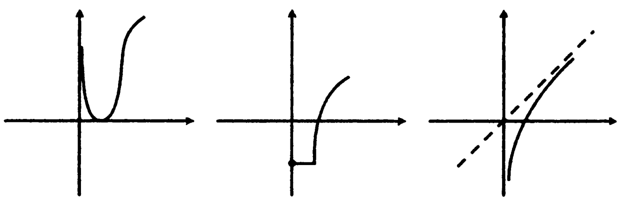


а *б* *в* *г*

11.10. а) Запишите уравнение в виде $1 = \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Ответ: $x = 1$. б) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Из картинки ясно, что $\log_2 x < 2x$ при $x \geq 1$, однако "очевидно то, что очень легко доказать".

Проведите конкурс на самое простое доказательство этого неравенства. В отличие от задач, в которых схема рассуждения стандартна, в данном случае должно появиться много разных решений.

11.11. Ответы – на рисунках.



а *б* *в*

а) Смысл задачи в том, что искомый график (в отличие от графика модуля) является гладкой кривой. Кстати, "гладкая функция (кривая)" – это "дифференцируемая".

б) Надо просто раскрыть модуль. В результате получим, что

$$y = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right], \\ 2\log_2 x + 1 & \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

в) Прямая $y = x$ является асимптотой графика, поскольку $\log_2(2^x - 1) - x = \log_2(1 - 2^{-x}) \to 0$ при $x \to +\infty$.

11.12. а) $x = 2$. б) $x \in (0;1]$. в) $(x,y) = \left(-1, \frac{1}{9}\right)$. Смысл задачи состоит в том, чтобы воспользоваться правильно и точно определением и свойствами логарифма. Например, в уравнении а): $|3 - 2^x| = 1$, при этом $x > 0$ и $x \neq 1$. Таким образом, $2^x = 2; 4$, поэтому $x = 1; 2$, однако $x = 1$ не входит в область определения исходного уравнения.

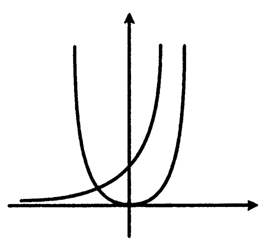
в) В результате замены $u = 2^x$ и $v = \log_3 y$ получим линейную систему $4u + \frac{v}{2} = 1$, $2u - v = 3$, откуда $u = \frac{1}{2}$, $v = -2$.

11.13. Так как $\frac{\log_a b + \log_a c}{2} \leq \log_a \frac{b+c}{2}$, то

$$\log_{50} 2 + \log_{50} 98 \leq 2\log_{50} 50 = 2.$$

Аналогично, $\log_{50} 3 + \log_{50} 97 \leq 2$, и так далее.

11.14. На следующем рисунке изображены те дуги графиков $y = x^6$ и $y = 6^x$, которые только и можно нарисовать на листочке бумаги. Из этой картинки кажется, что данное уравнение имеет только один корень.



Однако ясно, что одним из корней является $x = 6$! Изобразить соответствующую точку пересечения на рисунке будет трудно, так как $6^6 = 46656$. Логарифмы, в частности, и применяются для того, чтобы исследовать поведение функций, растущих очень быстро.

Ясно, что данное уравнение имеет ровно один отрицательный корень. При $x > 0$ перейдем к равносильному уравнению $6\ln x = x\ln 6$, или $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 6}{6}$. График $y = \frac{\ln x}{x}$ уже был нарисован при решении задачи 15. Таким образом, данное уравнение имеет три корня: один отрицательный и два положительных, в том числе $x = 6$.

б) Только $x = 6$ является рациональным корнем данного уравнения. Действительно, если корень x является рациональным числом, то рационально x^6, значит, рациональна степень 6^x. Однако $6^{\frac{p}{q}}$ рационально, только если показатель степени – целое число. Осталось проверить, что ни одно из чисел $2, 3, 4, 5$ не является корнем данного уравнения.

11.15. Если $x \in (\sqrt{3}; 2)$, то $\log_{x^2-3}(x^2 + 6x) < 0 < \log_x(x + 2)$. Если $x > 2$, то

$$\log_x(x + 2) = \log_{x^2}(x^2 + 4x + 4) < \log_{x^2-3}(x^2 + 6x),$$

так как $x^2 > x^2 - 3$ и $x^2 + 4x + 4 < x^2 + 6x$.
Ответ: $x \in (\sqrt{3}; 2)$.

12. Логарифмические и показательные уравнения, системы, неравенства

Замены в показательных и логарифмических уравнениях. Разложение на множители и решение неравенств. Графическая интерпретация при решении уравнений с параметрами. Исследование области определения. Комбинации известных методов решения уравнений и неравенств.

Обсуждение. По-существу, все, что надо знать про показательную и логарифмическую функции, было приведено в предыдущем разделе. Однако приходится учить(ся) решению соответствующих уравнений и неравенств, к которым можно отнести те же слова, которые были сказаны про тригонометрические уравнения. Произвольно заданное уравнение, каким бы простым оно с виду не было, “решить” с точки зрения школьной математики невозможно. Например, уравнение $2^x + 3^x = 4$. Да, конечно, оно имеет единственное решение, лежащее в интервале $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, но никакой явной формулы для него написать нельзя, хотя можно найти приближенное решение этого уравнения, причем с любой наперед заданной точностью, для чего, конечно, в наше время следует использовать компьютер. С другой стороны, нетрудно видеть, что единственным решением уравнения $2^x + 3^x = 5$ является $x = 1$ (см. задачу 2 предыдущего раздела).

Другое дело, что те уравнения, которые предлагают учащимся, решить можно при помощи одних и тех же стандартных методов: замены переменной, разложения на множители, или же посредством исследования поведения соответствующих функций. Однако иногда, чтобы замену увидеть, уравнение надо преобразовать, таким образом, нужно учиться смотреть на шаг вперед. Дополнительная сложность при решении логарифмических уравнений связана с тем, что при переходе от уравнения $\log_a b = \log_a c$ к уравнению $b = c$ необходимо иметь в виду, что числа (выражения) a, b и c должны лежать в области определения логарифмической функции: $a, b, c > 0$, $a \neq 1$. Таким образом, речь идет о решении уравнений с дополнительными ограничениями на значение переменной, причем эти ограничения вводятся на основе анализа данного уравнения. Задача состоит в том, чтобы научить(ся) использовать их наиболее разумным образом, не засоряя проводимое рассуждение условиями-следствиями (см., к примеру, решения задач 4 и 7). С прагматической точки зрения, надо привыкнуть к тому, что очень часто формулировка задачи содержит ловушку (задачи 6 и 11).

Задача 1. Решите уравнения:

а) $4^x - 2^{x+1} = 3$; б) $x^{\log_2 x} = 16$.

а) Конечно, в данной задаче надо сделать замену $t = 2^x$, так что $4^x = 2^{2x} = t^2$ и $2^{x+1} = 2t$. Из уравнения $t^2 - 2t - 3 = 0$ следует, что $t = -1; 3$. Следующий шаг состоит в том, чтобы вернуться к старой переменной: имеем, $2^x = -1$ или $2^x = 3$. Первое уравнение решений не имеет, из второго получим, что $x = \log_2 3$. Конечно, можно было сразу, после того как сделана замена, написать, что $2^x = t > 0$, откинув решение $t = -1$, как не имеющее отношения к делу.

б) Такое, так называемое “показательно-логарифмическое” уравнение надо сразу свести к логарифмическому, взяв логарифм по основанию 2 от обеих его частей. Получим, что $\log_2 x \cdot \log_2 x = 4$, или $\log_2^2 x = 4$, откуда $\log_2 x = \pm 2$, так что $x = 4; \frac{1}{4}$.

Задача 2. Решите неравенства:

а) $\dfrac{3^{x+1} + 5^{x-1}}{5^x - 3^x} \geq 2$; б) $x \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + 2^x \geq 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^x$.

а) Левая часть данного неравенства является однородной функцией относительно $a = 5^x$ и $b = 3^x$, поэтому в нем можно сделать замену $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$. Имеем,

$$\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} = \frac{3\cdot 3^x + \frac{1}{5}\cdot 5^x}{5^x-3^x} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x+3}{\left(\frac{5}{3}\right)^x-1} = \frac{t+15}{5(t-1)}.$$

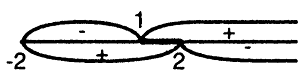
В результате естественных преобразований получим неравенство $\frac{9t-25}{t-1} \le 0$, откуда $1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x \le \left(\frac{5}{3}\right)^2$, значит, $x \in (0;2]$.

б) Произведем разложение на множители,

$$x\cdot 2^{\sqrt{x+2}} + 2^x - 2^{\sqrt{x+2}} - x\cdot 2^x = (x-1)\left(2^{\sqrt{x+2}} - 2^x\right).$$

Теперь определим знак второй скобки, для чего решим неравенство $2^{\sqrt{x+2}} \ge 2^x$, равносильное неравенству $\sqrt{x+2} \ge x$, решением которого является отрезок $[-2;2]$.

Чтобы не запутаться в дальнейшем рассуждении, поступим следующим образом. Отметим на числовой прямой, на дугах, лежащих выше нее, знаки первой скобки, на дугах ниже прямой – знаки второй (рисунок).



Осталось выбрать те промежутки, на которых знаки обоих сомножителей совпадают. Ответ: $x \in [1;2]$.

Задача 3. Решите уравнения:

а) $\dfrac{1}{\log_{8x} 2x} = \log_2 2x$; б) $\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.

а) Естественно сделать замену $t = \log_2 x$. Имеем,

$$\log_{8x} 2x = \frac{\log_2 2x}{\log_2 8x} = \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x + 3} = \frac{t+1}{t+3},$$

в частности, $t \ne -3$. В результате преобразований получим уравнение $\frac{t+3}{t+1} = t+1$, или $t^2+t-2=0$, откуда $t=-2;1$. Значит, $\log_2 x = -2$ или $\log_2 x = 1$, таким образом, $x = \frac{1}{4}; 2$.

Однако если бы в результате решения мы получили бы значение $t = -1$, то оно не являлось бы решением, поскольку оно не входит в область определения выражения $\left(\frac{t+3}{t+1}\right)^{-1}$!

б) Данное уравнение является однородным относительно $a = \lg(x+1)$ и $b = \lg(x-1)$. Имеем, $a^2 - ab - 2b^2 = (a+b)(a-2b)$, откуда $a = -b$ или $a = 2b$. Таким образом, $\lg(x+1) = -\lg(x-1)$ или $\lg(x+1) = 2\lg(x-1)$. В первом случае $x + 1 = \frac{1}{x-1}$, или $x^2 = 2$, во втором $x + 1 = (x-1)^2$, или $x^2 - 3x = 0$. Значит, $x = \pm\sqrt{2}$ или $x = 0; 3$. Однако полученные квадратные уравнения являются лишь следствиями исходного уравнения. Его область определения – это луч $(1; +\infty)$, значит, ответ: $x = \sqrt{2}; 3$.

С областью определения следует обращаться более деликатно при решении неравенств.

Задача 4. Решите неравенства:

а) $\dfrac{1}{\log_{0,5}(x^2 - x)} > -1$; б) $|1 - \log_3(x+2)| + \log_{\frac{1}{9}} x \leq 0$.

а) Разумно перейти к основанию 2, воспользовавшись тождеством $\log_{0,5}(x^2 - x) = -\log_2(x^2 - x)$, и далее переписать неравенство в виде $\frac{1}{\log_2(x^2-x)} < 1$. К сожалению, у многих учащихся следующий шаг оказывается ошибочным. Для того чтобы его не сделать, сделаем замену $t = \log_2(x^2 - x)$. Полученное неравенство $\frac{1}{t} < 1$ решим по-честному. Имеем, $1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} > 0$, откуда $t < 0$ или $t > 1$.

Неравенство $t < 0$ означает, что $\log_2(x^2 - x) < 0$, что имеет место при $0 < x^2 - x < 1$. Решив систему квадратных неравенств, получим, что в первом случае $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Во втором случае $t > 1$, таким образом, $x^2 - x > 2$, откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. Объединяя найденные решения, получим окончательный ответ:

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

Как вы думаете, с какой целью было сделано первое преобразование, когда мы избавлялись от основания 0,5; ведь оно не было необходимым! А цель очень простая: при решении неравенств гораздо удобнее работать с логарифмами, основания которых больше единицы, чтобы всякий раз, избавляясь от логарифма, не вспоминать, что надо изменить знак неравенства на противоположный.

К сожалению, слишком часто учителя требуют от своих ребят записывать решения так, как это рекомендуется во многих, с позволения сказать, "методических пособиях". Именно, пытаться записать цепочку эквивалентных преобразований, применяя квадратные скобки для обозначения совокупностей. В результате решение становится совершенно "нечитаемым", проверить его очень сложно даже вполне математически грамотному преподавателю. Представьте себе, что вместо изложенного только что решения перед вами окажется следующий текст, который и назвать так нельзя, поскольку текст – это то, что написано на русском (английском, французском) языке:

$$\frac{1}{\log_2 x} < 1 \iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} \log_2(x^2-x) < 0, \\ x^2-x > 0, \\ x^2-x \neq 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} \log_2(x^2-x) > 1, \\ x^2-x > 0, \\ x^2-x \neq 1, \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2-x < 1, \\ x^2-x > 0, \\ x^2-x \neq 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-x > 2, \\ x^2-x > 0, \\ x^2-x \neq 1, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

и так далее и тому подобное. Если вы думаете, что такая запись является "математически более строгой", то вы заблуждаетесь...

б) Удобно привести логарифмы к одному основанию – основанию 3. Получим неравенство $|\log_3(x+2) - 1| \leq \frac{1}{2}\log_3 x$, или $|2\log_3(x+2) - 2| \leq \log_3 x$, которое равносильно системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} \log_3(x+2)^2 \leq 2 + \log_3 x, \\ \log_3(x+2)^2 \geq 2 - \log_3 x. \end{array}\right.$$

Обратите внимание, что в результате преобразования $2\log_3(x+2) = \log_3(x+2)^2$ мы получим равносильное неравенство, поскольку, очевидно, $x > 0$.

Каждое из неравенств системы будем решать по отдельности. Первое: $(x+2)^2 \leq 9x$, или $x^2 - 5x + 4 \leq 0$, откуда

$x \in [1;4]$ – это и есть решение первого из неравенств системы, так как найденный отрезок лежит в ее области определения – луче $(0;+\infty)$. Второе: $x(x+2)^2 \geq 9$, причем ясно видно, что $x = 1$ является корнем многочлена $x(x+2)^2 - 9$, что даст возможность найти его разложение на множители: $x^3 + 4x^2 + 4x - 9 = (x-1)(x^2+5x+9)$. Второй сомножитель всегда положителен, значит, решением является луч $[1;+\infty)$, также лежащий в области определения. Осталось найти общую часть решений неравенств данной системы, которой и является отрезок $[1;4]$.

Возможно, что читателю непривычно видеть, как автор несколько вольно обращается со "священной коровой" школьной математики – областью определения. Дело в том, что основную роль она играет при решении задач с параметрами, к чему мы сейчас и приступим.

Задача 5. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение уравнение:

$$\text{а) } \frac{a - 3^{x^2}}{4^x - 2^{x+1}} = 0;\ \text{б) } \log_{x+1}(4|x| - a) = 2.$$

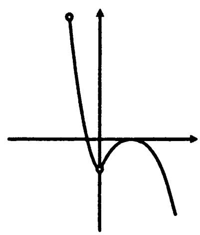
а) Итак, $3^{x^2} = a$, причем $4^x \neq 2^{x+1}$, т. е. $x \neq 1$. Областью значений $y = 3^{x^2}$ является луч $[1;+\infty)$, значит, при $a < 1$ уравнение вообще не имеет решений. Если $a = 1$, то $x^2 = 0$, значит, $x = 0$, таким образом решение единственно. Если $a > 1$, то $x = \pm\sqrt{\log_3 a}$, таким образом кажется, что в этом случае уравнение имеет два решения. Однако не стоит торопиться; что если одно из них – это $x = 1$? Эта возможность реализуется, если $a = 3$, решением будет только $x = -1$. Ответ: при $a = 1; 3$.

б) Преобразуем уравнение к виду $4|x| - a = (x+1)^2$. Теперь нам необходимо выписать область определения, сделав только одно небольшое упрощение. Конечно, должно выполняться условие $x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$, причем при этом предположении всякое решение полученного уравнения будет удовлетворять условию $4|x| - a > 0$, значит, мы вправе не проверять его (зачем выполнять бессмысленную работу?!).

Перепишем уравнение в виде $4|x| - (x+1)^2 = a$ для того, чтобы применить графический метод исследования. На рисунке изображен график

$$y = 4|x| - (x+1)^2 = \begin{cases} -x^2 - 6x - 1 & \text{при } x \in (-1; 0), \\ -(x-1)^2 & \text{при } x \in (0; +\infty), \end{cases}$$

взглянув на который мы в состоянии сразу выписать ответ: $a \in (-\infty; -1] \cup (0; 4)$.



Во введении к этому разделу уже было сказано, что порой логарифмическое уравнение представляет собой "задачу-ловушку": на учащегося, так сказать, поставлен капкан, в который многие и попадаются. В первом пункте следующей задачи есть простая ловушка, во втором – более изощренная.

Задача 6. Решите: а) уравнение $\log_{3x-5} 2 = \log_{x-1}\sqrt{2}$; б) неравенство $\log_3(x^2 - 4x) > \log_9(x-6)^2$.

а) Так как $\log_{x-1}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_{x-1} 2 = \log_{(x-1)^2} 2$, то мы приходим к уравнению $\log_{3x-5} 2 = \log_{(x-1)^2} 2$, откуда $3x-5 = (x-1)^2$, или $x^2 - 5x + 6 = 0$, так что $x = 2; 3$. Осталось обратить внимание на то, что $x = 2$ не является корнем исходного уравнения. Итак, ответ: $x = 3$.

б) Неверно, что $\log_9(x-6)^2 = \frac{1}{2}\log_3(x-6)^2 = \log_3(x-6)$, так как $\sqrt{(x-6)^2} = |x-6|$! Таким образом, исходное уравнение преобразуется к виду $\log_3(x^2 - 4x) = \log_3|x-6|$, значит, $x^2 - 4x > |x-6|$, однако при этом не стоит забывать, что $x \neq 6$.

С другой стороны, нет смысла писать, что $x^2-4x>0$, поскольку это условие заведомо выполнено для всех решений полученного неравенства, для которых $x\neq 6$. Итак, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x-6<x^2-4x, \\ x-6>4x-x^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ x^2-3x-6>0. \end{cases}$$

Решением полученной системы является объединение лучей $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$. Осталось учесть, что $x\neq 6$, таким образом, ответ: $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}; 6\right) \cup (6; +\infty)$.

Следующая задача привела большинство абитуриентов в шоковое состояние, несмотря на то, что она достаточно проста.

Задача 7. Решите уравнение $\log_{\frac{x}{2}+5}\sin x = \log_{9+8x-x^2}\sin x$.

Вначале запишем данное уравнение в общем виде (ср. с задачей 9б предыдущего раздела). Равенство $\log_b a = \log_c a$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a=1, \\ b,c>0, \\ b,c\neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a>0, \\ b=c, \\ b>0, \\ b\neq 1. \end{cases}$$

Итак, $\sin x=1$ при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Теперь надо из бесконечного множества чисел выбрать те, которые входят в область определения данного уравнения. Имеем, $\frac{x}{2}+5>0$, если $x>-10$, и $9+8x-x^2>0$, если $x\in(-1;9)$. Поскольку $-\frac{3\pi}{2}<-1$, $\frac{5\pi}{2}<9<\frac{9\pi}{2}$, то в область определения входят только $x=\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

Теперь давайте решим уравнение $\frac{x}{2}+5=9+8x-x^2$, или $2x^2-15x-8=0$, откуда $x=8; -\frac{1}{2}$. Ясно, что $\sin\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, так что значение $x=-\frac{1}{2}$ не входит в область определения. Проверим, что $\sin 8>0$. Так как $2\pi<8<3\pi$, то это неравенство действительно верно. Конечно, надо бы еще указать, что $\frac{8}{2}+5\neq 1$, что очевидно. Ответ: $x=8; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

Задача 8. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2^x + 2^y, \\ \sqrt{2^x - 2^y} = \sqrt{2^x} - \sqrt{2^y}. \end{cases}$$

Система вполне проста, хотя выглядит необычно. В результате обычных замен: $u = 2^x$ и $v = 2^y$ получим систему

$$\begin{cases} uv = u + v, \\ \sqrt{u - v} = \sqrt{u} - \sqrt{v}, \end{cases}$$

причем $u \geq v > 0$. Возведя в квадрат обе части второго уравнения, получим, что $2v = 2\sqrt{uv}$, откуда следует, что $u = v$ (поскольку они положительны). Из первого уравнения системы следует, что $u = 2$. Ответ: $(x, y) = (1, 1)$.

В некоторых случаях замена не всегда очевидна. Для того чтобы ее увидеть, надо данное уравнение сначала немного преобразовать.

Задача 9. Решите уравнение $\log_3(3^x - 1)\log_9(3^{x+1} - 3) = 3$.

Имеем,

$$\log_3(3^{x+1} - 3) = \log_3 3 \cdot (3^x - 1) = 1 + \log_3(3^x - 1).$$

Поэтому в результате замены $t = \log_3(3^x - 1)$ мы получим уравнение $\frac{1}{2}t(t + 1) = 3$, или $t^2 + t - 6 = 0$, откуда $t = -3; 2$. Если $\log_3(3^x - 1) = -3$, то $3^x - 1 = \frac{1}{27}$, $3^x = \frac{28}{27}$, откуда $x = \log_3 \frac{28}{27}$. Если $\log_3(3^x - 1) = 2$, то $x = \log_3 10$. Ответ: $x = \log_3 \frac{28}{27}; \log_3 10$.

Задача 10. Решите неравенство $\log_{x+1}(5x^2 - x) \geq 2$.

При решении неравенства бывает полезным выписать его область определения. В данном случае $x \in (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$. Поскольку основание логарифма зависит от x, рассмотрим два случая. Вначале предположим, что $x \in (-1; 0)$. Тогда получим квадратное неравенство $5x^2 - x \leq (x+1)^2$, или $4x^2 - 3x - 1 \leq 0$, решением которого является промежуток $\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$. Учитывая сделанное предположение, получим, что $x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right)$. Если же

$x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$, то тогда $4x^2 - 3x - 1 \geq 0$, откуда $x \geq 1$. Объединив найденные промежутки, получим ответ: $x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

Задача 11. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(2x^2 - 3x) \leq \log_2(x + 3).$$

Нетрудно понять, что областью определения данного неравенства является объединение $(-3; 0) \cup (5; +\infty)$. При решении этого неравенства можно совершить ошибку, если написать, что $\log_2(x^2 - 5x) = \log_2 x + \log_2(x - 5)$. Действительно, выражение, стоящее в правой части равенства, не определено при $x \in (-3; 0)$. Самый разумный подход заключается в том, чтобы написать, что $\log_2(x^2 - 5x) \leq \log_2(2x^2 - 3x) + \log_2(x + 3)$, или $\log_2(x^2 - 5x) \leq \log_2 x(2x - 3)(x + 3)$, или $x(x - 5) \leq x(2x - 3)(x + 3)$, или $2x(x - 1)(x + 2) \geq 0$. Решением полученного неравенства является объединение $[-2; 0] \cup [1; +\infty)$, из которого надо взять только ту его часть, что лежит в области определения исходного неравенства. Ответ: $x \in [-2; 0) \cup (5; +\infty)$.

Задача 12. Решите неравенство $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$.

> Конечно, задача очень проста, однако в ее решении нельзя обойтись без разбора нескольких вариантов. Контрольный вопрос: какое из чисел больше, $-a$ или $\frac{a}{2}$?

После замены $t = 2^{x+1}$ получим неравенство $2t^2 + at - a^2 < 0$. Решениями соответствующего уравнения являются $t = -a; \frac{a}{2}$. Если $a = 0$, то неравенство решений не имеет. Если $a > 0$, то решением полученного квадратного неравенства является интервал $\left(-a; \frac{a}{2}\right)$, значит, $-a < 2^{x+1} < \frac{a}{2}$, следовательно, имеем $x + 1 < \log_2 \frac{a}{2}$, откуда $x \in \left(-\infty; \log_2 a - 2\right)$. Если же $a < 0$, то $\frac{a}{2} < -a$, следовательно, получим, что $x \in \left(-\infty; \log_2(-a) - 1\right)$.

Задача 13. Решите уравнение $\sqrt{\log_3\left(\sqrt{3}\, x^a\right)} = \sqrt{\log_3 \frac{9}{x}}$.

В данном случае нет необходимости искать область определения данного уравнения. Вместо этого запишем следующую цепочку:

$$\sqrt{\log_2 A(x)} = \sqrt{\log_2 B(x)} \iff \begin{cases} \log_2 A(x) = \log_2 B(x), \\ \log_2 B(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A(x) = B(x), \\ B(x) \geq 1. \end{cases}$$

В данном случае получим, что $\sqrt{3}\,x^a = \frac{9}{x}$, или $x = 3^{\frac{3}{2(a+1)}}$, однако при этом должно выполняться неравенство $x \leq 9$. Следовательно, $\frac{3}{2(a+1)} \leq 2$, или $\frac{4a+1}{a+1} \geq 0$. Таким образом, $x = 3^{\frac{3}{2(a+1)}}$, если $a \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; в остальных случаях уравнение решений не имеет.

Задача 14. Решите систему $\begin{cases} x^y = y^x, \\ 2^x = 3^y. \end{cases}$

Как ни странно, данную систему можно решить в явном виде, причем числа 2 и 3 можно заменить на любые другие. Первое, что надо сделать – так это рассмотреть логарифмы от обеих частей каждого из уравнений,

$$\begin{cases} y \ln x = x \ln y, \\ x \ln 2 = y \ln 3, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{\ln y}{\ln x}, \\ \frac{\ln y}{\ln x} = \frac{\ln 2}{\ln 3}, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{\ln 2}{\ln 3}, \\ \frac{\ln y}{\ln x} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{cases}$$

Далее, для простоты обозначим через c отношение $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Имеем, $c \ln x = \ln(cx)$, или $c \ln x = \ln c + \ln x$, откуда $\ln x = -\frac{\ln c}{1-c}$. Выражение для значения x можно записать разными способами, причем не всегда видно, что получится одно и то же значение. Попробуем найти достаточно естественную формулу. Итак,

$$\ln x = -\frac{\ln c}{1-c} = \frac{\ln \frac{\ln 3}{\ln 2}}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}} = \frac{\ln 3 \cdot \ln \frac{\ln 3}{\ln 2}}{\ln 3 - \ln 2} = \ln 3 \cdot \log_{3/2}(\log_2 3).$$

Значит,

$$x = e^{-\frac{\ln c}{1-c}} = e^{\ln 3 \cdot \log_{3/2}(\log_2 3)} = 3^{\log_{3/2}(\log_2 3)}.$$

Аналогично,

$$y = 2^{\log_{3/2}(\log_2 3)}.$$

Кстати, $x \approx 3,483$ и $y \approx 2,198$.

Задача 15. а) Докажите, что если $2^x + 2^y = 4$, то $x + y \leq 2$. б) Найдите все значения a, при которых имеет решение система

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

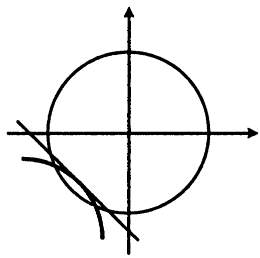
а) Приведем два решения. Первое решение: в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем, $2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}}$, значит, если $2^x + 2^y = 4$, то $\sqrt{2^{x+y}} \leq 2$, откуда и следует, что $x + y \leq 2$. Второе решение: найдем множество значений $x + y$, исследовав систему

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 4, \\ x + y = c. \end{cases}$$

После замены $t = 2^x$ и подстановки $y = c - x$ получим уравнение $t^2 - 4t + 2^c = 0$, которое имеет (положительные) решения, если $4 - 2^c \geq 0$, или $c \leq 2$.

Полезно предложить учащимся нарисовать множество точек, заданное уравнением $2^x + 2^y = 4$.

б) Если $2^x + 2^y = \frac{1}{2}$, то $x + y \leq -4$ (см. рассуждение предыдущего пункта), причем прямая $x + y = -4$ и множество, заданное уравнением $2^x + 2^y = \frac{1}{2}$, имеют единственную общую точку $(x, y) = (-2, -2)$. Уравнение $x^2 + y^2 = a$ задаст окружность радиусом $\sqrt{a}$. Данная система не будет иметь решений, если эта окружность лежит в полуплоскости $x + y > -4$, т. е. если значение a меньше квадрата расстояния от точки $(-2, -2)$ до начала координат, т. е. если $a < 8$.



То, что при $a \geq 8$ система имеет (два) решения, очевидно с наглядной точки зрения (рисунок), формальное рассуждение должно быть основано на теореме о промежуточном значении.

Вместо справочника – несколько советов

Все необходимые сведения о показательной и логарифмической функциях были приведены в предыдущем разделе. Как следует решать соответствующие уравнения и неравенства – было показано в этом. Основной совет (который, собственно говоря, следовало дать во введении и которому следовал автор при решении задач в каждом разделе этой книжки): думайте, анализируйте, не торопитесь. Конечно, можно записать, что:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{array} \right.$$

однако иногда последнее неравенство системы надо заменить неравенством $g(x) > 0$. А если, к примеру, $a(x) = x^2 + 2$, то не стоит требовать от учащихся, чтобы они сначала записали, что $x^2 + 2 > 0$, а потом глубокомысленно делали вывод, что полученное неравенство имеет место при всех действительных значениях переменной.

Сложность решения рассматриваемых уравнений (и, тем более, неравенств) связана с большим разнообразием используемых при их решении методов. Можно сказать, что применяется все, что только есть в элементарной математике.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Решите уравнения: а) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+3}$; б) $x^{\lg x} = 100x$; в) $\sqrt{3^x + 9^x} = 1 - 3^x$.

12.2. Решите уравнения: а) $\log_2 \log_{\frac{x}{9}} \frac{x}{27} = \log_2 \log_3 x + 1$; б) $\lg^2(2x+3) = \lg^2(3x+2)$; в) $\log_3(2x+3) + |\log_3 x| = 3$.

12.3. Решите уравнение $2^{2\lg x} + 2^3 = 6x^{\lg 2}$.

12.4. Решите неравенства: а) $\frac{5\cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} \geq 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$;

б) $\log_{3x^3} 9 - \log_{\sqrt{3}} x \geq 2$.

12.5. Решите неравенства:

а) $\sqrt{\log_2 x} \leq \log_2 \frac{x}{64}$; б) $\log_2 x + |\log_{2x} 2| \geq \frac{3}{2}$.

12.6. Решите неравенства: а) $\log_{4x^2}(2x+2) \leq \log_{2/x^2}(2x+2)^2$;

б) $\log_2(4-x)\log_{0,5}(x+2) > \log_{0,5}\left(x + 4 - \frac{x^2}{2}\right)$.

12.7. Решите неравенства: а) $\log_{x+1}(4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 9) < 0$; б) $\log_{1+\sin 2x}(x + 4 - 2x^2) \leq 0$.

12.8. Решите неравенства: а) $2\log_3 3x - \log_3 x^x \leq x$; б) $\log_2(10x-8)\left(\log_x 2x - \log_2 x^2\right) \geq 0$.

12.9. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(3^{2x+1} - 16\cdot 3^x + 16)}{x+1} \leq 1$.

12.10. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение уравнение:

а) $2\lg(x+1) = \lg ax$; б) $\lg(x^2 - 4x + 3) = \lg(a + 3x)$.

12.11. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение уравнение $\dfrac{3^{2x}}{9^x - 3^{x+1} + 2} = a$.

12.12. Решите системы:

а) $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + \lg x = 1, \\ x^y = 0{,}01. \end{cases}$

12.13. Решите уравнения:

а) $\log_2(a + x) = \log_2 x^2$; б) $\log_2(a + x) = 2\log_2 x$.

12.14. Решите уравнения:

а) $9^x - a \cdot 6^x - a^2 \cdot 2^{2x+1} = 0$; б) $9^x - 2 \cdot 3^x = a$.

12.15. Найдите наименьшее решение уравнения

$$\sin(\pi \cdot 2^x) = \sin(\pi \cdot 4^x).$$

Комментарии и советы

12.1. а) Перед вами линейное уравнение. б) См. задачу 1б. в) После естественной замены вы получите простое иррациональное уравнение.

12.2. а) Сделайте замену $t = \log_3 x$. б) Обратите внимание на квадраты. в) "Раскройте" модуль.

12.3. Выразьте правую часть уравнения через $t = 2^{\lg x}$ (ср. с задачей 7в предыдущего раздела).

12.4. а) Замена $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ (ср. с задачей 2). б) Замена $t = \log_3 x$.

12.5. Опять-таки, стандартные замены.

12.6. а) Введите переменные $a = \log_2(2x + 2)$ и $b = \log_2 x^2$. б) Вначале полезно сделать замены $a = \log_2(4 - x)$ и $b = \log_2(x + 2)$.

12.7. а) Рассмотрите два случая: $x > 0$ и $x \in (-1; 0)$.
б) Рассмотрите два случая: $\sin 2x > 0$ и $\sin 2x < 0$ (ср. с задачей 7).

12.8. а) Осуществите разложение на множители (ср. с задачей 2б).

б) С одной стороны, разложение на множители уже имеется, однако для исследования знака второй скобки полезно будет сделать стандартную замену.

12.9. Рассмотрите два случая и не забудьте про область определения.

12.10. См. задачу 5б.

12.11. Задача на условие существования единственного положительного решения квадратного уравнения.

12.12. а) $t = \log_x y$. б) По существу, система линейна.

12.13. Разница – в областях определения.

12.14. а) Обратите внимание, что число $-a$ может быть положительным. б) $t = 3^x > 0$!

12.15. Не подумайте, что напрашивающийся ответ – верен.

Ответы и комментарии

12.1. а) $x = 0$; б) $x = 100; \frac{1}{10}$; в) $x = -1$.

12.2. а) $x = 3; 3\sqrt{3}$; б) $x = 1; -\frac{1}{2}$; в) $x = 3; \frac{3}{25}$.

12.3. $x = 10; 100$, поскольку $x^{\lg 2} = 10^{\lg 2 \lg x} = 2^{\lg x}$.

12.4. а) $x \in (0; 1]$; б) $x \in \left(0; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right] \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 1\right]$.

12.5. а) $x \geq 512$; б) $x \in \left[2^{\frac{1-\sqrt{41}}{4}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup [2; +\infty)$.

12.6. а) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$. Рассмотрите случаи, когда $\log_2(2x + 2)$ является положительным и отрицательным.

б) $x \in (-2;0) \cup (2;4)$. Данное неравенство можно преобразовать к виду $\big(\log_2(4-x)-1\big)\big(\log_2(x+2)-1\big) < 0$, которое имеет место тогда и только тогда, когда стоящие в скобках выражения имеют противоположные знаки.

12.7. а) $x \in (-1;0)\cup\big(1;\log_2 3\big)\cup\big(\log_2 3;2\big)$. б) $x \in [-1;0)\cup\big[\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}\big)$. Обратите внимание, что $\frac{1+\sqrt{33}}{4} > \frac{\pi}{2}$.

12.8. а) $x \in \big(0;\frac{1}{3}\big]\cup[2;+\infty)$. б) $x \in \big(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\big]\cup(1;2]$.

12.9. $x \in (-\infty;-1)\cup\big[0;\log_3\frac{4}{3}\big)\cup\big(\log_3 4;\log_3\frac{16}{3}\big]$.

12.10. а) $a \in (-\infty;0)\cup\{4\}$. Исследуйте функцию $y = \frac{(x+1)^2}{x}$ при $x \in (-1;0)\cup(0;+\infty)$. б) $a \in [-9;-3]\cup\big\{-\frac{37}{4}\big\}$. Исследуйте функцию $y = x^2 - 7x + 3$ при $x \in (-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

12.11. $a \in (0;1]\cup\{-8\}$. Задача сводится к нахождению значений параметра a, при которых уравнение $(a-1)t^2-3at+2a = 0$ имеет единственное положительное решение. Другой подход основан на исследовании функции $y = \frac{t^2}{t^2-3t+2}$ при $t > 0$.

12.12. а) $(x,y) = (2,32);(32,2)$; б) $(x,y) = (100,-1);\big(\frac{1}{10},2\big)$.

12.13. Разница между уравнениями состоит в том, что область определения второго из них уже, чем область определения первого. Ответы:

$$\text{а)}\quad \begin{array}{l} x = 1 \text{ при } a = 0, \\ x = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \text{ при } a > -\frac{1}{4}, a \neq 0, \\ x = \frac{1}{2} \text{ при } a = -\frac{1}{4}, \\ \text{решений нет при других } a. \end{array}$$

$$\text{б)}\quad \begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \text{ при } a \geq 0, \\ x = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \text{ при } -\frac{1}{4} < a < 0, \\ x = \frac{1}{2} \text{ при } a = -\frac{1}{4}, \\ \text{решений нет при других } a. \end{array}$$

12.14. а) При $a = 0$ решений нет; $x = \log_{3/2} 2a$ при $a > 0$; $x = \log_{3/2}(-a)$ при $a < 0$. б) При $a < -1$ решений нет; $x = 0$ при $a = -1$; $x = \log_3(1 \pm \sqrt{1+a})$ при $-1 < a < 0$; $x = \log_3(1 + \sqrt{1+a})$ при $a \geq 0$.

12.15. Наименьшим решением является $x = \log_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, хотя изначально кажется "очевидным", что таковым будет $x = 0$.

13. Производная и интеграл

Применение производной для доказательства классического геометрического утверждения. Оценки интегралов. Интегралы от взаимно обратных функций. Применение интеграла для доказательства неравенства Юнга. Формула Симпсона. Интегралы от периодических функций. Минимизация площадей. Неравенство Шварца как обобщение неравенства Коши–Буняковского. Частный случай интегрального неравенства Чебышева.

Обсуждение. В данном разделе мы продолжим обсуждение применения производной и, кроме того, рассмотрим ряд задач, связанных с вычислением и приложением понятия определенного интеграла. При этом изучение интегрального исчисления нельзя сводить к наработке рутинной техники вычисления интегралов и их использования для поиска площадей. Первую из предлагаемых здесь задач вполне можно было бы поместить в раздел 9, поскольку речь в ней пойдет о применении производной для исследования числа решений уравнения. Однако почему-то учащиеся редко замечают, что для ее решения можно использовать стандартный метод.

Задача 1. Какое наибольшее число решений может иметь система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^{20} + y^{20} = a \end{cases} ?$$

Подставив $y^2 = 10 - x^2$ во второе уравнение, получим, что

$$x^{20} + (10 - x^2)^{10} = a.$$

Ограничимся тем, что исследуем это уравнение при $x \in [0; \sqrt{10}]$. Положим $t = x^2$ и рассмотрим функцию $f(t) = t^{10} + (t - 10)^{10}$.

Имеем,

$$f'(t) = 10t^9 + 10(t-10)^9 \geq 0 \text{ при } t \geq 10 - t, \text{ или } t \geq 5.$$

Таким образом, функция f убывает на отрезке $[0; 5]$ и возрастает на $[5; 10]$, следовательно, уравнение $f(t) = a$ может иметь не более двух решений на $[0; \sqrt{10}]$. Поэтому данная система может иметь 8 решений и не более того.

> Достаточно частая ошибка при решении этой задачи состоит в том, что учащиеся не задумываются, сколько же решений в действительности имеет это уравнение, говоря, что их не более сорока, что, конечно, верно, поскольку их не более восьми.

Эта задача хороша еще тем, что догадаться до правильного ответа будет не очень сложно тому, кто хорошо представляет себе взаимное расположение графиков степенных функций при различных значениях показателей степени. Кроме того, будет интересно обсудить вопрос о значении предела последовательности $\sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$, равного $\max\{|x|, |y|\}$.

Если производную применять разумно, то с ее помощью можно получить решения не очень простых геометрических задач.

Задача 2. Докажите, что из всех четырехугольников с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник.

Пусть a, b, c, d – длины последовательных сторон четырехугольника, x – величина угла между сторонами a и b, y – величина противоположного ему угла. Соотношение между x и y следует из теоремы косинусов,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y,$$

поэтому при увеличении угла увеличивается и угол y, значит, значение y является функцией от x. Продифференцировав это соотношение, получим, что

$$cd\sin y \cdot y' = ab\sin x.$$

Площадь четырехугольника найдем по формуле

$$S = \tfrac{1}{2}(ab\sin x + cd\sin y).$$

Таким образом,

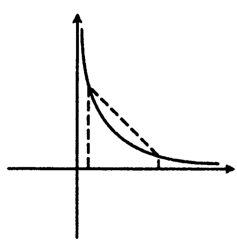
$$S' = \tfrac{1}{2}(ab\cos x + cd\cos y\cdot y') = \tfrac{1}{2}\left(ab\cos x + ab\cos y\cdot \tfrac{\sin x}{\sin y}\right) = \\ = \tfrac{ab}{2\sin y}(\cos x\sin y + \sin x\cos y) = \tfrac{ab}{2\sin y}\sin(x+y).$$

Следовательно, $S'(x) > 0$ при $x + y < \pi$ и $S'(x) < 0$ при $x + y > \pi$, поэтому площадь принимает наибольшее значение при $x+y = \pi$, т. е. тогда и только тогда, когда четырехугольник вписанный.

Основное применение интеграла (в школе) связано с вычислением площадей. Конечно, интересно показать, что площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой синусоиды, равна 2. Однако в данном разделе мы будем рассматривать примеры другого типа, в которых еще надо будет догадаться, что надо вычислять или оценивать некоторый интеграл.

Задача 3. Докажите, что при всех $b > a > 0$ имеет место неравенство $\ln\frac{b}{a} < \frac{b^2-a^2}{2ab}$.

Поскольку $\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \int_a^b \frac{dx}{x}$, то $\ln\frac{b}{a}$ – это площадь криволинейной трапеции – подграфика функции $y = \frac{1}{x}$. Так как эта функция выпукла, то дуга ее графика лежит под соответствущей хордой, следовательно, площадь подграфика меньше площади заштрихованной на рисунке трапеции, которая и равна $\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{b^2-a^2}{2ab}$.



Задача 4. Вычислите $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$.

Попробуйте осознать рассуждение, которое стоит за следующим вычислением:

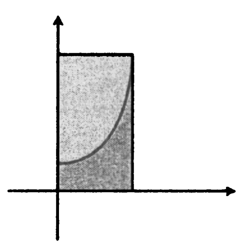
$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Вместо того чтобы интегрировать "по частям", было использовано следующее соображение. Площадь подграфика функции $y = \arcsin x$ при $x \in [0;1]$ есть разность площади прямоугольника со сторонами 1 и $\frac{\pi}{2}$ и площадью фигуры, ограниченной графиком этой функции, осью ординат и прямой $y = \frac{\pi}{2}$. Осталось заметить, что последняя фигура симметрична подграфику функции $y = \sin x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, их площади равны.

Конечно, в предыдущей задаче можно было найти первообразную подынтегральной функции в явном виде. В следующей задаче это сделать уже не удастся.

Задача 5. Докажите, что $\int\limits_0^2 \sqrt{x^3+1}\,dx + \int\limits_1^3 \sqrt[3]{x^2-1}\,dx = 6$.

Каждый из входящих в сумму интегралов можно найти только приближенно, однако их сумма точно равна 6. Соображения те же, что и при решении предыдущей задачи. Если $y = \sqrt{x^3+1}$ при $x \in [0;2]$, то $y \in [1;3]$ и $x = \sqrt[3]{y^2-1}$. График $y = \sqrt{x^3+1}$ разбивает прямоугольник, противоположными вершинами которого является начало координат и точка $P(2,3)$ на криволинейную трапецию и криволинейный треугольник (рисунок).



Первый из интегралов равен площади "трапеции", второй – площади "треугольника".

В следующей задаче все рассмотренные идеи сведены воедино. Итогом ее решения станет интересное неравенство.

Задача 6.

а) Найдите площадь подграфика функции, заданной равенством $f(x) = \min\{\sqrt{x}, 2 - x\}, x \in [0; 2]$.

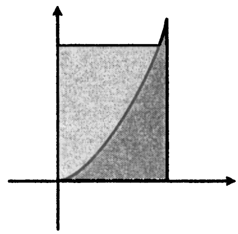
б) Вычислите $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$.

в) Докажите, что для любых четырех чисел $a, b, p, q > 0$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, верно неравенство $\int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b x^{q-1}dx \geq ab$. В каком случае имеет место равенство?

а) Ясно, что $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \in [0; 1]$ и $f(x) = 2 - x$ при $x \in [1; 2]$. Значит, подграфик функции представляется в виде объединения криволинейного и обычного треугольников, а его площадь равна сумме $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Кстати, для вычисления второго интеграла первообразную можно было и не считать; он равен площади равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами 1.

б) График $y = \sqrt{1 - x^2}$ при $x \in [0; 1]$ – это четверть единичной окружности, поэтому данный интеграл равен четверти площади единичного круга, т. е. $\frac{\pi}{4}$.

в) Первая идея состоит в том, чтбы переписать данное условие $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ в виде равенства $(p - 1)(q - 1) = 1$, из которого следует, что подынтегральные функции взаимно обратны. Мы можем применить то же соображение, что и при решении задачи 5. Разница состоит лишь в том, что объединение множеств $0 \leq y \leq x^{p-1}, 0 \leq x \leq a$ и $0 \leq x \leq y^{q-1}, 0 \leq y \leq b$ содержит прямоугольник $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, а совпадает с ним только в том случае, когда $b = a^{p-1}$. На рисунке изображена картинка для случая $b < a^{p-1}$.



Если провести непосредственное интегрирование, то, в качестве следствия доказанного неравенства, мы получим так называемое *неравенство Юнга*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab, \text{ при } a, b \geq 0,\ \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1,\ p, q > 0.$$

При изучении определенных интегралов появляется возможность использовать некоторые общие математические идеи, к примеру, понятие *линейности*.

Задача 7. Положим $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

а) Найдите такие числа A и B, что для всех линейных функций $f(x) = kx+d$ верно, что $I(f) = (b-a)(Af(a)+Bf(b))$.

б) Существуют ли такие числа A, B, C, что для всех квадратичных функций f верно равенство

$$I(f) = (b-a)(Af(a) + Cf(\tfrac{a+b}{2}) + Bf(b))\,?$$

в) Будет ли предыдущее равенство (с найденными в предыдущем пункте значениями A, B и C) верным для всех кубических многочленов; многочленов четвертой степени?

а) Данное равенство должно выполняться для функции, тождественно равной единице, $f_1(x) = 1$, интегрируя которую получим, что $b - a = (b-a)(A+B)$, таким образом, должно быть верно равенство $A + B = 1$. Оно должно выполняться и для $f_2(x) = x$, откуда следует, что $\frac{1}{2}(b^2 - a^2) = (b-a)(Aa+Bb)$, значит, $aA + bB = \frac{a+b}{2}$. Из системы

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ aA + bB = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

получаем, что $A = B = \frac{1}{2}$.

Итоговое соображение состоит в том, что если наше равенство верно для функций $f_1(x) = 1$ и $f_2(x) = x$, то оно верно для всех вообще функций $f(x) = kx+d$. Математик скажет, что это совершенно ясно, поскольку правая и левая части данного равенства линейны по f. Поясним это рассуждение, обозначим для удобства правую часть равенства через $J(f)$.

Итак, требуется установить, что $I(f) = J(f)$. Нами уже установлено, что $I(f_1) = J(f_1)$ и $I(f_2) = J(f_2)$. С другой стороны, известно, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов и что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Значит, $I(kx + d) = I(k \cdot x + d \cdot 1) = kI(f_2) + dI(f_1)$. Ясно также, что $J(kx + b) = kJ(f_2) + dJ(f_1)$. По доказанному $I(f_1) = J(f_1)$ и $I(f_2) = J(f_2)$, откуда, в силу установленных свойств, следует, что $I(kx + d) = J(kx + d)$ при любых k и d.

б) Рассуждение аналогично предыдущему, надо только ввести функцию $f_3(x) = x^2$ и записать равенство $I(f_3) = J(f_3)$. Получим систему

$$\begin{cases} A + C + B = 1, \\ 2aA + C(a + b) + 2Bb = a + b, \\ 3a^2A + \frac{3}{4}(a + b)^2C + 3b^2B = a^2 + ab + b^2. \end{cases}$$

Так как $C = 1 - A - B$, то, подставляя во второе уравнение, получаем, что $(a - b)(A - B) = 0$, значит, $A = B$ и $C = 1 - 2A$. Из последнего уравнения следует, что $A = \frac{1}{6}$. Таким образом, $A = B = \frac{1}{6}$ и $C = \frac{2}{3}$. Саму формулу (*формулу Симпсона*) обычно записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

в) Нетрудно проверить, что формула Симпсона верна для кубических многочленов и неверна для многочленов степени 4.

Для вычисления определенных интегралов мы уже неоднократно применяли *формулу Ньютона–Лейбница*, которая является следствием *теоремы Барроу*:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Полезно заметить, что поскольку $\int_x^a f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$, то

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = -f(x).$$

Задача 8. Рассмотрим 2π-периодичную функцию f.

а) Докажите, что интеграл $\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt$ не зависит от x (таким образом, значение интеграла по отрезку, длина которого равна периоду функции, не зависит от расположения этого отрезка на числовой прямой).

б) Найдите условие, при выполнении которого первообразная функции f будет 2π-периодична.

а) Пусть $\varphi(x) = \int_x^{x+2\pi} f(x)\,dx$. Тогда

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x+2\pi} f(t)\,dt + \frac{d}{dx}\int_x^0 f(t)\,dt = f(x+2\pi) - f(x) = 0,$$

откуда следует, что функция $\varphi(x)$ постоянна.

б) Если $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, то $F(0) = 0$. Значит, если F является 2π-периодичной, то необходимым образом $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Из доказанного в предыдущем пункте следует, что это условие является также и достаточным. Действительно,

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0.$$

При вычислении площадей, ограниченных, к примеру, дугами графиков и отрезками вертикальных прямых, можно сделать ошибку, связанную с тем, что интеграл от отрицательной функции – это, конечно, не площадь S ее подграфика, а $-S$.

Задача 9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ и прямыми $x = 0$, $x = \pi$.

Для вычисления данной площади перво-наперво надо выяснить, на каких отрезках $\cos x \geq \cos 2x$, а на каких верно противоположное неравенство. Имеем, $\cos x \geq 2\cos^2 x - 1$, или $2\cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0$, откуда $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$. Таким образом, при $x \in [0; \pi]$ имеем, что $\cos x \geq \cos 2x$ на $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ и $\cos x \leq \cos 2x$ на $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. Следовательно, искомая площадь – это значение суммы интегралов

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x - \cos 2x)\, dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\cos 2x - \cos x)\, dx =$$
$$= \left(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} + \left(\tfrac{1}{2}\sin 2x - \sin x\right)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = 3\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Предыдущую задачу можно рассматривать как предисловие к следующей.

Задача 10. Дана функция $f(x) = x^2$. Пусть $t \in [0; 1]$. Обозначим через $S(t)$ сумму площадей двух криволинейных треугольников, ограниченных графиком функции f, вертикальными прямыми $x = 0$, $x = 1$ и горизонтальной прямой, проходящей через точку графика с абсциссой $x = t$.

а) Получите явную формулу для функции $S(t)$.

б) Найдите точку минимума функции S.

в) Выполните пункт б) в случае, если $f(x) = \ln(x + 1)$.

а) Имеем, $S(t) = \int_0^t (t^2 - x^2)\, dx + \int_t^1 (x^2 - t^2)\, dx = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$.

б) Так как $S'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t - 1)$, то $t = \frac{1}{2}$ – это точка минимума.

в) Данную задачу проще решать в общем виде. Рассмотрим возрастающую на $[0;1]$ функцию f. Формула для $S(t)$ имет вид

$$S(t) = \int_0^t (f(t) - f(x))\,dx + \int_t^1 (f(x) - f(t))\,dx = \\ = (2t-1)f(t) + \int_t^1 f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx.$$

Значит,

$$S'(t) = 2f(t) + (2t-1)f'(t) - f(t) - f(t) = (2t-1)f'(t),$$

поэтому ее точкой минимума является $t = \frac{1}{2}$.

Задача 11. Докажите, что $\int\limits_0^n \frac{\sin x}{1+x^2}dx > 0$ при всех натуральных n.

Данный в задаче интеграл не надо вычислять, требуется всего лишь оценить его. С наглядной точки зрения представляется очевидным, что, часть графика рассматриваемой функции на отрезке $[\pi; 2\pi]$ (где $\sin x \leq 0$) ограничивает меньшую площадь, чем "арка" того же графика при $x \in [0;\pi]$. Проведем формальное рассуждение. Положим $\psi(n) = \int_0^n \frac{\sin x}{1+x^2}dx$. Если $2\pi k \leq n \leq \pi(2k+1)$, то $\psi(n) \geq \psi(2\pi k)$, и $\psi(n) \geq \psi(2\pi k + 2\pi)$, если $\pi(2k+1) \leq n \leq 2\pi(k+1)$. Осталось заметить, что

$$\psi(2\pi k) = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{2\pi l}^{\pi(2l+1)} \sin x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(x+\pi)^2} \right) dx > 0,$$

так как $x + \pi > x$.

Задача 12. Является ли 2π-периодической функцией первообразная функции $\cos x \cos 3x \ldots \cos 3^{1995} x$?

В силу результата задачи 8б, надо просто выяснить, равен ли нулю интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos 3x \ldots \cos 3^{1995} x\,dx.$$

Рассмотрим произведение $\cos k_1x \dots \cos k_nx$ и преобразуем его в сумму. Имеем, $\cos k_1x \cos k_2x = \frac{1}{2}\big(\cos(k_1+k_2)x+\cos(k_1-k_2)x\big)$. Далее,

$$\begin{gathered}4\cos k_1x\cos k_2x\cos k_3x = \\ = 2\big(\cos(k_1+k_2)x+\cos(k_1-k_2)x\big)\cos k_3x = \\ = \cos(k_1+k_2+k_3)x+\cos(k_1-k_2+k_3)x+ \\ +\cos(k_1+k_2-k_3)x+\cos(k_1-k_2-k_3)x.\end{gathered}$$

Нетрудно понять (а доказать это можно по индукции), что произведение $\cos k_1x \dots \cos k_nx$ представляется в виде суммы 2^n слагаемых вида $\frac{1}{2^n}\cos(k_1 \pm k_2 \pm \dots \pm k_n)x$. Ясно, что интеграл по отрезку $[0; 2\pi]$ от функции $\cos lx$ равен нулю тогда и только тогда, когда $l = 0$. Таким образом, вопрос задачи сводится к следующему: существует ли комбинация знаков "+" и "−" перед числами в выражении $1 \pm 3 \pm 3^2 \pm \dots \pm 3^{1995}$, при которой оно оказывается равным нулю? Ответ, конечно, отрицательный, так как при любых знаках в результате мы получим число, не делящееся на 3. Значит, рассматриваемый интеграл равен нулю, таким образом, искомая первообразная является 2π-периодичной.

Задача 13. Докажите, что для любых непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций f и g справедливо *неравенство Шварца*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Данное неравенство обобщает известное неравенство Коши–Буняковского. Более того, совпадают и доказательства!

Рассмотрим квадратный трехчлен $p(t) = \int_a^b (tf(x)+g(x))^2\,dx$, таким образом, $p(t) \ge 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Далее,

$$\begin{gathered}p(t) = \int_a^b (t^2f^2(x) + 2tf(x)g(x) + g^2(x))\,dx = \\ = t^2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx.\end{gathered}$$

Осталось заметить, что искомое неравенство имеет вид $D \leq 0$ (здесь D – дискриминант $p(t)$), которое справедливо в силу того, что рассматриваемый квадратный трехчлен неотрицателен на всей числовой прямой.

Задача 14. Докажите, что для всякой возрастающей на отрезке $[0;1]$ функции f справедливо неравенство

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leq 2\int_0^1 xf(x)\,dx.$$

Поскольку f возрастает на $[0;1]$, то при всех $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ имеем

$$f(x)(1-2x) \leq f(1-x)(1-2x) = h(x) = g(1-x),$$

где $g(x) = f(x)(2x-1)$, $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Далее, так как подграфики функций h и g симметричны, то их площади равны, значит,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)(2x-1)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)(1-2x)dx,$$

откуда и следует данное неравенство.

Справочник

1. Формула Ньютона–Лейбница: если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

2. Теорема Барроу:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

3. Аддитивность интеграла: для любых чисел a, b и c

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

4. Линейность интеграла:

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Теорема о среднем: существует $c \in [a;b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

6. Неравенство для модуля интеграла:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7. Неравенство Шварца:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

8. Формула линейной замены переменной:

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\,dt.$$

Задачи для самостоятельного решения

13.1. Вычислите площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

13.2. Найдите все a, при которых $\int\limits_0^{\pi} \sin ax \sin x\,dx \ge 0$.

13.3. Докажите, что если $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \geq m$, то на отрезке $[a;b]$ найдется такая точка c, что $|f(c)| \geq \frac{m}{b-a}$.

13.4. Докажите неравенства: а) $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$; б) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} \leq 1,1$ в) $\int_0^1 \sqrt[n]{1-x^n} > \frac{n}{n+3}$.

13.5. Дана функция $y = \frac{1}{2}x^2$. Рассмотрим произвольную прямую и обозначим x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ абсциссы точек ее пересечения с графиком данной функции.

а) Покажите, что для площади S сегмента, ограниченного отрезком этой прямой и соответствующей дугой графика, справедлива формула $S = \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3$.

б) Найдите наименьшее значение площади S для прямых, проходящих через точку $M\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

13.6. Дана функция $y = \sqrt{3 - \frac{x^2}{2}}$. Пусть точка $M(x_0, y_0)$, где $x_0 > 0$, лежит на графике данной функции.

а) Найдите площадь S треугольника, который отсекается от первого координатного угла касательной к этому графику, проходящей через точку M, и покажите, что $S = \frac{9}{x_0 y_0}$.

б) Найдите наименьшее возможное значение площади S.

13.7. Дана функция $f(x) = 4 + ax - x^2$, прямая ℓ, заданная уравнением $y = 2x + 8$, и точка $A(0,4)$.

а) Найдите все значения a, при которых прямая ℓ касается графика функции f.

б) Пусть P и Q – точки касания прямой ℓ с графиками функций данного вида при найденных в предыдущем пункте значениях a. Вычислите площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком PQ и дугами AP, AQ этих графиков.

в) Пусть $a = 2$. Найдите точку графика функции f, ближайшую к точке $M(-3, \frac{3}{2})$.

г) Найдите наименьшее значение площади сегмента, ограниченного графиком функции f и осью абсцисс.

13.8. Дана функция $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$.

а) Докажите, что $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx < \frac{9}{4}$.

б) Найдите наименьшее значение интеграла от функции f по отрезку $\left[a; a+\frac{3}{2}\right]$ при $a > 0$.

13.9. Докажите, что $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

13.10. Докажите, что $9 < \int\limits_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int\limits_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001$.

13.11. Параболическим сегментом называется фигура, ограниченная параболой и отрезком прямой, перпендикулярной ее оси симметрии (основанием сегмента). Предположим, что длина основания сегмента (его ширина) равна a, а высота (длина отрезка оси симметрии) равна h.

а) Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в этот сегмент (при том, что одна из его сторон лежит на основании сегмента)?

б) Докажите, что площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}ah$.

13.12. Рассмотрим параболу $y = x^2$ и все ее хорды длины l. При каком расположении хорды площадь сегмента, ограниченного этой хордой и дугой параболы, будет наибольшей?

13.13. Рассмотрим выпуклую функцию f, заданную на отрезке $[a; b]$. В некоторой точке графика этой функции проведена касательная к графику. Найдите точку касания, для которой величина площади области, ограниченной этой касательной, графиком функции и прямыми $x = a$, $x = b$, будет наименьшей.

13.14. Докажите, что если функция f определена на всей числовой прямой и для любой пары чисел x и y выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, то она постоянна.

13.15. Функция f непрерывна, положительна и $f(x + 1) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\, dx$.

а) Докажите, что $F\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$.

б) Найдите все $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых $F(\alpha) \geq 1$.

Комментарии и советы

13.1. Для вычисления интеграла, значение которого равно четверти искомой площади, сделайте линейную замену переменной.

13.2. См. задачу 12.

13.3. Рассуждайте от “противного”.

13.4. а) См. неравенство Шварца. б) См. пункт а). в) Найдите точку пересечения графика с прямой $y = x$ и оцените площадь подграфика.

13.5. а) Проведите прямое вычисление. б) Выразите площадь сегмента, например, через угловой коэффициент хорды, его ограничивающей.

13.6. а) Можно найти точки пересечения касательной с осями координат. б) Стандартная задача на наибольшее значение произведения.

13.7. а) Задача на равенство нулю дискриминанта квадратного трехчлена. б) Прямое вычисление. в) Исследуйте функцию, равную квадрату расстояния от точки графика до точки M. г) Не находите явно координаты концов хорды; удобнее воспользоваться теоремой Виета.

13.8. а) Если вы явно вычислите интеграл, то вам придется как-то оценивать число e. б) См. задачу 8а.

13.9. Оцените интеграл $\int_1^n \frac{dx}{x}$ суммами площадей прямоугольников.

13.10. См. задачу 6в); оцените площадь маленького прямоугольника.

13.11. а) Задача на исследование кубической функции.
б) Прямой подсчет.

13.12. Используйте результат задачи 13.5а.

13.13. Не пугайтесь того, что вам придется выразить площадь в общем виде через интеграл; см. решение задачи 10в.

13.14. Проще всего вычислить производную и убедиться, что она равна нулю во всех точках.

13.15. а) Сведите неравенство к виду $\frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{2})} \geq 2$.
б) В качестве подсказки: неравенство верно при всех α. Рассмотрите вначале $\alpha = \frac{1}{n}$.

Ответы и комментарии

13.1. $S = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi ab.$

13.2. Случаи $a = 0; \pm 1$ рассмотрите отдельно. При других значениях a получится неравенство $\frac{\sin(a\pi)}{a^2-1} \leq 0$, решением которого является объединение отрезков $[0;2] \cup [2n-1;2n]$, где $n \geq 2$ или $n \leq -1$.

13.3. Если $|f(x)| < \frac{m}{b-a}$ при всех $x \in [a;b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx < m.$$

13.4. а) Возьмите $g(x) = 1$ в неравенстве Шварца. б) Примените предыдущее неравенство. в) Покажите, что $S > \frac{1}{\sqrt[n]{4}}$ и воспользуйтесь неравенством $\sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{1+3} < 1 + \frac{3}{n}$. Конечно, можно было записать, что

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1-x^n}\,dx > \int_0^1 \left(1-x^n\right)dx = 1 - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{n}{n+1},$$

получив в результате немногим более слабое неравенство.

13.5. а) Имеем,

$$S = \tfrac{1}{4}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2) - \int_{x_1}^{x_2} \tfrac{1}{2}x^2\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{4}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2) - \tfrac{1}{6}(x_2^3 - x_1^3) = \tfrac{1}{12}(x_2 - x_1)^3.$$

б) Пусть k – угловой коэффициент прямой AB. Из системы

$$\begin{cases} y = kx + \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

можно найти $|x_2 - x_1| = \sqrt{4k^2 + 12}$, откуда следует, что $S(k) = \frac{1}{12}(4k^2 + 12)^{3/2}$, следовательно,

$$\min S(k) = S(0) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

13.6. а) Уравнение касательной, проходящей через точку графика $M_0(x_0, y_0)$ функции, имеет вид $y = -\frac{x_0}{2y_0}x + \frac{3}{y_0}$. Точками ее пересечения с осями координат являются $A\left(\frac{6}{x_0}, 0\right)$ и $B\left(0, \frac{3}{y_0}\right)$, откуда и следует ответ.

б) Решение, в котором дифференцировать не надо: поскольку $x_0 y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}} y_0\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_0^2}{2} + y_0^2\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то

$S = \frac{9}{x_0 y_0} \geq 3\sqrt{2}$, причем $S = 3\sqrt{2}$ при $x_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, следовательно, минимальное значение площади есть $3\sqrt{2}$.

Проведите также стандартное исследование.

13.7. а) $a = -2; 6$. б) $S = \int_{-2}^{0} (x+2)^2\,dx + \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \frac{16}{3}$.

в) Пусть $d(x)$ – квадрат расстояния от точки графика с абсциссой x до M. Тогда $d(x) = (x+3)^2 + (\frac{5}{2} + 2x - x^2)^2$ и $d'(x) = 2(x+3) + 4(1-x)(\frac{5}{2} + 2x - x^2) = 4(x+1)(x-2)^2$, значит, $x = -1$ – точка, в которой достигается наименьшее значение этой функции. Таким образом, ближайшей к M является точка $C(-1, 1)$.

г) Обозначим через x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) абсциссы точек пересечения графика функции f с осью абсцисс. Площадь S сегмента вычисляется по формуле

$$\int_{x_1}^{x_2} (4 + ax - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{6}\left(24 + 3a(x_1 + x_2) - 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(a^2 + 16)^{3/2}.$$

Ясно, что она – наименьшая при $a = 0$. Ответ: $\frac{32}{3}$.

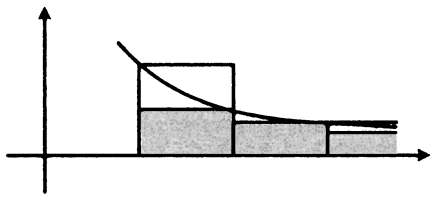
13.8. а) Имеем, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx < \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot 32 = \frac{9}{4}$.

б) Обозначим данный интеграл через $S(a)$. Найдем производную, $S'(a) = f\left(a + \frac{3}{2}\right) - f(a)$. Значит, $S'(a) \geq 0$ при

$$a + \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{a + \frac{3}{2}} \geq a - 1 + \frac{1}{a}, \text{ или } a\left(a + \frac{3}{2}\right) \geq 1.$$

Поскольку по условию $a > 0$, то решением неравенства является луч $a \geq \frac{1}{2}$. Следовательно, наименьшим является значение при $a = \frac{1}{2}$: $S\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 + \frac{3}{8}$.

13.9. Имеем, $\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x}$. Значение интеграла можно оценить сверху суммой площадей прямоугольников с основанием 1 и высотами $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}$. Оценка интеграла снизу производится аналогичным образом (рисунок).



13.10. Площадь “торчащего” из квадрата криволинейного треугольничка оценивается сверху площадью прямоугольника, которая равна $(3 - \sqrt[4]{80})(\sqrt[4]{82} - 3) < 0{,}0001$.

13.11. а) Наибольшая площадь вписанного прямоугольника равна $\frac{2ah}{3\sqrt{3}}$. б) Вычислите интеграл $2h\int_0^{\frac{a}{2}}\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)dx$.

13.12. Имеем, $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = (x_1-x_2)^2\left(1+(x_1+x_2)^2\right) = l^2$. В силу задачи 13.5а, площадь является наибольшей, когда является наибольшей разность $|x_1 - x_2|$, таким образом, значение $(x_1 + x_2)^2$ должно быть наименьшим, т. е. равным нулю. Значит, наибольшую площадь ограничивает горизонтальный отрезок.

13.13. Если $x = t$ – точка касания, то рассматриваемая площадь равна

$$S(t) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \left(f(t) + f'(t)(x-t)\right)dx =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + (b-a)\left(tf'(t) - f(t)\right) - \tfrac{b^2-a^2}{2}\cdot f'(t).$$

Таким образом,

$$S'(t) = (b-a)\left(f'(t) + tf''(t) - f'(t) - f''(t)\tfrac{a+b}{2}\right) =$$
$$= (b-a)f''(t)\left(t - \tfrac{a+b}{2}\right).$$

Следовательно, точка касания должна быть расположена над серединой отрезка $[a;b]$.

13.14. Приведем еще одно рассуждение, в котором производная не используется. Рассмотрим числа $a < b$ и разделим отрезок $[a; b]$ на n равных частей; точки дробления обозначим x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Ясно, что $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, так что $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \frac{(b-a)^2}{n^2}$. Следовательно,

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \to 0,$$

при $n \to \infty$, откуда и получаем, что $f(b) = f(a)$.

13.15. а) Имеем:

$$\int_0^1 \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{2})} \right) dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} 2dx = 1.$$

б) Покажем, что неравенство справедливо при $\alpha = \frac{1}{n}$, где n – натуральное число. Имеем,

$$\int_0^1 \frac{f(x+\frac{1}{n})}{f(x)} dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{f(x+\frac{1}{n})}{f(x)} dx.$$

Сделав в каждом из интегралов замену $u = x - \frac{k-1}{n}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(u+\frac{k}{n})}{f(u+\frac{k-1}{n})} dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(u+\frac{k}{n})}{f(u+\frac{k-1}{n})} dx \geq$$

$$\geq \int_0^{\frac{1}{n}} n \sqrt[n]{\frac{f(u+\frac{1}{n})}{f(u)} \frac{f(u+\frac{2}{n})}{f(u+\frac{1}{n})} \cdots \frac{f(u+\frac{n}{n})}{f(u+\frac{n-1}{n})}} \, dx =$$

$$= \int_0^{1/n} n\, dx = 1,$$

поскольку $f(u + \frac{n}{n}) = f(u)$. Если $\alpha = \frac{m}{n}$, то можно поступить аналогично применительно к интегралу

$$\frac{1}{m}\int_0^m \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx.$$

Докажем теперь, что неравенство справедливо при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно показать, что функция Φ, определенная формулой $\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx$, непрерывна на $\mathbb{R}$. Положим $c = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > 0$. Поскольку f непрерывна и периодична, то она равномерно непрерывна, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых u_1, u_2, таких, что $|u_1 - u_2| < \delta$, верно неравенство $|f(u_1) - f(u_2)| \leq c\varepsilon$, откуда следует оценка

$$|\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leq \int_0^1 \frac{|f(x+\alpha_1) - f(x+\alpha_2)|}{f(x)}dx \leq$$
$$\leq \int_0^1 \frac{c\varepsilon}{c}dx = \varepsilon.$$

14. Разные задачи

Прогрессии. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями. Последовательности, их свойства и пределы. Задачи на подсчеты числа вариантов.

Обсуждение. Среди задач, предлагаемых на различных испытаниях, достаточно регулярно встречаются задачи на прогрессии. Однако большинство из них совсем просты (характерным примером является задача 14.1), собственно говоря, это просто обычные задачи на составление уравнений (с двумя или более неизвестными). Проста и задача 1, с которой мы начнем обсуждение. С другой стороны, если вы понимаете, какими свойствами обладает и определяется арифметическая прогрессия, то решите эту задачу существенно короче, чем если бы действовали стандартным образом.

Вторая тема, обсуждаемая в этом разделе, – это уравнения, в которых участвуют обратные тригонометрические функции. Как ни покажется странным на первый взгляд, методы рассуждений при решении подобных уравнений ближе к методам решения иррациональных уравнений, чем тригонометрических. По-существу, при их решении "лишние" корни появляются по той же причине, что и при решении иррациональных уравнений, что должно помочь глубже понять логику решения уравнений обоих типов.

Задачи на последовательности – очень редкие гости в вариантах обычных экзаменов (испытаний), автор включил их в данный раздел по той причине, что при решении таких задач необходимо рассуждать и индуктивно, и формально-логически, а иногда даже проявить творческие способности.

Наконец, ближе всего к реальности задачи, в которых требуется подсчитать общее число вариантов. При их решении важно, во-первых, ничего не упустить, во-вторых, учесть каждый вариант не более одного раза.

Задача 1. Том Сойер красил забор длиной 105 метров, причем день за днем количество выкрашенного за один день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был покрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 метров забора, а за последние три – только 27 метров?

Пусть Тому потребовалось на покраску забора n дней. Обозначим через x_k длину части забора, покрашенной им в k-ый по счету день. По условию числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют (убывающую) арифметическую прогрессию. Как обычно, через S_n обозначим сумму всех членов данной прогрессии; по условию $S_n = 105$. По свойствам арифметической прогрессии, имеем

$$x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = x_3 + x_{n-2} \text{ и } S_n = \tfrac{n}{2}(x_1 + x_n).$$

Поскольку суммарно за первые три и последние три дня им было выкрашено 63 метра, то $x_1 + x_n = 21$. Так как $S_n = 105$, то $n = 10$.

Конечно, вопрос задачи можно было сформулировать по-другому, к примеру, спросив: сколько метров забора было покрашено Томом Сойером за пятый день? При такой постановке пришлось бы искать саму прогрессию, однако в таком случае задача стала бы не сложнее, а скучнее. Решим ее при помощи основных формул для арифметических прогрессий.

Обозначим через a первый член прогрессии, через d – ее разность. Как известно, $x_k = a + d(k-1)$. Так как за первые три дня Том выкрасил 36 метров, то

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + a + d + a + 2d = 3a + 3d = 36, \text{ или } a + d = 12.$$

Аналогично,

$$x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 3a + d(3n-6) = 27, \text{ или } a + d(n-2) = 9.$$

Наконец, поскольку $S_n = \frac{x_1+x_n}{2}n = \frac{2a+d(n-1)}{2}n = 105$, то

$$n(2a + d(n-1)) = 210.$$

Таким образом, мы можем составить систему из трех уравнений с тремя неизвестными a, d и n:

$$\begin{cases} a + d = 12, \\ a + d(n-2) = 9, \\ n(2a + d(n-1)) = 210. \end{cases}$$

В результате $a = 12\frac{3}{7}$, $d = -\frac{3}{7}$, $n = 10$, поэтому за пятый день Том Сойер выкрасил $10\frac{5}{7}$ метра забора тети Полли.

Как вы думаете, почему данные в этой задаче были подобраны так, чтобы ответ оказался дробным? Как вы считаете, имело ли смысл переформулировать задачу или же задача в ее исходной формулировке проверяла понимание того, что такое есть арифметическая прогрессия?

Задача 2. а) Могут ли числа 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ быть членами одной арифметической прогрессии? б) Найдите наибольшую разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{13}$. в) Могут ли числа 2, 3 и 17 быть членами одной геометрической прогрессии?

а) Если такая последовательность существует, то найдутся такие натуральные числа n и k, что $\sqrt{2}-1 = dn$ и $\sqrt{3}-1 = dk$, откуда $n(\sqrt{2}-1) = k(\sqrt{3}-1)$, или $n\sqrt{2}-k\sqrt{3} = n-k$. Осталось доказать, что ни при каких натуральных n и k число $n\sqrt{2}-k\sqrt{3}$ не может быть целым, для чего достаточно один раз возвести в квадрат и воспользоваться иррациональностью числа $\sqrt{6}$.

б) Имеем,

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{17} = \frac{2}{15 \cdot 17} = dn \text{ и } \frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{13 \cdot 15} = dk,$$

откуда $\frac{n}{k} = \frac{13}{17}$. Значение d будет наибольшим в том случае, если число n будет наименьшим. Поскольку дробь $\frac{13}{17}$ несократима, то наименьшим возможным значением является $n = 13$, следовательно, наибольшее значение $d = \frac{2}{13 \cdot 15 \cdot 17}$.

в) Если бы такая геометрическая прогрессия существовала, то имели бы место равенства $3 = 2 \cdot q^n$ и $17 = 3 \cdot q^k$ при некоторых $n, k \in \mathbb{N}$, откуда $\left(\frac{3}{2}\right)^k = \left(\frac{17}{3}\right)^n$, или $3^{k+n} = 2^k \cdot 17^n$, что, конечно, невозможно.

Задача 3. Геометрическая прогрессия с отрицательной суммой состоит из четырех членов. Выбросив из нее второй член, мы получим возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель исходной геометрической прогрессии.

Пусть a – первый член геометрической прогрессии, q – ее знаменатель. По условию задачи имеем

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 + aq^3 < 0, \\ 2aq^2 = a + aq^3, \\ aq^3 - aq^2 > 0. \end{cases}$$

Так как $a, q \neq 0$, то на них можно поделить. Далее, поскольку $1 + q + q^2 + q^3 = (1 + q)(1 + q^2)$ и $1 + q^2 > 0$, то мы получим систему

$$\begin{cases} a(1 + q) < 0, \\ q^3 - 2q^2 + 1 = 0, \\ a(q - 1) > 0. \end{cases}$$

Так как $q^3 - 2q^2 + 1 = (q - 1)(q^2 - q - 1)$ и $q \neq 1$, то $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Если взять $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то, поскольку $q > 1$, то из первого неравенства системы следует, что $a < 0$, а из второго – что $a > 0$. Следовательно, этот случай невозможен. Если $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, то $q \in (-1; 1)$, поэтому оба неравенства дают условие $a < 0$. Таким образом, ответ: $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Задача 4. Три различных числа, наибольшее из которых равно 4, образуют геометрическую прогрессию. Найдите эту прогрессию, если известно, что после некоторой перестановки ее членов из нее получается арифметическая прогрессия.

Рассмотрим прогрессию a, aq, aq^2. Предположим вначале, что эти числа, взятые в том же порядке, образуют и арифметическую прогрессию, так что $a + aq^2 = 2aq$, откуда $a(1 - q)^2 = 0$, так что $a = 0$ или $q = 1$, чего не может быть, так как по условию все числа различны. Теперь предположим, что числа aq, a, aq^2 образуют арифметическую прогрессию, откуда $2a = aq + aq^2$. Имеем, $q^2 + q - 2 = 0$, значит, $q = 1; -2$, однако первый случай невозможен. Таким образом, исходная геометрическая прогрессия имеет вид $a, -2a, 4a$.

> Заметьте, что из чисел $a, -2a, 4a$ наибольшим может быть как $4a$ (при $a > 0$), так и $-2a$ (при $a < 0$). Таким образом, $a = 1; -2$, значит, мы уже нашли две прогрессии: $1, -2, 4$ и $-2, 4, -8$.

Осталось рассмотреть случай, когда арифметическую прогрессию образуют числа a, aq^2, aq, так что $2q^2 - q - 1 = 0$, откуда $q = 1; -\frac{1}{2}$. Получим прогрессию $a, -\frac{a}{2}.\frac{a}{4}$, таким образом, $a = 4; -8$. Получаем еще две прогрессии: $4, -2, 1$ и $-8, 4, -2$, отличающиеся от найденных ранее лишь порядком своих членов.

Задача 5. Отношение суммы первых трех членов бесконечной возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно $7 : 3$. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\frac{7}{4}$.

Пусть a – это первый член прогрессии, d – ее разность. Сумма первых трех ее членов равна $3 \cdot \frac{a+a+2d}{2} = 3(a + d)$, сумма последующих семи равна $7 \cdot \frac{a+3d+a+9d}{2} = 7(a + 6d)$. В силу первого условия, имеем

$$\frac{3(a + d)}{(a + 6d)} = \frac{7}{3}, \text{ или } 8a = -57d.$$

В силу второго условия, найдется такое натуральное число k, что

$$(a + kd)(a + (k + 1)d) = -\tfrac{7}{4}, \text{ или } d^2\left(k - \tfrac{57}{8}\right)\left(k - \tfrac{49}{8}\right) = -\tfrac{7}{4},$$

следовательно, $\frac{49}{8} < k < \frac{57}{8}$, поэтому $k = 7$. Значит, $\frac{7}{64} d^2 = \frac{7}{4}$, откуда следует, что $d = 4$.

10 Зак. 1116

Главное, что надо осознать в решении следующей задачи, – это то, что его логика ничем не отличается от логики решения иррациональных уравнений при помощи "возведения в квадрат".

Задача 6. Решите уравнение $\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)=2\arcsin x$.

Рассмотрим косинусы от обеих частей данного уравнения: $\cos(\arccos a)=a$ и $\cos(2\arcsin b)=1-2\sin^2(\arcsin b)=1-2b^2$, значит, мы получим $\frac{3}{4}-x=1-2x^2$, или $8x^2-4x-1=0$, откуда $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$. Однако мы не можем быть уверены, что найденные нами значения являются решениями *исходного* уравнения, а знаем лишь то, что все его решения находятся среди найденных нами значений.

Действительно, если $A(x)=B(x)$, то $A^2(x)=B^2(x)$, однако обратное утверждать нельзя. С другой стороны, если мы знаем, что для найденных решений второго уравнения знаки выражений $A(x)$ и $B(x)$ совпадают, то $A(x)=B(x)$, таким образом, мы нашли решение исходного уравнения.

В чем состоит связь приведенного рассуждения с рассматриваемой задачей? От уравнения $\alpha(x)=\beta(x)$ мы перешли к уравнению $\cos(\alpha(x))=\cos(\beta(x))$. Найденные нами значения являются решениями второго уравнения и не обязаны быть решениями первого! Однако если окажется, что при этом значения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ лежат на одном и том же промежутке монотонности косинуса, то в таком случае мы вправе утверждать, что $\alpha(x)=\beta(x)$, таким образом, будет найдено решение исходного уравнения.

Вначале найдем область определения. Имеем, $\left|\frac{3}{4}-x\right|\le 1$ и $|x|\le 1$, значит, $x\in\left[-\frac{1}{4};1\right]$. Однако оба из чисел $\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$ лежат в этом отрезке. Далее, из определения арккосинуса следует, что левая часть уравнения лежит в $[0;\pi]$, значит, и его правая часть должна лежать в этом отрезке, следовательно, в силу определения арксинуса, $x\ge 0$. Таким образом, мы показали, что все решения данного уравнения должны лежать на отрезке $[0;1]$, значит, $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ не является его решением.

Покажем теперь, что всякое лежащее в $[0;1]$ решение второго уравнения (так сказать, "уравнения-следствия") является решением данного уравнения. Действительно, в предположении, что $x \in [0;1]$ и правая его часть, и левая лежат в отрезке $[0;\pi]$, на котором косинус убывает. Следовательно, раз $\cos(\alpha(x)) = \cos(\beta(x))$, то и $\alpha(x) = \beta(x)$! Значит, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ есть решение данного уравнения.

Следующая задача характерна тем, что ее решение состоит из двух шагов, причем на первом из них мы рассуждаем индуктивно и неформально, на втором – используем метод математической индукции.

Задача 7. Последовательность x_n задана соотношениями $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1-x_n}$. Найдите x_{2005}.

Вначале немного посчитаем. Раз $x_1 = 2$, то $x_2 = \frac{2}{-1} = -2$, далее, $x_3 = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$, а $x_4 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$. Конечно, теперь уже можно сделать предположение о виде общего члена данной последовательности, но лучше сделать еще один шаг. Итак, $x_5 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$. Таким образом, можно предположить, что $x_n = -\frac{2}{2n-3}$, так что $x_{2005} = -\frac{2}{4007}$.

Можно ли здесь остановиться? Конечно, нет, предположение, каким бы разумным и убедительным оно ни казалось, остается предположением. Формулу для x_n надо доказать, что проще всего сделать по индукции.

Итак, предположим, что $x_n = -\frac{2}{2n-3}$. Тогда

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1-x_n} = -\frac{\frac{2}{2n-3}}{1+\frac{2}{2n-3}} = -\frac{2}{2n-3} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} = -\frac{2}{2n-1},$$

что и требовалось доказать.

Задача 8. Последовательность $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, задана соотношениями $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, $x_0 = c$.

а) Найдите все c, при которых $x_2 > 0$.

б) Докажите, что если $c > 1$, то эта последовательность монотонна.

в) Найдите все непостоянные конечные арифметические прогрессии, образованные последовательными членами указанной последовательности.

г) Докажите, что существуют последовательности данного вида, имеющие сколь угодно большой период.

а) Поскольку $x_2 = 2(2c^2 - 1)^2 - 1$, то надо просто решить неравенство $(2c^2 - 1)^2 > \frac{1}{2}$, таким образом, $2c^2 - 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $2c^2 - 1 < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $|c| < \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ или $|c| > \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

б) Исходным моментом рассуждения является следующее преобразование: $x_{n+1} - x_n = 2x_n^2 - x_n - 1 = (x_n - 1)(2x_n + 1)$. Поэтому если $x_n > 1$, то $x_{n+1} > x_n$. Для точного рассуждения можно воспользоваться методом математической индукции. Причем удобнее доказывать, что $x_n > 1$. По предположению $x_0 = c > 1$. Индукционный переход: из проведенного выше преобразования следует, что если $x_n > 1$, то $x_{n+1} > x_n > 1$. Поэтому все члены последовательности больше единицы, значит, $x_{n+1} > x_n$, т. е. рассматриваемая последовательность – монотонно возрастающая.

в) Наибольшее число последовательных членов данной последовательности, которые могут образовывать конечную арифметическую прогрессию, равно трем, а первый из них должен быть равен $\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{13})$. Действительно, числа x_{n-1}, x_n, x_{n+1} являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, если $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$. Воспользовавшись равенствами $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ и $x_n = 2x_{n-1}^2 - 1$, получим, что $x_{n+1} - x_n = 2(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$, следовательно,

$$2(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_n - x_{n-1}.$$

Поскольку по условию прогрессия не должна быть постоянной, то $2(x_n + x_{n-1}) = 1$, откуда следует, что $4x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} - 3 = 0$.

Тем самым $x_{n-1} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{13})$. Так как при найденных значениях x_{n-1} имеем $x_n \neq \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{13})$, то числа x_n, x_{n+1}, x_{n+2} не будут последовательными членами никакой арифметической прогрессии, таким образом, прогрессия не может состоять даже из четырех членов.

г) Поймите, каким образом можно догадаться до следующего рассуждения. Если $c = \cos\frac{2\pi}{2^n+1}$, то $x_n = \cos\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1} = c$, причем $x_k \neq c$ при $0 < k < n$. Поэтому данная последовательность имеет число n (произвольное!) своим периодом.

Задача 9. Дана последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которой $a_1 = c > 0$ и $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$.

а) Докажите, что $\sqrt{2} \leq \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

б) Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ убывает, и вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

в) Пусть $c = 1$. Докажите, что все числа a_n, $n \geq 2$, иррациональные.

г) Пусть $c = 2$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = 2\pi$.

Прежде чем излагать формальное (и очень простое) решение этой задачи, заметим, что данное в ее условии рекуррентное соотношение имеет ясный геометрический смысл. Именно: a_{n+1} есть длина хорды единичной окружности, опирающейся на дугу вдвое меньшей длины, чем та, на которую опирается хорда длиной a_n. Из этого наблюдения сразу виден смысл утверждения пункта г!

а) Действительно, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}} = \sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}$. Осталось заметить, что $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}} \leq 2$.

б) Так как $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, то $a_{n+1} < a_n$, более того, поскольку $a_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}} a_n < \ldots < \frac{1}{(\sqrt{2})^n} c \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

в) Если $a_{n+1}^2 \in \mathbb{Q}$, то $a_n^2 \in \mathbb{Q}$, но $a_2^2 = 2 - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

г) Если $c = 2$, то $a_1 = 2\sin\frac{\pi}{2}$. Далее нетрудно доказать по индукции, что $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$, значит, $2^n a_n = 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 10. Про последовательность $\{q_n\}$ известно, что $q_1 = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$ и $q_{n+1} \le q_1 + \ldots + q_n + 1$.

а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.

б) Докажите, что если последовательность q_n такова, что всякое натуральное число представляется в виде суммы некоторых членов последовательности $\{q_n\}$ единственным образом, то

$$(1 + x^{q_1})(1 + x^{q_2})\ldots(1 + x^{q_n}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^N.$$

в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.

а) Индукционное предположение: каждое натуральное число от 1 до $N_n = q_1 + \cdots + q_n$ представимо в виде сумм чисел $q_1, \ldots, q_n$. Тогда, добавляя число q_{n+1}, мы сможем представить еще числа от q_{n+1} до $N_n + q_{n+1} = N_{n+1}$. Поскольку по предположению $q_{n+1} \le q_1 + \ldots + q_n + 1$, в требуемом виде представляются все числа от 1 до N_{n+1}.

б) Раскрывая скобки в левой части, мы будем получать одночлены вида x^s, причем в силу условия на данный набор чисел q_k каждое значение s, $1 \le s \le N = q_1 + \ldots + q_n$, появится ровно один раз, поэтому коэффициент при каждом таком одночлене равен единице.

в) $q_k = 2^{k-1}$. Из результатов предыдущих пунктов следует, что $q_k = q_1 + q_2 + \ldots + q_{k-1} + 1$.

Задача 11. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, \text{ если число } x_n \text{ четно,} \\ \\ x_n + 9, \text{ если оно нечетно.} \end{cases}$$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический "хвост", т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geq N$.

а, б) *Ответ*: четырнадцать последовательностей с начальными членами из множества $X_0 = \{1, 2, \ldots, 9, 10, 12, \ldots, 18\}$. То, что эти числа порождают периодические последовательности, проверяется непосредственно. Если $x_0 \in \{11, 13, 15, 17\}$, то $x_2 \in X_0$, поэтому такая последовательность непериодична, но ее хвост $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ периодичен. Пусть x_k — наименьший член некоторой последовательности, ясно, что число x_k нечетно. Если предположить, что $x_k > 9$, то $x_{k+2} = \frac{1}{2}(x_k+9) < x_k$. Поэтому во всякой последовательности найдется член из множества X_0, следовательно, ее "хвост" будет периодичен.

Задача 12. Сколько существует делящихся на 15 четырехзначных чисел, сумма квадратов цифр которых не больше 26?

Число делится на 15, если оно делится и на 3, и на 5. Значит, его последняя цифра - это 0 или 5. Если последняя цифра пятерка, то, поскольку ее квадрат равен 25, среди оставшихся цифр одна является единицей, а остальные – нулями. Следовательно, такое число одно – это 1005, которое делится и на 3. Теперь предположим, что на конце числа стоит 0, т. е. оно имеет вид $\overline{abc0}$. Чтобы число делилось на 3, сумма $a+b+c$ его цифр должна делиться на 3. Предположим вначале, то $a+b+c=3$. Нам необходимо сделать полный перебор. Если $a=1$, то $b+c=2$, значит, $(b,c)=(0,2);(2,0);(1,1)$. Если $a=2$, то $b+c=1$, откуда $(b,c)=(0,1);(1,0)$. Наконец, при $a=3$ имеем, что $b=c=0$. Все найденные числа занесены в первую колонку таблицы.

Теперь предположим, что $a+b+c=6$, и будем осуществлять перебор аналогичным образом, предполагая, что $a=1$, $a=2$ и так далее, до $a=5$, поскольку если $a=6$, то сумма квадратов цифр этого числа будет больше 26. Полученные при этом переборе числа занесены в следующие три колонки таблицы.

$a+b+c=3$	$a+b+c=6$, $a=1$	$a=2;3$	$a=4;5;6$
1110	1050	2040	4020
1020	1500	2400	4200
1200	1140	2130	4110
2010	1410	2310	5010
2100	1230	2220	5100
3000	1320	3030	
		3300	
		3120	
		3210	

Однако что будет, если $a+b+c=9$? С интуитивной точки зрения кажется, что сумма квадратов этих чисел будет наименьшей при $a=b=c=3$, когда она равна $27>26$, однако как это доказать?

Один из способов доказательства последнего утверждения основан на использовании неравенства между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geq \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2,$$

которое в нашем случае имеет вид $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$, или $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$. Полученное неравенство легко преобразуется к виду $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, что, очевидно, верно.

Значит, если $a+b+c \geq 9$, то $a^2+b^2+c^2 \geq 27$, таким образом, мы нашли все требуемые числа, которых всего оказалось 27.

Дидактический смысл этой задачи состоит в том, чтобы приучить ребят делать полный перебор всех вариантов, что можно сделать, только избрав определенный алгоритм.

Задача 13. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x^2-y^2=2000$?

Дано уравнение $(x+y)(x-y)=2^4 5^3$. Так как числа $x+y$ и $x-y$, будучи целыми, имеют и одинаковую четность, то $x=2a$ и $y=2b$, где $a,b \in \mathbb{Z}$ и $ab=2^2 5^3$. При этом каждой паре (a,b) соответствует единственное решение данного уравнения. Таким образом, количество решений данного уравнения совпадает с количеством чисел вида $\pm 2^s 5^t$, $s=0,1,2$, $t=0,1,2,3$, которых всего имеется $2\cdot 3\cdot 4=24$.

Задача 14. Сколько всего имеется трехзначных чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 12 и 21?

Число, кратное 12, имеет вид $12k$, при этом оно является трехзначным, если $100 \leq 12k \leq 999$, значит, $9 \leq k \leq 83$, таким образом, всего имеется 75 таких чисел. Аналогичным образом подсчитывается количество трехзначных чисел, кратных 21; их 43.

> Однако существуют трехзначные числа, кратные как 12, так и 21, поэтому для того, чтобы избежать повторений при подсчете, из количества делящихся на 21 чисел надо вычесть количество тех из них, которые делятся и на 12, т. е. чисел, делящихся на $4\cdot 3\cdot 7=84$, каковых будет 10. Таким образом, ответ: $75+43-10=108$ чисел.

Задача 15. Два туриста одновременно отправились из пункта A в находящийся от него на расстоянии 60 км пункт B. В их распоряжении имеется один велосипед, на котором они могут ехать по очереди, оставляя его на дороге. За какое наименьшее время они могут добраться до пункта назначения, если пешком они идут со скоростью 5 км/час, а на велосипеде едут со скоростью 20 км/час?

Имеется в виду, что время, за которое они оба добрались до пункта B, вычисляется по времени прихода последнего из них двоих. Представляется интуитивно очевидным, что это время будет наименьшим только в том случае, когда они пришли в B одновременно. А теперь докажем, что если первый турист добрался до B на t часов раньше другого, то, действительно, можно изменить порядок их движения по маршруту та́к, чтобы время, затраченное вторым туристом, сократилось.

Предположим, что первый турист вошел в B пешком. Пусть он в последний раз оставит велосипед на a км ближе к пункту A, чем он это сделал в действительности. В этом случае он придет в B на $\frac{a}{5} - \frac{a}{20} = \frac{a}{4}$ часов позже, но зато второй турист придет в B на $\frac{a}{4}$ часов раньше. Если положить $\frac{a}{4} = \frac{t}{2}$, т. е. взять $a = 2t$, то оба они доберуться до B одновременно, и притом на $\frac{t}{2}$ часов раньше. В случае, если первый турист последний этап до пункта B проехал на велосипеде, то надо, чтобы он взял его попозже (проведите рассуждение самостоятельно).

Таким образом, нам надо выбрать такую схему движения, при которой они доберутся до B одновременно. Предположим, что первый из них идет x км пешком, а y км едет на велосипеде. Ясно, что поскольку велосипед у них только один, то второй турист y км идет пешком, x км едет. Так как они должны прибыть одновременно, то

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{20} = \frac{y}{5} + \frac{x}{20}, \text{ откуда следует, что } x = y = 30.$$

В частности, совсем не важно, в какие моменты они будут оставлять друг другу велосипед, важно лишь, чтобы каждый из них половину расстояния между A и B прошел пешком, а другую половину проехал на велосипеде. Например, первый турист может сразу проехать половину дороги, а другую идти пешком, на что ему (им) потребуется 7, 5 часов.

Прекрасная задача для обсуждения, поскольку учащиеся, скорее всего, будут высказывать много бездоказательных утверждений.

Справочник

Прогрессия	Арифметическая	Геометрическая
Определение	$x_n = x_{n-1} + d$	$x_n = x_{n-1} \cdot q$
Переформулировка	$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n$	$x_{n+1} \cdot x_{n-1} = x_n^2$
Формула для x_n	$x_n = x_1 + d(n-1)$	$x_n = x_1 q^{n-1}$
Формула суммы	$S_n = \frac{x_1+x_n}{2}\, n$	$S_n = \frac{x_1 - x_n q}{1-q}$

Задачи для самостоятельного решения

14.1. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если среднее из них уменьшить на 40%, то получится геометрическая прогрессия, сумма которой равна 39. Найдите эти числа.

14.2. Четыре числа взяты в некотором порядке. Сумма первого и последнего равна 7, а сумма двух средних – 6. Найдите эти числа, если известно, что первые три из них образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую.

14.3. Найдите все такие x, что числа $|x-1|$, $3-x$ и $3x-5$, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше единицы.

14.4. Различные числа a, b, c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, а числа $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$ (в том же порядке) – арифметическую. Найдите сумму арифметической прогрессии.

14.5. Обозначим через S_n сумму n первых членов арифметической прогрессии. Найдите все прогрессии, для которых $S_n S_k = S_{nk}$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$.

14.6. а) Решите неравенство $\arcsin \frac{2}{x} \le \frac{\pi}{6}$.
б) Решите уравнение $\arcsin(\cos x) = \arccos(\sin x)$.

14.7. Решите уравнения: а) $\arccos\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \arcsin x$;
б) $\arccos x = \frac{2}{3} \arcsin 2x$.

14.8. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение $\arccos 3x + \arcsin(x + a) = 0$.

14.9. Рассматриваются последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых $x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$, $n \ge 1$.

а) Пусть $x_0 = \frac{1}{2}$. Вычислите x_{2000}.

б) Докажите, что если $x_0 < 1$, то эта последовательность монотонна.

в) Найдите множество C всех чисел, которые не могут являться начальными членами x_0 таких (бесконечных) последовательностей.

г) Найдите множество начальных членов x_0 монотонных последовательностей $\{x_n\}$.

14.10. Дана $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^{-n}$, $n = 0, 1 \ldots$.

а) Докажите, что $3x_{n+1} = 7x_n - 2x_{n-1}$ при всех $n \ge 1$.

б) Известно, что $x_{1999} > 0$. Верно ли, что $x_{2000} > 0$?

в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

14.11. Известно, что числа $x_1, x_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $y_1, y_2, \ldots$ – геометрическую, причем $x_1 = y_1$ и $x_k = y_k$ при некотором $k > 2$. Докажите, что если $x_2 > y_2$, то $x_n > y_n$ при всех $n = 2, \ldots, k-1$ и $x_n < y_n$ при всех $n > k$.

14.12. Сколькими различными способами можно разменять 1000 рублей при помощи двух- пяти- и десятирублевых монет?

14.13. Сколько существует разных треугольников, стороны которых являются целыми числами, не превосходящими 10?

14.14. Сколько существует различных типов: а) кубов, грани которых раскрашены в два цвета; б) каркасов правильных тетраэдров, ребра которых раскрашены в два цвета? Раскраски тел считаются одинаковыми, если эти тела невозможно различить.

14.15. Сколько имеется непрерывных функций, графики которых лежат в объединении прямых: а) $y = \pm x$; $y = \pm 2x$; б) $y = x$, $y = -x$, $y = -\frac{1}{2}(x+2)$, $y = 2x + 5$?

Комментарии и советы

14.1. Запишите данную прогрессию в виде $a - d, a, a + d$.

14.2. Составьте систему из 4 уравнений с 4 неизвестными – искомыми числами.

14.3. Найдите вначале все x, при которых из данных чисел можно составить арифметическую прогрессию.

14.4. Ясно, что найти надо просто число b. Не пугайтесь преобразований, которые вам придется провести.

14.5. Пусть $s(x) = ax^2 + bx + c$. При каких a, b, c эта функция является мультипликативной, т. е. $s(x)s(y) = s(xy)$?

14.6. а) Надо просто решить систему неравенств.
б) См. задачу 6.

14.7. а) См. задачу 6. б) Если провести исследование, то решать ничего не придется.

14.8. Сведите уравнение к виду $-x - \sqrt{1-9x^2} = a$ и введите ограничение на x.

14.9. а) См. задачу 7. б) См. задачу 8б. в) Число x_0 не будет начальным членом бесконечной последовательности, если в этой последовательности $x_n = 2$ при некотором n. г) Рассмотрите вначале $x_0 > 2$ и покажите, что соответствующая последовательность монотонной не будет.

14.10. а) Покажите, что последовательности $x_n = 2^n$ и $y_n = 3^{-n}$ удовлетворяют указанному соотношению, и выведите отсюда требуемое утверждение. б) Можно ли найти последовательность, в которой $x_{1999} = 1$, а $x_{2000} = -1$?
в) Попробуйте рассуждать от противного.

14.11. Рассмотрите уравнение $a - d + dx = bq^{x-1}$.

14.12. Сколько должно быть двухрублевых монет?

14.13. Осуществите перебор, фиксируя длину наибольшей стороны треугольника.

14.14. а, б) Зафиксируйте число граней (ребер) заданного цвета.

14.15. а) Ответ очевиден. Однако для того, чтобы найти идею, при помощи которой можно будет решить задачу следующего пункта, попробуйте рассуждать по-иному. Рассмотрите число различных функций, определенных на луче $(-\infty; 0]$, график которых лежит в объединении данных прямых, а затем поймите, как определить число функций, заданных на $(-\infty; 1]$, график которых проходит через точки: $(1,-2)$; $(1,-1)$; $(1,1)$; $(1,2)$.

Ответы и комментарии

14.1. $3, 15, 27$.

14.2. $(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 6)$; $\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

14.3. Из данных чисел можно составить арифметическую прогрессию при $x \geq 1$, причем она не будет постоянной только в том случае, когда число $|x - 1|$ является ее средним членом. А теперь, решив неравенство $|3x - 5 - 3 + x| > 2$, получите ответ: $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

14.4. Сумма арифметической прогрессии равна $\frac{3}{b+1} = \frac{3}{2}$. Если задать геометрическую прогрессию в виде $\frac{b}{q}, b, bq$, то из того условия, что числа $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$ образуют арифметическую прогрессию, следует, что $(b-1)(q-1)^2 = 0$.

14.5. Такая последовательность всего одна: $1, 3, 5, \ldots$ Действительно, сумма S_n арифметической прогрессии является квадратичной функцией числа n ее членов. Нетрудно показать, что квадратичная функция $an^2 + bn + c$ является мультипликативной только при $a = 1$, $b = c = 0$. Таким образом,

$$S_n = n^2 = x_1 \cdot n + \frac{d}{2}(n^2 - n),$$

откуда $d = 2$ и $x_1 = 1$.

14.6. а) $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. б) $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

14.7. а) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. б) $x = \frac{1}{2}$, что следует сразу из исследования области определения уравнения и условия того, что его правая и левая части принимают значения в одном и том же множестве.

14.8. $x \in \left[-\frac{\sqrt{10}}{3}; -\frac{1}{3}\right]$. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a + x = -\sqrt{1 - 9x^2}, \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

таким образом, осталось найти множество значений функции
$y = -x - \sqrt{1 - 9x^2}$ при $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, что проще всего сделать с использованием производной.

14.9. а) $x_{2000} = \frac{2001}{2002}$. б) Докажите, что если $x_0 < 1$, то $x_n < 1$ при всех n. в) Множество $\left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ состоит из начальных данных x_0 последовательностей, некоторый последующий член которых равен 2. г) Если $x_0 < 1$, то такая последовательность возрастает, если $x_0 = 1$, то она стационарна. Если $x_0 > 2$, то $x_1 < 0 < x_2$, значит, она не является монотонной. Наконец, докажите, что если $\frac{n+1}{n} < x_0 < \frac{n}{n-1}$, то $x_{n-1} > 2$.

14.10. б) Нет, не верно. в) Если такая арифметическая прогрессия существует, то $2^n + 3^{-n} = a + dk_n$, где $k_n \in \mathbb{N}$. Ясно, что числа a и d рациональны, обозначим через q их общий знаменатель. Запишем соотношение в виде

$$3^{-n} = a + dk_n - 2^n$$

и перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$. Выражение в левой части этого равенства отлично от нуля и стремится к нулю, однако справа находятся рациональные числа, знаменатели которых не больше q, так что правая часть стремиться к нулю не может. Полученное противоречие доказывает, что арифметической прогрессии, содержащей все члены заданной последовательности, не существует.

14.11. Так как по условию $a - d + dx = bq^{x-1}$ при $x = 1; k$, а функция $y = bq^x$ является выпуклой (выпуклой вверх), то других решений это уравнение не имеет. Из условия $x_2 > y_2$ следует, что функция $y = bq^x$ выпукла, значит, $a - d + dx > bq^{x-1}$ при $1 < x < k$, в частности при натуральных значениях n из этого интервала. Осталось заметить, что $a - d + dn = x_n$, $bq^{n-1} = y_n$.

14.12. Если $2x+5y+10z = 1000$, где $x, y, z = 0, 1, 2\ldots$, то $x = 5k$, $k = 0, 1, 2\ldots$, откуда получаем, что $y = 200 - 2k - 2z$. Из условия $y \geq 0$ следует, что $k \leq 100 - z$. Таким образом, при фиксированном $z = 0, 1, \ldots, 100$ имеем, что $k = 0, 1, \ldots, 100 - z$, следовательно, количество вариантов размена является суммой арифметической прогрессии. Ответ: 5151 вариантов.

14.13. Обозначим через a длину наибольшей стороны треугольника. Если $a = 1$, то $b = c = 1$. Если $a = 2$, то $(b, c) = (2, 2)$ или $(b, c) = (2, 1)$.

> Обратите внимание, что при $(b, c) = (1, 2)$ мы получим равный треугольник, поэтому имеет смысл ввести условие $b \geq c$.

Не будем теперь делать простой перебор, а постараемся вывести формулу для числа треугольников, у которых $a = k$. При этом нам придется рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного k.

Пусть $k = 2n$. Длины b и c должны удовлетворять неравенствам $b + c \geq 2n + 1$ и $c \leq b \leq 2n$. При фиксированном b из множества $\{n + 1, \ldots, 2n\}$ возможные значения c лежат в отрезке $[2n + 1 - b; b]$, таким образом, их всего $2(b - n)$. Следовательно, число пар (b, c) является суммой арифметической прогрессии $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Теперь пусть $k = 2n + 1$. Тогда $b \in \{n + 1, \ldots, 2n + 1\}$, при фиксированном b значение c лежит между $2n + 2 - b$ и b, значит, таковых имеется $2(b - n) - 1$. Поэтому всего будет $1 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ пар (b, c). Общую формулу выводить не будем, а вместо этого составим табличку, в нижней строке которой указано число треугольников, наибольшая сторона которых имеет длину k.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30

Следовательно, всего имеется 125 таких треугольников.

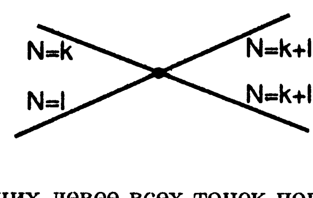
14.14. Ответы: а) 10 типов; б) 12 типов, следуют из таблиц, в которых указано число типов кубов (каркасов тетраэдров) с заданным количеством белых граней (соответственно, ребер).

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	2	1	1

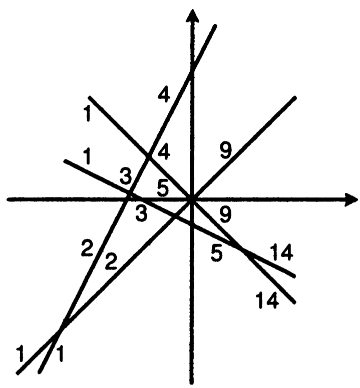
0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	2	1	1

Удивление может вызвать только число 4, стоящее в середине правой таблицы. На первый взгляд кажется, что существуют только три типа раскраски каркаса, при котором ровно три ребра являются белыми. Именно когда три белых ребра: 1) выходят из одной вершины; 2) являются сторонами одной грани; 3) образуют незамкнутую трехзвенную ломаную. Однако, в действительности, имеются типы 3_1 и 3_2, поскольку ломаная может быть "правой" и "левой", таким образом, эти типы различимы.

14.15. Ответы: а) 16; б) 41 функция. Рассмотрим точку (x_0, y_0), лежащую в заданном объединении, и обозначим через $\mathcal{N}(x_0, y_0)$ число непрерывных функций, заданных на луче $(-\infty; x_0]$, график которых проходит через (x_0, y_0). Если мы движемся по объединению лучей слева направо, то значение $\mathcal{N}(x_0, y_0)$ меняется только в точках пересечения данных прямых, причем так, как это изображено на следующем рисунке:



В точках, лежащих левее всех точек попарного пересечения данных прямых, значение $\mathcal{N}$ равно единице. Двигаясь слева направо, мы будем получать значения, которые отмечены на рисунке. Сумма $4 + 9 + 14 + 14 = 41$ и дает искомое число функций.



15. Функции, уравнения, неравенства

"Обобщающее повторение" основных понятий алгебры и начал математического анализа и их использование при решении уравнений, неравенств, систем, а также доказательстве неравенств.

Обсуждение. Задачи этого раздела взяты из вариантов так называемого профильно-элитарного выпускного экзамена, проводившегося в Санкт-Петербурге с 1990 по 2002 год (в первые годы это был неформальный экзамен, проводившийся Петербургским математическим обществом). Тематика задач – стандартная, речь идет о свойствах показательной, логарифмической, тригонометрических функций и решении соответствующих уравнений и неравенств.

Каждая из предлагаемых здесь задач состоит из четырех пунктов, первые два из которых достаточно просты и, во многих случаях, достаточно стандартны. Однако постарайтесь решить их наиболее рациональным методом; тот опыт, который вы при этом приобретете, будет полезен при решении последующих, зачастую, существенно более сложных, пунктов. К примеру, как показано в решении задачи 1, сделанная в самом начале замена упрощает не только решение стандартного уравнения (пункт а) и неравенства б), но и позволяет ограничиться исследованием и построением графиков функций, представленных алгебраическими дробями.

Задача 1. Дана функция $f(x) = \dfrac{4^x - a \cdot 2^x}{2^x - 1}$.

а) Пусть $a = -2$. Решите уравнение $f(x+1) = f(x)$.

б) Пусть $a = \frac{7}{2}$. Решите неравенство $f(x) + f(-x) \leq 0$.

в) Найдите все значения a, при которых функция f монотонна на луче $(-\infty; 0)$.

г) Найдите все значения a, при которых существует такое b, что уравнение $f(x) = b$ не имеет решений.

Ясно, что сразу следует сделать замену $t = 2^x$ и вместо функции $f(x)$ рассматривать функцию $g(t) = \frac{t^2-at}{t-1}$, связь между которыми дает формула $f(x) = g(2^x)$. Таким образом, $f(x+1) = g(2^{x+1}) = g(2t)$ и $f(-x) = g(2^{-x}) = g\left(\frac{1}{t}\right)$.

а) Ответ: $x = 1$. При $a = -2$ получаем уравнение

$$\frac{4t^2+4t}{2t-1} = \frac{t^2+2t}{t-1}, \quad \text{или} \quad t(2t^2-3t-2) = 0.$$

Положительным корнем уравнения является $t = 2$, откуда и следует ответ.

б) Ответ: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Имеем, $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1-at}{t(1-t)}$, при $a = \frac{7}{2}$ получаем неравенство

$$\frac{t^2-\frac{7}{2}t}{t-1} + \frac{1-\frac{7}{2}t}{t(1-t)} \leq 0, \quad \text{или} \quad \frac{(t-1)(t-2)(t-\frac{1}{2})}{t(t-1)} \leq 0.$$

Множитель $t-1$ можно сократить, введя условие $t \neq 1$. Так как $t > 0$, то $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2]$, откуда и следует ответ.

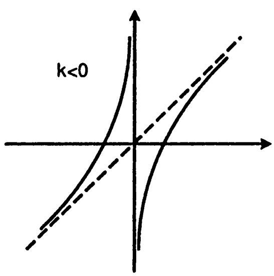
в) Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. Условие данной задачи равносильно вопросу о значениях a, при которых функция $g(t)$ монотонна на интервале $(0; 1)$. Найдем производную этой функции,

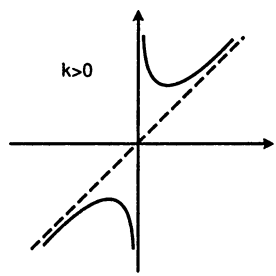
$$g'(t) = \frac{(2t-a)(t-1)-(t^2-at)}{(t-1)^2} = \frac{t^2-2t+a}{(t-1)^2}.$$

Полученное выражение сохраняет знак на $(0; 1)$, если a не меньше наибольшего значения функции $y = 2t - t^2$ на отрезке $[0; 1]$

либо не больше ее наименьшего значения на этом отрезке. Поскольку функция $y = 2t - t^2$ возрастает на $[0; 1]$, то своего наименьшего значения 0 она достигает на левом конце отрезка, а наибольшего значения 1 – на правом, откуда и следует ответ.

г) Ответ: $a \leq 1$. При $b = 0$ решение данного уравнения существует, только если $a > 0$. Однако бесполезно пытаться угадать ответ, лучше продолжить начатое в решении предыдущего пункта исследование поведения *функции* $g(t)$ в зависимости от значения параметра a. Удобнее сделать еще одну замену, положив $u = t - 1$, и исследовать функцию $y = u + \frac{1-a}{u} + 2 - a$. Слагаемое $2-a$ никак не влияет на ответ. Рассмотрим функцию $y = u + \frac{k}{u}$ при различных значениях параметра k. На следующих рисунках приведены эскизы графиков при положительных и отрицательных k, из которых ясно, что только при $k < 0$ данное уравнение всегда будет иметь решение.





Задача 2. Дана функция $f(x) = \dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x}$.

а) Пусть $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. Решите уравнение $f(x) = 4$.

б) При тех же значениях a и b решите неравенство $f(x) \geq 0$.

в) Пусть $a = 1$. Найдите все такие значения b, что данная функция убывает на интервале $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

г) Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 1$ имеет ровно три решения на отрезке $[0; 2\pi]$ тогда и только тогда, когда $a^{2/3} + b^{2/3} = 1$.

а) Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Избавьтесь от знаменателя и используйте формулу $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$.

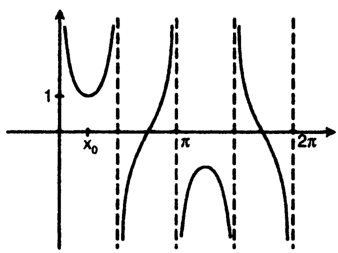
б) Достаточно записать неравенство в виде $\frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{\sin 2x} \geq 0$ и исследовать знаки числителя и знаменателя, откуда и будет следовать ответ:
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Функция f будет убывающей на интервале $(0; \frac{\pi}{3})$, если на этом интервале ее производная неположительна. Имеем,

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{b\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}(\operatorname{tg}^3 x - b) \leq 0,$$

если $b \geq \operatorname{tg}^3 x$ при $x \in (0; \frac{\pi}{3})$, т. е. если $b \geq \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$.

г) График функции f при $a, b > 0$ показан на рисунке.



Уравнение $f(x) = 1$ будет имеет три решения на отрезке $[0; 2\pi]$, если $1 = f(x_0)$, где x_0 – точка минимума данной функции. В силу результата пункта в) имеем: $\operatorname{tg}^3 x_0 = \frac{b}{a}$, откуда и следует, что $f(x_0) = \frac{a}{\cos x_0} + \frac{b}{\sin x_0} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Задача 3. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2 - 1)$.

а) Пусть $a = 0$. Решите уравнение $f(x) = 1$.

б) Пусть $a = -1$. Решите неравенство $f(x) \geq -1$.

в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, a), что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?

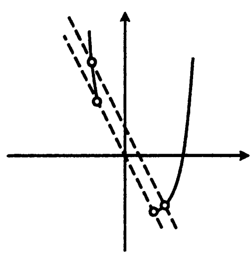
г) Найдите все такие положительные a, при которых для любого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.

а) Ответ: $x = 1 + \sqrt{2}$. б) Ответ: $x \in \left[\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$. Задачи обоих этих пунктов совершенно стандартны. Сделаем лишь одно замечание. Так как областью определения неравенства б) является луч $x > 1$, то $2x - 1 > 1$, следовательно, это неравенство равносильно тому, что $x^2 - 1 \geq (2x-1)^{-1}$, $x > 1$.

в) Ответ: $a \in (-2; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 - 2\sqrt{2}; +\infty)$. Ясно, что уравнение $\log_{a+2x}(x^2 - 1) = 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 1 = a + 2x, \\ |x| > 1, \\ a + 2x > 0, \\ a + 2x \neq 1. \end{cases}$$

В силу первого уравнения, одно из двух следующих за ним неравенств можно отбросить. Уравнение $y = x^2 - 2x - 1$ задает параболу, на которой нам следует взять лишь те ее точки, которые лежат вне полосы $|x| \leq 1$ и не совпадают с точками пересечения этой параболы и прямой $y = 1 - 2x$, т. е. не совпадают с точками $(-\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}), (\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$ (рисунок).

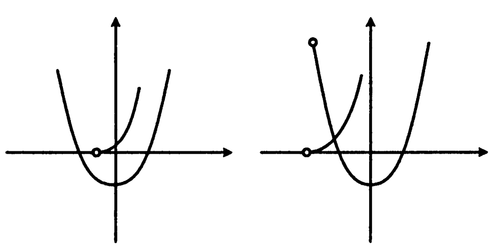


Теперь ничего не стоит получить ответ на второй вопрос, имеющий следующую геометрическую переформулировку: при каких a на изображенном множестве существует точка с ординатой, равной a второй? Более того, ясна и зависимость от a числа корней уравнения $f(x) = a$.

Конечно, уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1)=1$ можно было решать чисто алгебраически. Пришлось бы исследовать, при каких условиях корни уравнения $x^2-2x-(a+1)=0$ входят в область определения исходного уравнения, т. е. потребовалось бы решать иррациональные неравенства $|1\pm\sqrt{2+a}|>1$ и уравнения $a+2(1\pm\sqrt{2+a})=1$. Если же еще не обратить внимание на то, что неравенства $|x|>1$ и $2a+x>0$ для корней квадратного уравнения имеют место одновременно, то придется также решать неравенства $2a+1\pm\sqrt{2+a}>0$.

Таким образом, первый вопрос в данной задаче указывает подход, при помощи которого проще найти ответ и на второй вопрос.

г) Ответ: $a\in(2;1+2\sqrt{2})\cup(1+2\sqrt{2};+\infty)$. Можно нарисовать график функции $y=\log_{a+2x}(x^2-1)$ в зависимости от значения a, однако проще перейти к уравнению $x^2-1=(a+2x)^n$. На рисунках изображены графики $y=x^2-1$ и $y=(a+2x)^n$, $x\geq-\frac{a}{2}$, при $0<a\leq2$ и $a>2$. Ясно, что в первом случае при достаточно больших n (именно $n\geq2$) эти графики не пересекаются, а во втором они имеют одну (и только одну – почему?) общую точку. Осталось исключить тот случай, когда их общая точка совпадает с $(-\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$, т. е. исключить $a=1+2\sqrt{2}$.



Задача 4. Дана функция

$$f(x)=\cos^3x+a\cos^2x\sin x+b\cos x\sin^2x+\sin^3x.$$

а) Найдите a и b, если известно, что числа $\pm\frac{\pi}{4}$ являются корнями функции f.

б) Пусть $a = b = -1$. Решите неравенство $f(x) \le 0$.

в) Пусть $b = -3$. Решите уравнение $f(x) = \cos 3x$.

г) Найдите все пары (a, b), при которых период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$.

а) Подставив $x = \frac{\pi}{4}$, получим уравнение $a + b + 2 = 0$, подставив $x = -\frac{\pi}{4}$ – уравнение $a = b$, откуда и следует, что $a = b = -1$.

б) Ответ: $x \in \{\frac{\pi}{4} + 2\pi k\} \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем:

$$\cos^3 x - \cos^2 x \sin x - \cos x \sin^2 x + \sin^3 x =$$
$$\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$(\cos x - \sin x)^2(\cos x + \sin x) \le 0,$$

откуда $\cos x = \sin x$ или $\cos x + \sin x \le 0$.

в) Ответ: $x = \pi k$ при всех a; $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \pi k$ при $a < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу формулы $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$, получим уравнение $\sin x((a-1)\cos^2 x + 1) = 0$, откуда $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{1-a}$. Осталось заметить, что уравнение $\cos^2 x = \frac{1}{1-a}$ имеет решение лишь при $a \le 0$.

г) Ответ: $a = b = -3$. Действительно, если $a = b = -3$, то функция $f(x) = \cos 3x - \sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$. Для того чтобы показать, что других значений нет, рассмотрим уравнения $f(0) = f(\frac{2\pi}{3})$ и $f(\pi) = f(\frac{\pi}{3})$. В результате получим систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{8}(a+3) - \frac{3}{8}(b+3) = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{8}(a+3) + \frac{3}{8}(b+3) = 0, \end{cases}$$

из которой и следует ответ.

Задача 5. Дана функция $f(x) = \log_2^2 x + \log_x 4$.

а) Решите уравнение $f(x) = 3$.

б) Решите неравенство $f(x) \ge -1$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет единственное решение.

г) Определите число корней уравнения $f(x) = f(2x)$.

а) Ответ: $x = 2; \frac{1}{4}$. Сделав замену $t = \log_2 x$, мы получим, что $f(x) = t^2 + \frac{2}{t}$ (более формально: $f(x) = g(\log_2 x)$, где $g(t) = t^2 + \frac{2}{t}$). Данная замена приводит уравнение пункта а) задачи к виду $t^2 + \frac{2}{t} = 3$, или $t^3 - 3t + 2 = 0$. Поскольку, как нетрудно видеть, $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$, то $t = 1$ или $t = -2$.

б) Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$. Проделав аналогичные преобразования, мы придем к неравенству

$$\frac{(t+1)(t^2 - t + 2)}{t} \geq 0,$$

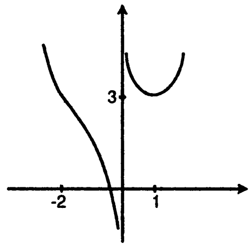
откуда $t \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

При решении заданий пунктов в, г) удобно воспользоваться графической интерпретацией уравнения $f(x) = a$, для чего следует построить график функции g. Вначале попробуем обойтись без вычислений. Из формулы $g(t) = t^2 + \frac{2}{t}$ ясно, что

$$g(t) \to \pm\infty \text{ при } t \to \pm 0,$$

а при больших значениях $|t|$ график искомой функции близок к графику простой квадратичной функции. Таким образом похоже, что график функции g имеет такой вид, как это показано на рисунке. Для того чтобы в этом убедиться и заодно найти промежутки монотонности и точку минимума функции g, поступим стандартным образом.

Поскольку $g'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t^3-1)}{t^2}$, то $g'(t) \geq 0$ при $t \in [1; +\infty)$ и $g'(t) \leq 0$ при $t \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$. Значит, функция g возрастает на луче $[1; +\infty)$ и убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$. Точка A (см. рисунок) имеет координаты $(1, 3)$. Кстати, из ответа к заданию пункта а) следует, что касательная $y = 3$ к графику в точке A имеет с этим графиком еще одну точку пересечения – $B(-2, 3)$.



в) Ответ: $\frac{1}{4} < a < 1$. Как и ранее, сделаем замену $t = \log_2 x$ и положим дополнительно $b = f(a)$. Из графика функции g ясно, что уравнение $g(x) = b$ имеет единственное решение (а значит, имеет единственное решение и уравнение $f(x) = b$) при $b < 3$, т. е. $f(a) < 3$. Снова обратившись к изображенному на рисунке графику функции g, получаем, что $-2 < \log_2 a < 0$.

Другой способ решения этой задачи основан на прямом исследовании сводящегося к кубическому уравнения $g(t) = g(c)$, которое, очевидно, имеет решение $t = c$. Поделив на $t - c$, получим квадратное уравнение, которое по условию или не имеет решений, или же имеет единственное решение $t = c$ (последний случай в действительности невозможен).

г) Ответ: один корень. При помощи той же замены уравнение $f(x) = f(2x)$ сводится к виду $g(t) = g(t+1)$, из которого при помощи прямых пребразований получаем уравнение $t(t+1)(t+\frac{1}{2}) = 1$. Всякое кубическое уравнение имеет по крайней мере один действительный корень. Осталось показать, что в данном случае он действительно один, что опять-таки легче сделать посредством исследования функции $y = t(t+1)(t+\frac{1}{2})$. (Кстати, удобно сделать дополнительную замену $u = t + \frac{1}{2}$, в результате чего уравнение примет вид $u(u^2 - \frac{1}{4}) = 1$).

Задачи для самостоятельного решения

15.1. Дана функция $f(x) = \log_2^3 x - 3\log_2^2 x$.

а) Решите неравенство $f(x) \geq 0$.

б) Решите уравнение $f(x) = -4$.

в) При каких значениях a неравенство $f(x) < a\log_2 x$ выполняется при всех x из отрезка $[2; 4\sqrt{2}]$?

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a

15.2. Дана функция $f(x) = \sin x \sin 3x$.

а) Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.

б) Найдите наименьшее положительное решение системы

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ \cos 5x = 1. \end{cases}$$

в) Найдите область значений функции f.

г) Пусть $g(t)$— наименьшее значение функции f на отрезке $[t; t + \frac{\pi}{2}]$. Найдите наибольшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

15.3. Дана функция $f(x) = \log_2 x + \log_{2x} x$.

а) Докажите, что числа x и $\frac{1}{4x}$ входят в область определения функции f одновременно и $f(\frac{1}{4x}) = -f(x)$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f(2)$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \geq 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на луче $[1; +\infty)$.

г) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = a\log_2^2 2x$ имеет три решения.

15.4. Дана функция $f(x) = \cos ax + \cos 2ax$.

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все a, при которых $f(\frac{\pi}{2}) > 0$.

в) Найдите все a, при которых $f(x) > 0$ при всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

г) Найдите все a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

15.5. Дана функция $f(x) = 2^x - ax$.

а) Решите неравенство $f(3x) \geq f(2x) + f(x)$.

б) Найдите все такие значения a, при которых уравнение $f(2x) = f(x) + f(x+1)$ имеет единственное решение.

в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Решите уравнение $\sqrt{f(x)} + x = 0$.

г) Пусть $a = 1$. Найдите с точностью 0,03 положительный корень уравнения $f(x) = 1024$.

15.6. Пусть $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Найдите все $x \in [1; 2]$, для которых $f_5(x) \leq f_3(x)$.

б) Решите уравнение $f_5(x) = 2f_3(x)$.

в) Найдите все a, такие что уравнение $f_3(x) = f_3(a)$ имеет ровно два решения на отрезке $[0; \pi]$.

г) Существует ли такой многочлен q, что $q(\sin x) = f_{1996}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

15.7. Дана функция $f(x) = \log_{x+1} ax$.

а) Известно, что $x = 1$ — корень уравнения $f(x) = 3$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.

б) Пусть $a = \frac{9}{2}$. Решите неравенство $f(x) \geq f(\frac{1}{x})$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение.

г) Докажите, что если для некоторого натурального n уравнение $f(x) = n+1$ имеет положительный корень, то $a > ne$.

15.8. Дана система $4\cos x - 3\cos y = a$, $4\sin x + 3\sin y = b$.

а) Решите систему при $a = b = 0$.

б) Решите систему при $a = 3, b = 4$.

в) Найдите наибольшее значение площади четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 1, 3, 1 и 4.

г) Изобразите на плоскости множество всех точек $M(a, b)$, таких что данная система имеет решение.

15.9. Дана функция $f(x) = \log_2(2^x + a)$.

а) При каком значении a прямая $y = \frac{x+1}{2}$ касается графика функции f?

б) Докажите, что $f(0) \leq \frac{a}{\ln 2}$.

в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Сколько решений (в зависимости от b) имеет уравнение $f(x) = \frac{x}{2} + b$?

г) Пусть a, $t > 0$. Докажите, что $\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| < 4a$.

15.10. Дана функция $f(x) = \sin ax \sin x$.

а) Пусть $a = 3$. Решите уравнение $$\frac{f(2x)}{f(x)} = -2.$$

б) Найдите все a, при которых $$\int\limits_0^\pi f(x)\,dx \geq 0.$$

в) Пусть x_a – наименьший положительный корень уравнения $f(x) = \cos x$. Найдите наименьшее значение x_a.

г) Найдите все a, при которых $f(x) \geq \frac{1}{2}$ при всех $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Комментарии и советы

15.1. Сделайте стандартную замену, после чего будет нетрудно разложить на множители многочлен t^3-3t^2+4. Неравенство $t(t^2-3t-a)<0$ выполнено на отрезке $\left[1;\frac{5}{2}\right]$, если a больше наибольшего значения функции $y=t^2-3t$ на этом отрезке. Для исследования числа решений уравнения $f(x)=b$ постройте график функции $y=t^3-3t^2$.

Хорошая и простая задача.

15.2. Удобно выразить произведение $\sin 3x\sin x$ через $\cos 2x$. Чтобы решить данную систему, достаточно определить, какие из решений первого уравнения являются также решениями второго. Область значений функции $f(x)$ совпадает с областью значений квадратного трехчлена при $t\in[-1;1]$. Для решения последнего пункта покажите и воспользуйтесь тем, что наименьшее значение функции $f(x)$ на всяком отрезке длины $\frac{\pi}{2}$ не может быть положительным числом. Что еще придется доказать?

Три пункта задачи совершенно стандартны, решение четвертого также несложно, однако оно основано не на преобразованиях, а на некотором рассуждении.

15.3. Сделайте стандартную замену $t=\log_2 x$ и найдите выражение для функции $g(t)=g(\log_2 x)=f(x)$: кстати, как представить через g выражение $f\left(\frac{1}{4x}\right)$? Для решения пункта в) используйте монотонность. При решении последнего пункта удобно сделать другую замену, именно $u=\frac{1}{\log_2 2x}$ и затем исследовать число решений полученного кубического уравнения (конечно, используя графические соображения).

15.4. Для решения уравнения проще всего преобразовать сумму косинусов в произведение. Пункт б) иногда ставит в тупик, однако замена $t=\cos\frac{a\pi}{2}$ сводит задачу к решению квадратного неравенства. Наиболее простой способ решения задачи пункта в) основан на построении графика $y = \cos x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ и его преобразовании. Оказывается, что если $a > 0$, то $f(x) > 0$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, если $\frac{\pi}{3a} > \frac{\pi}{2}$. Последний пункт данной задачи достаточно сложен для учащихся, хотя по сути в нем ничего сложного нет. Другое дело, что рассуждение состоит из нескольких ходов. Во-первых, надо написать тождество, которому удовлетворяет центр симметрии (x_0, y_0) графика: $f(x_0 - x) + f(x + x_0) = 2y_0$, из которого следует, что $c_1 \cos u + c_2 \cos 2u = const$, что может иметь место только, если $c_1 = c_2 = 0$. Наконец, остается показать, что, за исключением очевидного случая $a = 0$, эти два равенства одновременно выполняться не могут.

15.5. Сделайте замену $t = 2^x$ и затем исследуйте число положительных решений уравнения $a = 3t - t^2$, для чего проще всего изобразить часть соответствующей параболы. Далее покажите, что уравнение $2^x = x^2 + \frac{x}{2}$ имеет единственный отрицательный корень (использовав соображения, основанные на монотонности и положительности левой части), который несложно угадать. Последний пункт достаточно сложен. Постарайтесь хотя бы угадать ответ и, может быть, привести правдоподобные рассуждения в его обоснование.

15.6. Будет, мягко говоря, неумно представить $\sin 5x$ и $\sin 3x$ в виде многочленов от $\sin x$ (кстати, какую степень они будут иметь?), хотя на этом пути и можно получить ответ. Лучше воспользоваться формулой разности синусов. Однако задача усложнена тем, что придется сравнить числа вида $\frac{2k+1}{8}$ с 1 и 2. Кстати, найденное преобразование подскажет, каким образом следует преобразовывать уравнение из пункта б). Для решения следующего пункта сначала покажите, что уравнение $\sin 3x = b$ имеет два решения на отрезке $[0; \pi]$ при $b = 1$ и $-1 < b < 0$ (проще всего –

11 Зак. 1116

графически). Что касается последнего пункта, то с интуитивной точки зрения такого многочлена не существует, попробуйте доказать это, рассуждая от противного. Однако обратите внимание, что рассуждение типа: так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, а $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, то все очевидно – не является доказательным. Действительно, а почему не существует другого, подходящего, представления?

15.7. Все, что надо сделать, чтобы решить неравенство пункта б), так это преобразовать его к виду $A \cdot B \le 0$. Для того чтобы решить следующее задание, изобразите график функции $y = \frac{(x+1)^3}{x}$. Обратите внимание на то, что случаи $a > 0$ и $a < 0$ следует рассматривать отдельно (область определения!). В рассуждении при решении последнего пункта используется известное неравенство для числа e, именно, что $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, а идея рассуждения состоит в том, чтобы найти наименьшее значение функции $y = \frac{(x+1)^{n+1}}{x}$.

15.8. Попробуйте доказать, что первая система не имеет решений, выведя из нее при помощи преобразования, которое и надо придумать, "равенство" $4 = 3$. При решении пункта б) вначале найдите $\cos(x+y)$. Если s – это площадь четырехугольника с противоположными углами α и β, то для величин этих углов можно составить систему, аналогичную данной. Останется выяснить, при каких значениях s разрешима эта система. Решение последнего пункта вполне просто, если использовать геометрические соображения: введите вектора с координатами $(4\cos x, 4\sin x)$ и $(-3\cos y, 3\sin y)$ и примените неравенство треугольника.

15.9. Выпишите уравнения, которым удовлетворяет абсцисса точки касания. Для доказательства неравенства пункта б) можно использовать неравенство $\ln(1+a) \le a$, для доказательства которого покажите, что наименьшее значение разности $x - \ln(1+x)$ равно нулю. Для формального исследования уравнения пункта в) сделайте замену $t = 2^{\frac{x}{2}}$, хотя сам ответ очевиден с наглядной точки зрения (см. пункт а). Последний пункт задачи достаточно труден, однако основные идеи рассуждения появлялись при решении предыдущих пунктов. Заметьте, что $\frac{t^2}{2} = \int_0^t x\,dx$, а далее воспользуйтесь неравенством пункта б).

15.10. Сократите дробь и не забудьте, что $\sin 3x \neq 0$. Для того чтобы провести интегрирование, необходимо преобразовать произведение в сумму, при этом случаи $a = \pm 1$ необходимо рассматривать по отдельности. Если $a \neq \pm 1$, то в результате вам придется решить неравенство $\frac{\sin a\pi}{a^2-1} \leq 0$. В решении задания пункта в) используйте неравенства $f(x) \leq \sin x < \cos x$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$; какой корень данного уравнения может быть наименьшим? Задание последнего пункта очень сложно...

Ответы и комментарии

15.1. а) $x \in \{1\} \cup [8; +\infty)$. б) $x = \frac{1}{2}; 4$. в) При $a > -\frac{5}{4}$.

г) Один корень при $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$; два корня при $a = -4; 0$; три корня при $a \in (-4; 0)$.

15.2. а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. б) 2π. в) $\left[-1; \frac{9}{16}\right]$. г) 0.

15.3. б) $x = 2; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{8}; \frac{1}{\sqrt{2}}$. Кстати, два корня очевидны! в) $x = 1$. Ясно (а почему?), что из равенства $f(x) = f(x^n)$ следует, что $x = x^n$.

г) При $a \in \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. Конечно, можно было бы исследовать функцию $y = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(1+t)^3}$.

15.4. а) $x = \frac{\pi k}{2}; \frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. б) При $a \in \left(-\frac{2}{3} + 4k; \frac{2}{3} + 4k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. в) При $a \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. г) Только при $a = 0$.

15.5. а) $x \in \left[\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. б) $a \in \{\frac{9}{4}\} \cup (-\infty; 0]$. в) $x = -1$. г) 10. Поскольку функция $y = 2^x - x - 1024$ выпукла, то она имеет не более двух корней, один из которых отрицателен, Ясно, что в интервале $(10; 11)$ есть положительный корень. Перепишем уравнение в равносильной форме $x = \log_2(x + 1024)$. Имеем

$$x - 10 = \log_2\left(1 + \frac{x}{1024}\right) < \frac{x}{1024 \ln 2} < \frac{11}{512 \ln 4} < \frac{11}{512} < 0{,}03.$$

15.6. а) $\in [1; \frac{3\pi}{8}] \cup [\frac{5\pi}{8}; 2]$. б) $x = \pi k; \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{13}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. в) $a \in \{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\} \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi k}{3}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

г) Нет, не существует. Если $q(\sin x) = \sin 1996x$, то

$$q(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)) = \sin(1996(\tfrac{\pi}{2} - x)),$$

т. е. $q(\cos x) = -\sin 1996x$. Осталось заметить, что функция $q(\cos x)$ четна, а $\sin 1996x$ — нечетна.

15.7. а) $a = 8$, $x = \sqrt{5} - 2$. б) $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty)$. в) $a \in (-\infty; 0) \cup \{\frac{27}{4}\}$.

15.8. а) Решений нет. б) $(\arcsin \frac{7}{25} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{25} + 2\pi k)$; $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$. в) $\frac{7}{4}\sqrt{3}$.
г) Множество, заданное неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 49$ (кольцо).

15.9. а) При $a = \frac{1}{2}$. в) Одно решение при $b = \frac{1}{2}$, два – при $b > \frac{1}{2}$, не имеет решений при $b < \frac{1}{2}$.

15.10. а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. б) $a \in [0; 2] \cup [2n-1; 2n]$, где $n \ge 2$ или $n \le -1$ (n – целое). в) $\frac{\pi}{4}$. г) Ответ: при $[1; \frac{5}{3}]$. Прежде всего заметим, что множитель $\sin ax$ не должен обращаться в поль на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, откуда следует, что $|a|\frac{\pi}{4} < \pi$, таким образом, $|a| < 4$. Далее, подставив $x = \frac{\pi}{4}$, получаем, что должно иметь место неравенство $\sin\frac{a\pi}{4} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда следует, что $1 + 8k \leq a \leq 3 + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая ограничение $|a| < 4$, получаем, что $a \in [1; 3]$. Наконец, исследовав аналогичным образом неравенство, получающееся при подстановке $x = \frac{\pi}{2}$, имеем в результате, что $a \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$. Осталось показать, что для любого $a \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$ неравенство $\sin ax \sin x \geq \frac{1}{2}$ верно для всех $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Фиксируем некоторое x из данного отрезка и рассмотрим функцию $h(a) = \sin ax \sin x$, $a \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$. Так как при этом $ax \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]$, то функция h выпукла вверх, следовательно, ее наименьшее значение достигается на одном из концов отрезка $\left[1; \frac{5}{3}\right]$. Поэтому достаточно проверить неравенства $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$ (которое очевидно верно при $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$) и неравенство $\sin\frac{5x}{3} \sin x \geq \frac{1}{2}$. Замена $z = \cos\frac{2x}{3}$ в последнем неравенстве приводит к неравенству $2(2z^2 - 1)^2 \leq z$, $z \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Нетрудно видеть, что функция $y = 2(2z^2 - 1)^2$ выпукла, поэтому это неравенство достаточно проверить в крайних точках отрезка.

Дополнение 1.
Комплексные числа и многочлены

Плоскость как множество чисел. Свойства модуля и аргумента комплексного числа. Формула Муавра и ее следствия: синусы и косинусы кратных углов; корни из единицы. Умножение на комплексное число как преобразование подобия плоскости. Основная теорема высшей алгебры и ее следствия: разложение многочлена на линейные множители. Разложения многочлена с действительными коэффициентами. Формула Эйлера. Делимость многочленов. Применения комплексных чисел в геометрии.

Обсуждение. Комплексные числа изучаются во всех математических классах; автор предполагает, что читатели знакомы с этим понятием. В данном разделе основное внимание будет уделено применениям комплексных чисел, но вначале для полноты будут кратко (и формально) изложены основные определения и необходимые формулы.

Рассмотрим точки $z(x, y), w(u, v)$ координатной плоскости (подчеркнем, что z и w – это обозначения точек). Определим сумму $z+w$ как точку с координатами $(x+u, y+v)$, а произведение zw – с координатами $(xu-yv, xv+yu)$. Оказывается, что введенные таким образом операции обладают обычными свойствами сложения и умножения (можете прямо проверить, что, к примеру, $z(w+t) = zw+zt$). Пусть точка i имеет координаты $(0, 1)$, тогда, по определению умножения, $i^2 = i \cdot i = (-1, 0)$. Будем далее называть множество точек плоскости с введенными для них операциями сложения и умножения *комплексными числами* и отождествлять точки оси абсцисс с действительными числами. Тогда $z(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$, здесь

$x, y \in \mathbb{R}$, а i – введенное ранее комплексное число. Обратите внимание, что $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ и $(x,0)(y,0)=(xy,0)$, таким образом на подмножестве $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ операции сложения и умножения комплексных чисел совпадают с такими же операциями для действительных чисел.

Модулем $|z|$ комплексного числа называется расстояние от точки z до нуля (до начала координат), так что $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Нетрудно проверить, что

$$(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2), \text{т. е. } |zw|^2=|z|^2|w|^2,$$

поэтому модуль произведения комплексных чисел совпадает с произведением их модулей (что само по себе не было очевидно),

$$|zw| = |z||w|.$$

Комплексно-сопряженным к числу $z = x+iy$ называется число $\overline{z} = x - iy$, при этом, как нетрудно видеть, $z\overline{z} = |z|^2$, или $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$, таким образом, для всякого $z \neq 0$ существует обратное ему (по умножению) число $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Следовательно, в множестве комплексных чисел имеется операция деления. К примеру,

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{1+3i+2i^2}{2} = \frac{3i-1}{2}.$$

Нетрудно показать, что для операций сложения и умножения комплексных чисел справедливы те же девять свойств, что и для аналогичных операций в множестве действительных чисел.

На алгебраическом языке последнее утверждение означает, что, так же, как $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, множество $\mathbb{C}$ (с определенными выше арифметическими операциями) является полем. Интересно заметить, что с некоторой вполне определенной точки зрения, последовательность числовых систем $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ далее продолжить невозможно. Существует еще одна система – это так называемые кватернионы, однако умножение кватернионов не является коммутативной операцией.

Всякое (отличное от нуля) комплексное число можно записать в виде

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(так как $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 = 1$). Если предположить, что φ лежит в некотором фиксированном полуоткрытом промежутке длины 2π, то это значение определяется однозначно и называется *аргументом* данного комплексного числа. Обычно рассматривают $\varphi \in [0; 2\pi)$ или $\varphi \in [-\pi; \pi)$.

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда, в силу формул сложения для синуса и косинуса, получаем, что

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi) = \\ &= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

Из последней формулы, в частности, следует *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

и *геометрическая интерпретация умножения* комплексных чисел. Фиксируем число $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ и рассмотрим преобразование плоскости: $z \mapsto wz$. Это преобразование является композицией поворота на угол θ вокруг нуля и гомотетии с коэффициентом $k = |w|$, в частности, оно есть преобразование подобия.

Кстати, из формул Муавра и бинома Ньютона следует, что

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\varphi\, i^k \sin^k\varphi = \\ = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^l C_n^{2l} \cos^{n-2l}\varphi \sin^{2l}\varphi + \\ + i\sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^l C_n^{2l+1} \cos^{n-2l-1}\varphi \sin^{2l+1}\varphi, \end{aligned}$$

откуда получаются выражения для косинусов и синусов кратных углов.

Рассмотрим многочлен $x^k - 1$. Из формулы Муавра следует, что его корнями являются числа $z_j = \cos\frac{2\pi j}{k} + i\sin\frac{2\pi j}{k}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Легко заметить, что эти числа расположены в вершинах правильного k-угольника (то же утверждение справедливо для корней многочлена $x^k - c$, где c – произвольное комплексное число). Кроме того, $z_j = z_1^j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, т. е. эти числа являются степенями одного из них, называемого *первообразным корнем* из единицы.

Удивительным образом оказывается, что всякий непостоянный многочлен с (комплексными) коэффициентами имеет (комплексный) корень, это утверждение называется *основной теоремой высшей алгебры*. Доказательство этого факта выходит за рамки школьного курса математики, а в университетских математических курсах излагаются несколько его различных доказательств. В качестве простого следствия получается, что всякий многочлен степени n раскладывается в произведение линейных множителей,

$$a_0x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n),$$

здесь $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ – корни этого многочлена. При этом для (комплексных) корней многочлена с (комплексными) коэффициентами справедливы *формулы Виета.*

Теперь предположим, что коэффициенты исходного многочлена являются действительными числами. Тогда если z_0 – его корень, то и число $\bar{z}_0$ является корнем данного многочлена

$$a_0\bar{z}_0^n + a_1\bar{z}_0^{n-1} + \ldots + a_n = \overline{a_0z_0^n + \ldots + a_n} = 0.$$

Далее, произведение $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 - x(z_0 + \bar{z}_0) + z_0\bar{z}_0$ является многочленом с действительными коэффициентами. Поэтому всякий многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов степени не выше двух, коэффициенты которых также являются действительными числами.

Доказать последнее утверждение, не используя комплексных чисел, хотя и можно, но очень сложно. Вообще, комплексные числа обладают удивительными свойствами. Как будет видно из дальнейшего изложения, их использование часто упрощает рассуждения. А в завершение этого введения автор не может не привести один пример, показывающий, что комплексные числа, так сказать, связывают друг с другом функции, которые в действительной области совершенно не похожи друг на друга.

Вспомним разложения функций e^x, $\cos x$ и $\sin x$ в степенные ряды:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \ldots$$
$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{6} + \ldots$$

Следовательно,

$$e^{ix} = 1 + ix + \tfrac{(ix)^2}{2} + \tfrac{(ix)^3}{6} + \tfrac{(ix)^4}{24} + \ldots =$$
$$= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \ldots + i\big(x - \tfrac{x^3}{6} + \ldots\big) = \cos x + i \sin x.$$

Мы доказали *формулу Эйлера* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, из которой следует одно из самых восхитительных тождеств

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

связывающее воедино четыре основных математических константы: 1, e, π и i.

Первым применением комплексных чисел будет новое решение задачи 15 *раздела 6*.

Задача 1. Докажите, что следующие многочлены делятся на трехчлен $x^2 + x + 1$:

а) $x^{3k} + x^{3l+1} + x^{3n+2}$ при любых натуральных k, l, n;

б) $x^{2n} + x^n + 1$, если n не кратно трем.

Поскольку $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, то корнями многочлена x^2+x+1 являются числа $\varepsilon \neq 1$, такие, что $\varepsilon^3=1$. Для того чтобы доказать, что $p(x)$ делится на x^2+x+1, достаточно убедиться, что если $\varepsilon^3=1$ и $\varepsilon \neq 1$, то $p(\varepsilon)=0$.

Конечно, здесь мы использовали тот факт, что корни трехчлена x^2+x+1 не являются кратными.

а) Имеем, $\varepsilon^{3k}+\varepsilon^{3l+1}+\varepsilon^{3n+2}=1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.

б) Если $n=3k+1$, то $\varepsilon^{2n}+\varepsilon^n+1=\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Аналогичным образом рассматривается случай $n=3k+2$.

Задача 2. Положим $p_n(x)=1+x+\ldots+x^n$.

а) Докажите, что многочлен p_n имеет вещественные корни тогда и только тогда, когда число n нечетно.

б) Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные корни многочлена p_n. Докажите, что $(1-z_1)(1-z_2)\ldots(1-z_n)=n+1$.

в) Найдите все n, при которых многочлен $p_n(x)$ делится на $1+x^3$.

а) $p_n(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=0$, если $x^{n+1}=1$, $x \neq 1$, таким образом, число $n+1$ должно быть четным.

б) Если $z_1, \ldots, z_n$ – корни многочлена p_n, то

$$p_n(x)=(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n),$$

значит, $(1-z_1)(1-z_2)\ldots(1-z_n)=p_n(1)=n+1$.

в) Многочлен p_n делится на x^3+1, если все корни последнего многочлена, т. е. кубические корни из -1, являются и корнями p_n. Положим $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Как и выше, $p_n(\varepsilon)=0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon^{n+1}=1$, т. е. когда число $n+1$ делится на 6. Таким образом, $n=6k-1$, $k \in \mathbb{N}$.

В следующей задаче комплексные числа используются для доказательства геометрических утверждений.

Задача 3. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_4$ – вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром O.

а) Докажите, что $\overline{OA_0} + \overline{OA_1} + \ldots + \overline{OA_4} = 0$.

б) Докажите, что $A_0A_1 \cdot A_0A_2 = \sqrt{5}$.

а) Расположим точки A_k так, чтобы точка A_0 попала на ось абсцисс. Пусть z_k – комплексные числа, соответствующие точкам A_k единичной окружности, таким образом, $z_0 = 1$ и $z_k = z_1^k$, а $z_1^5 = 1$. Имеем, $1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = \frac{1-z_1^5}{1-z_1} = 0$ (частный случай предыдущей задачи).

б) Заметим, что $z_1^3 = \overline{z}_1{}^2$ и $z_1^4 = \overline{z}_1$. Имеем,

$$A_0A_1^2 = (1 - z_1)(1 - \overline{z}_1) = (1 - z_1)(1 - z_4) \text{ и}$$
$$A_0A_2^2 = (1 - z_1^2)(1 - \overline{z}_1^2) = (1 - z_2)(1 - z_3),$$

значит,

$$A_0A_1^2 \cdot A_0A_2^2 = (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)(1 - z_4) = 5,$$

в силу утверждения предыдущей задачи.

Заметим, что доказанное в пункте а) тождество имеет следующую тригонометрическую форму

$$1 + 2\cos\tfrac{2\pi}{5} + 2\cos\tfrac{4\pi}{5} = 0,$$

из которой можно найти $\cos\frac{2\pi}{5}$ (см. решение задачи 9 *раздела 7*).

Еще одно характерное тригонометрическое приложение.

Задача 4. Докажите, что если

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0, \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0, \end{cases} \quad \text{то } \sin 3x = \sin 3y = \sin 3z.$$

Пусть $u = \cos x + i\sin x$, $v = \cos y + i\sin y$ и $w = \cos z + i\sin z$. Данные равенства равносильны тому, что $u + v + w = 0$. Сложение комплексных чисел – это, собственно говоря, сложение векторов, поэтому вектора u, v и w образуют треугольник. Поскольку все они являются единичными, то этот треугольник –

равносторонний, откуда и следует, что углы между ними равны $\pm\frac{2\pi}{3}$. К примеру, $y = x \pm \frac{2\pi}{3}$, значит, $\sin 3x = \sin 3y$.

Следующая задача интересна хотя бы тем, что мы решим ее разными способами, а, кроме того, ее утверждение потребуется в дальнейшем.

Задача 5. Докажите, что если $|a| = |b| = |c| = 1$, то
$$|a + b + c| = |ab + bc + ca|.$$

Имеем,

$$|ab + bc + ca|^2 = (ab + bc + ca)(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) =$$
$$ab\bar{a}\bar{b} + ab\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}\bar{a} + bc\bar{a}\bar{b} + bc\bar{b}\bar{c} + bc\bar{c}\bar{a} + ca\bar{a}\bar{b} + ca\bar{b}\bar{c} + ca\bar{c}\bar{a} =$$
$$= 3 + a\bar{c} + b\bar{c} + c\bar{a} + b\bar{a} + c\bar{b} + a\bar{b} = |a + b + c|^2.$$

Другой способ. Положим $a = \cos x + i \sin x$, $b = \cos y + i \sin y$ и $c = \cos z + i \sin z$. Имеем,

$$|ab + bc + ca|^2 = (\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x))^2 +$$
$$+(\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x))^2 =$$
$$= 3 + 2\big(\cos(x + y)\cos(y + z) + \sin(x + y)\sin(y + z) +$$
$$+ \cos(y + z)\cos(z + x) + \sin(y + z)\sin(z + x) +$$
$$+ \cos(z + x)\cos(x + y) + \sin(z + x)\sin(x + y)\big) =$$
$$= 3 + 2(\cos(x - z) + \cos(y - x) + \cos(z - y)) =$$
$$= 3 + 2\cos x \cos y + 2\cos y \cos z + 2\cos z \cos x +$$
$$+2\sin x \sin y + 2\sin y \sin z + 2\sin z \sin x =$$
$$= |a + b + c|^2.$$

Все-таки, первое рассуждение проще.

Три задачи, в которых комплексные числа используются при исследовании геометрии треугольника.

Задача 6. Найдите условие(я), при которых треугольник с вершинами в точках $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ подобен треугольнику с вершинами в точках $U(u)$, $V(v)$, $W(w)$ (здесь a, b, c, u, v, w – комплексные числа).

Пусть, для определенности, $\frac{AB}{UV} = \frac{BC}{VW} = \frac{AC}{UW}$. Воспользуемся первым признаком подобия: $\frac{AB}{UV} = \frac{BC}{VW}$ и $\angle BAC = \angle VUW$, при этом считаем, что поворот от луча $[BA)$ к лучу $[BC)$ происходит в том же направлении, что и от луча $[VU)$ к лучу $[VW)$. Таким образом, $\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \left|\frac{u-v}{w-v}\right|$ и $\arg\frac{a-b}{c-b} = \arg\frac{u-v}{w-v}$, что равносильно равенству для комплексных чисел $\frac{a-b}{c-b} = \frac{u-v}{w-v}$, или $aw + vu + cv = av + bw + cu$.

Задача 7. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ – точки плоскости (здесь z – комплексное число).

а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O – начало координат).

б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ комплексной плоскости.

в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.

а) Имеем,

$$OA^2 = (2z+1)(2\bar{z}+1) = 4|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 1 = 2(z+\bar{z}) + 5,$$
$$OB^2 = (z+2)(\bar{z}+2) = |z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 4 = 2(z+\bar{z}) + 5.$$

б) Сделав параллельный перенос, переводящий вершину A треугольника в точку O, получим треугольник OB_1C_1, где точкам B_1 и C_1 соответствуют числа $z + 2 - (2z+1) = 1 - z$ и $z^2 + 2z - (2z+1) = z^2 - 1 = -(1-z)(z+1)$ соответственно. Следовательно, умножение на $1 - z$ переводит треугольник с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ в подобный ему треугольник OB_1C_1, равный треугольнику ABC. Коэффициент подобия $\lambda = |z-1|$.

в) Если $|z| = 1$, то $OC = OB$, значит, в силу утверждения первого пункта задачи, точка O – центр описанной около данного треугольника окружности с радиусом $R = |z+2|$. При $z = \pm 1$ треугольник вырождается, при остальных значениях z, где $|z| = 1$, получаем, что $R \in (1; 3)$.

Задача 8. Пусть $A(u)$, $B(v)$, $C(w)$ – точки плоскости, изображающие комплексные числа u, v, w.

а) Пусть $u = 0$, $v = 1+i$. Найдите все такие w, что треугольник ABC равносторонний.

б) Пусть $u = 0$, $v = 1 + 2i$, а число w является корнем уравнения $z^2 = (1 + 2i)z + 3 - 4i$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

в) Известно, что треугольник ABC равносторонний. Могут ли действительные и мнимые части всех чисел u, v и w быть рациональными одновременно?

г) Докажите, что если $u^2 + v^2 + w^2 = uv + vw + wu$, то треугольник ABC равносторонний.

а) Для того чтобы получить третью вершину равностороннего треугольника ABC, можно повернуть вершину B на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат – первой вершины этого треугольника. По геометрическому смыслу умножения комплексных чисел для этого достаточно умножить v на число $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, $w = \frac{1\mp\sqrt{3}+i(1\pm\sqrt{3})}{2}$.

б) Имеем: $4i-3 = (1+2i)^2$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $\left(\frac{z}{1+2i}\right)^2 - \frac{z}{1+2i} + 1 = 0$, откуда и получаем, что $z = (1 + 2i)\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} = v\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. В силу утверждения пункта а) треугольник ABC – равносторонний.

в) Нет, не могут, поскольку $\frac{w-u}{v-u} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

г) Данное тождество можно записать в виде

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 = 0,$$

обозначив для удобства $a = u-v$, $b = v-w$, $c = w-u$, получим, что $a+b+c = 0$, $a^2+b^2+c^2 = 0$, откуда $ab+bc+ca = 0$. Таким образом, числа a, b и c являются корнями уравнения $z^3 = \alpha$, так что $\grave{a} = b\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. В силу утверждения пункта а) треугольник ABC является равносторонним.

Для всяких комплексных чисел z_0 и z_1 множество комплексных чисел вида $z = \alpha z_0 + (1-\alpha)z_1$, $\alpha \in [0;1]$, является отрезком с концами в точках $A_0(z_0)$ и $A_1(z_1)$. В последнем пункте следующей задачи рассматривается аналогичное множество, но для комплексных значений α.

Задача 9. Пусть $A(i-1)$, $B(2i-1)$, $C(2-3i)$ – точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам, $\mathcal{S}$ – окружность $|z| = 1$, а $\mathcal{D}$ – множество комплексных чисел, заданное неравенством $|2z-1| \leq 1$.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки $P \in \mathcal{S}$ до точек A, B, C постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки A, B и множество комплексных чисел вида $z(2i-1) + (1-z)(i-1)$, где $z \in \mathcal{D}$.

в) Найдите такую точку $E \in \mathcal{D}$ и все такие равносторонние треугольники с вершинами на $\mathcal{S}$, для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до E наибольшая.

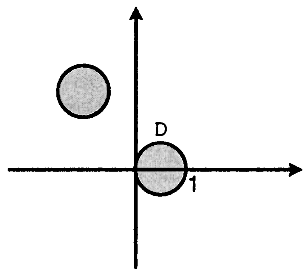
г) Верно ли, что для всякой точки w в треугольнике ABC найдется такое число $z \in \mathcal{D}$, что $w = zz_k + (1-z)z_j$, где $z_k, z_j \in \{i-1, 2i-1, 2-3i\}$?

а) Проведем вычисления в общем виде, считая, что точки A, B, C соответствуют комплексным числам z_1, z_2, z_3, причем $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{i=1}^3 |z-z_i|^2 = \sum_{i=1}^3 (z-z_i)(\bar{z}-\bar{z}_i) = \\ \textstyle= 3|z|^2 + \sum_{i=1}^3 |z_i|^2 - z\sum_{i=1}^3 \bar{z}_i - \bar{z}\sum_{i=1}^3 z_i = \\ \textstyle= 3 + \sum_{i=1}^3 z_i^2 = const.\end{gathered}$$

б) Множество $\mathcal{D}$, заданное неравенством $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$, является кругом, диаметр которого совпадает с отрезком $[0;1]$

вещественной оси. Так как $z(2i-1)+(1-z)(i-1) = iz+i-1$, то искомое множество получается из $\mathcal{D}$ путем его поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ (умножение на i) и параллельного переноса на вектор, соответствующий $i-1$ (рисунок).



в) Если z_1, z_2, z_3 – вершины лежащего на окружности S равностороннего треугольника, то $z_1+z_2+z_3 = 0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{3} |z-z_i|^2 = 3|z|^2+3$$

(см. пункт а) и наибольшее значение $|z|$ при $z \in \mathcal{D}$ реализуется в точке $z = 1$.

г) Множество точек указанного в задаче вида, как следует из рассуждения пункта б), является кругом с диаметром $[z_k; z_j]$. Три круга, построенные на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах, накрывают этот треугольник хотя бы потому, что он тупоугольный.

Исследуем свойства одного геометрического преобразования, просто описываемого в терминах комплексных чисел. Для начала заметим, что уравнение прямой $ax+by+c=0$ можно записать в виде $a\frac{z+\bar{z}}{2}+b\frac{z-\bar{z}}{2i}+c=0$, или $z\overline{w}_0+\bar{z}w_0+2c=0$, где $w_0 = a+bi$, а число c – действительное.

Инверсией относительно окружности называется преобразование, сопоставляющее точке M плоскости такую точку M', лежащую на луче $[OM)$ (здесь O – центр окружности), что

$OM \cdot OM' = R^2$ (здесь R – радиус окружности). Очевидно, что инверсия относительно окружности радиуса R с центром в начале координат сопоставляет числу z число $w = \frac{R^2}{\bar{z}}$.

Для простоты исследуем свойства инверсии относительно единичной окружности с центром в начале координат. Предположим, что точка z лежит на прямой $z\overline{w}_0 + \bar{z}w_0 + 2c = 0$. Если $w = \frac{1}{\bar{z}}$ – ее образ, то $z = \frac{1}{\overline{w}}$, поэтому $\frac{\overline{w}_0}{\overline{w}} + \frac{w_0}{w} + 2c = 0$, откуда $2cw\overline{w} + w\overline{w}_0 + \overline{w}w_0 = 0$. Таким образом, если $c = 0$ (т. е. если исходная прямая проходила через начало координат), то ее образ – прямая (конечно, без нуля), а при $c \neq 0$ образом является окружность (без начала координат). Обратно, всякая окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, а не проходящая – в окружность (докажите это самостоятельно).

В решении следующей задачи свойства инверсии не используются, придумайте более простое ее решение.

Задача 10. Будем обозначать через $M(z)$ точку плоскости, соответствующую комплексному числу z. Рассмотрим точки $A_i(z_i)$, где $i = 1, 2, 3$, $z_1 \neq -z_2$ и $z_3 = \dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$.

а) Докажите, что если $z_1, z_2 \neq 0$, то точки $B_i(z_i^{-1})$, $i = 1, 2, 3$, лежат на одной прямой.

б) Докажите, что если $z_2 = \bar{z}_1$ и $z_1 \neq z_2$, то треугольник OA_1A_3 – прямоугольный (O – начало координат).

в) Пусть $z_2 = \bar{z}_1$, $|z_1 - 2| \leq 1$. Найдите наибольшее значение отношения площадей треугольников OA_1A_3 и OA_1A_2.

г) Докажите, что точки A_i, $i = 1, 2, 3$, и O лежат на одной окружности.

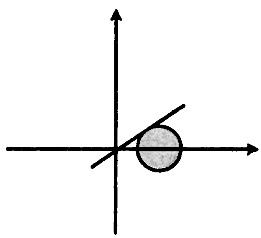
а) Поскольку $z_3^{-1} = \frac{1}{2}(z_1^{-1} + z_2^{-1})$, то точка B_3 – середина отрезка B_1B_2.

б) Пусть $z_1 = a+bi$. Тогда $z_2 = a-bi$, по условию $a, b \neq 0$, и $z_3 = \frac{a^2+b^2}{a}$. Вектор $\overline{OA_1}$ имеет координаты (a, b), а вектор $\overline{A_1A_3}$ – координаты $(\frac{b^2}{a}, -b)$. Таким образом, $\overline{OA_1} \cdot \overline{A_1A_3} = b^2 - b^2 = 0$, т. е. эти вектора перпендикулярны ($\angle OA_1A_3 = 90°$).

в) Имеем: $S_1 = S_{OA_1A_3} = \frac{1}{2}|\frac{b}{a}|(a^2+b^2)$, $S_2 = S_{OA_1A_2} = |ab|$, таким образом,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+(\frac{b}{a})^2}{2},$$

откуда следует, что отношение площадей наибольшее, когда является наибольшим модуль отношения $\frac{b}{a}$. Из рисунка очевидно, что $\max|\frac{b}{a}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому наибольшее значение отношения площадей равно $\frac{2}{3}$.



г) Достаточно показать, что отрезок A_2A_3 виден из точек O и A_1 под равными углами, т. е. что равны аргументы комплексных чисел $\frac{z_3}{z_2}$ и $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. Из положительности двойного отношения

$$\frac{z_2(z_3-z_1)}{z_3(z_2-z_1)} = \frac{z_2}{z_2-z_1} \cdot \frac{\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2} - z_1}{\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}} = \frac{z_2(z_1z_2 - z_1^2)}{2(z_2-z_1)z_1z_2} = \frac{1}{2},$$

в силу свойства аргумента отношения комплексных чисел, следует искомое утверждение.

Задача о геометрии решений одного уравнения.

Задача 11.

а) Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то треугольник с вершинами в точках a, b, c содержит начало координат.

б) Докажите, что всякий корень уравнения

$$\frac{1}{z-c_1}+\frac{1}{z-c_2}+\frac{1}{z-c_3}=0$$

лежит в треугольнике с вершинами в точках c_1, c_2, c_3.

в) Докажите, что если корни кубического многочлена лежат в единичном круге, то корни его производной также лежат в этом круге.

а) Одно из возможных решений: если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, то $\frac{1}{\bar{a}}+\frac{1}{\bar{b}}+\frac{1}{\bar{c}}=0$, т. е. $\frac{a}{|a|^2}+\frac{b}{|b|^2}+\frac{c}{|c|^2}=0$. Это равенство можно преобразовать к виду $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$, где $\alpha,\beta,\gamma>0$ и $\alpha+\beta+\gamma=1$, таким образом, начало координат лежит внутри выпуклой оболочки точек a, b, c, т. е. оно принадлежит треугольнику с вершинами в этих точках.

б) Если z_0 – корень уравнения, $a_i=c_i-z_0$, то $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=0$, в силу утверждения предыдущего пункта начало координат лежит внутри треугольника с вершинами a_1, a_2, a_3, следовательно, z_0 находится внутри треугольника с вершинами c_1, c_2, c_3.

в) Пусть $p(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$, где $|c_i|\le 1$. Уравнение $p'(x)=0$ можно записать в виде

$$\frac{1}{x-c_1}+\frac{1}{x-c_2}+\frac{1}{x-c_3}=0.$$

В силу предыдущего пункта все его корни лежат в треугольнике с вершинами в точках единичного круга, таким образом, они лежат в этом круге.

Наконец, вернемся к самой популярной в школе теме и исследуем свойства (комплексных) корней квадратного уравнения.

Задача 12. Пусть $p(z)=z^2+az+b$, $z\in\mathbb{C}$. В следующих далее формулировках мы для краткости будем отождествлять комплексные числа с их изображениями как точек плоскости.

а) Пусть $b = 1$. Верно ли, что при всех $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 2$, корни многочлена $p(z)$ лежат на единичной окружности?

б) Пусть $b = 1$, $a \in \mathbb{C}$ и $|a| \leq 1$. Найдите наименьшее значение модуля разности корней многочлена $p(z)$.

в) Пусть z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, – вершины квадрата с центром u. Докажите, что $\sum_{k=1}^4 p(z_k) = 4p(u)$.

г) Пусть m – наибольшее значение $|p(z)|$ при $|z| = 1$. Докажите, что $|p(z)| \leq m$ при всех $|z| \leq 1$.

а) Если корни $z_{1,2}$ многочлена $p(z)$ действительны и лежат на единичной окружности, то $z_1 = z_2 = \pm 1$, так что $a = \pm 2$. Пусть $|a| < 2$, положим $a = 2\cos x$. Тогда $z_{1,2} = \cos x + i \sin x$, т. е. $|z_{1,2}| = 1$.

б) Имеем: $|z_1 - z_2| = |\sqrt{a^2 - 4}| = \sqrt{|a^2 - 4|}$. Среди точек вида a^2 (произвольных точек единичного круга) ближайшей к точке 4 является точка 1. Ответ: $\sqrt{3}$.

в) Предположим, что вершины занумерованы так, что обход квадрата совершается против часовой стрелки. Мы вправе считать, что $u = 0$. Тогда $z_1 + z_3 = z_2 + z_4 = 0$. Далее, так как $z_2 = iz_1$ и $z_4 = iz_3$, то $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2 = 0$. Следовательно, $\sum_{k=1}^4 p(z_k) = 4b = 4p(0)$.

г) Если предположить противное, то точка u, в которой достигается наибольшее значение $|p(z)|$ в круге $|z| \leq 1$, не лежит на единичной окружности, в частности, $|p(u)| > m$. Рассмотрим квадрат, центром которого является точка u, а одна из вершин которого (обозначим ее z_1) лежит на единичной окружности. В силу выбора точки u верны неравенства $|p(z_k)| \leq |p(u)|$. С другой стороны, по доказанному в предыдущем пункте, $\sum_{k=1}^4 p(z_k) = 4p(u)$, так что

$$|p(u)| = \frac{1}{4}\left|\sum_{k=1}^{4} p(z_k)\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} |p(z_k)| \leq |p(u)|,$$

поэтому $|p(z_k)| = |p(u)|$, в частности, $|p(z_1)| = |p(u)|$. Отсюда следует, что $m < |p(u)| = |p(z_1)| \le m$, что противоречит выбору точки u.

В приведенном рассуждении использовалась вторая теорема Вейерштрасса для функций от двух переменных.

Безусловно, представленные задачи достаточно трудны и вряд ли учащиеся будут способны справиться с ними самостоятельно. Однако, по мнению автора, при изучении комплексных чисел нельзя ограничиваться простейшими задачами на выполнение арифметических действий. Чрезвычайно красива и существенна связь с тригонометрией и геометрией. Необходимо всячески подчеркивать, во-первых, сходство комплексных чисел с обычными действительными числами, во-вторых, различия между ними.

Задачи для самостоятельного решения

Д1.1. Множество C точек комплексной плоскости задано уравнением $|1-(i+1)z| = |i(z-1)+3|$.

а) Нарисуйте множество C.

б) Найдите такие точки $z \in C$, расстояние от которых до вещественной оси равно трем.

в) Найдите множество значений $|z|$ при $z \in C$.

г) Найдите множество значений $\arg z$ при $z \in C$ (считая, что в $\arg z \in [0; 2\pi)$).

Д1.2. Даны три комплексных числа: $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+3i)$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$.

а) Найдите расстояние от точки z_1 до фигуры, задаваемой уравнением $|z-z_3| = 1$.

б) Изобразите множество точек z комплексной плоскости таких, что $|z_2 z - z_1 z_2| = |z_3 z - z_2 z_3|$.

в) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_2, z_3, а U и V – множества точек, которые пробегают при этом $u = z_2 z$ и $v = z_3 z$. Изобразите пересечение множеств U и V.

г) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_1, z_3. Изобразите множество всех точек, которое пробегает при этом $w = z^2$.

Д1.3. Докажите, что многочлен

а) $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

б) $p_n(x) = x^n \sin\alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ делится на $x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ при всех натуральных $n \geq 2$.

Д1.4. Пусть z – комплексное число, $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ – соответствующие точки плоскости.

а) Докажите, что если $|z| = 1$, то треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите все такие z, что треугольник ABC равносторонний.

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек z, при которых треугольник ABC равнобедренный.

Д1.5. Дано число $\varepsilon \neq 1$, такое что $\varepsilon^3 = 1$. Сопоставим точкам $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ плоскости (здесь a, b, c – комплексные числа) числа $u = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ и $v = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon$.

а) Известно, что $a = 0$, $c = -2$, $u = 0$. Определите вид треугольника ABC.

б) Докажите, что числа u и v не меняются при параллельном переносе треугольника ABC.

в) Докажите, что треугольник ABC является равносторонним тогда и только тогда, когда $uv = 0$.

г) Найдите множество значений u для всех треугольников ABC, накрываемых кругом радиуса 1.

Д1.6. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество комплексных чисел, модуль которых равен единице.

а) Докажите, что все решения уравнения $z^6+z^3+1=0$ принадлежат множеству $\mathcal{S}$.

б) Найдите все решения уравнения $2z^3+iz^2+2iz=0$, которые принадлежат $\mathcal{S}$.

в) Найдите все действительные a, при которых уравнение $z^6+z^2=a$ имеет решения из $\mathcal{S}$.

г) Найдите все значения $c \in \mathcal{S}$, при которых уравнение $z^6+z^2=c$ имеет решения из $\mathcal{S}$.

Д1.7. Отображение сопоставляет z число $f(z)=uz+(1-u)a$, где $u \neq 0$ и a – некоторые фиксированные комплексные числа.

а) Известно, что $f(2)=2+2i$ и $f(2i)=0$. Найдите $f(1+2i)$.

б) Известно, что $f(1)=i$. Изобразите на плоскости множество всех возможных значений $f(-1)$, при условии, что $|u|=1$.

в) Известно, что $\arg u=\frac{\pi}{3}$. Изобразите на плоскости множество всех a, при которых $f(1-i\sqrt{3})=1+i\sqrt{3}$.

г) Изобразите на плоскости множество всех значений a, для которых найдется такое u, при котором отображение f переводит точки полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ в точки полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Д1.8. Комплексное число $z=a+bi$ называется *гауссовым*, если a и b – целые числа. Говорят, что гауссово число z *кратно* числу w, если $z=wu$, где w и u – гауссовы числа. Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех гауссовых чисел, кратных $1+2i$.

а) Найдите все $a \in \mathbb{N}$, такие что $a \leq 20$ и $2 + ai \in \mathcal{K}$.

б) Докажите, что если $z \in \mathcal{K}$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то z кратно $3 - i$.

в) Существуют ли числа $u, v \in \mathcal{K}$, такие что $\arg \frac{u}{v} = \frac{\pi}{8}$?

г) Докажите, что для всякого гауссова числа z найдется число $w \in \mathcal{K}$, такое что $|z - w| \leq 1$.

Д1.9. Дан многочлен $p(z) = z^3 + z^2$, $z \in \mathbb{C}$.

а) Решите уравнение $p(z) = 2$.

б) Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $p(z) = 2002$.

в) Найдите все действительные значения c, при которых модули всех корней уравнения $p(z) = c$ не превосходят 1.

г) Существует ли такое комплексное число c, при котором модули всех корней уравнения $p(z) = c$ равны единице?

Д1.10. Дан многочлен $p(z) = z^3 + az + b$, $a, b, z \in \mathbb{C}$.

а) Пусть $a = -i$, $b = 1 - i$. Найдите корни многочлена $p(z)$ (и запишите их в алгебраической форме).

б) Найдите все пары (a, b), при которых один из корней многочлена $p(z)$ совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и в следующем пункте мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

в) Найдите все пары (a, b), при которых корни многочлена $p(z)$ лежат в вершинах равностороннего треугольника.

г) Докажите, что если $|p(z)| \leq 1$ при всех $|z| = 1$, то $a = b = 0$.

Комментарии и советы

Д1.1. а) Запишите уравнение множества C в декартовых координатах (x, y), где $x + iy = z$. б) Решите систему, первым из уравнений которой является уравнение множества C. в) Поскольку множество C найдено, осталось найти расстояния от его точек до начала координат. г) Где лежит начало, "внутри" или "вне" множества C?

Д1.2. а) Как найти расстояние от точки до окружности? б) Воспользуйтесь тем, что $|z_2| = |z_3|$. в) Воспользуйтесь тем, что $z_2 = -z_3$. г) Задайте искомое множество параметрически.

Д1.3. а, б) См. задачу 1.

Д1.4. а) Докажите, что $AB = BC$. б) Запишите и решите систему. в) Один случай – когда $AB = BC$ – уже исследован, при этом $|z| = 1$. При каких условиях на z будут иметь место равенства $AB = AC$; $BC = AC$?

Д1.5. а) Найдите b и воспользуйтесь геометрической интерпретацией умножения комплексных чисел. б) Проведите прямое вычисление. в) Можно считать, что $u = 0$ и $a = 0$ (почему?). г) Можно считать, что центром круга является начало координат. Нетрудно показать, что искомое множество лежит в некотором круге. Не забудьте доказать, что оно с ним совпадает!

Д1.6. а) $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда $|z^3| = 1$. б) Выделите множитель $2z + i$. в) Запишите систему тригонометрических уравнений, положив $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. г) Если верно, что $|z| = 1$ и $|z^6 + z^2| = 1$, то что можно сказать о z^4?

Д1.7. а) Найдите u и a. б) Так как $f(z) = a + u(z - a)$ и $|u| = 1$, то преобразование f является композицией... Найдите выражение для $f(-1)$. в) Если $z = 1 - i\sqrt{3}$ и

$w = 1 + i\sqrt{3}$, а $\arg\frac{w-a}{z-a} = \frac{\pi}{3}$, то где лежат точки a? г) Покажите, что если отображение f является композицией поворота относительно точки a и гомотетии с центром в этой точке и что оно переводит точки верхней полуплоскости в точки правой полуплоскости тогда и только тогда, когда $u = -it$, где $t \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

Д1.8. а) $2+ai \in \mathcal{K}$, если $\frac{2+ai}{1+2i} = x+iy$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. б) Если число $z = (1+2i)(x+iy)$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z > 0$, откуда следует связь между x и y. в) Если $z = \frac{u}{v} = a + ib$, то $a, b \in \mathbb{Q}$. Покажите, что этого не может быть. г) Изобразите множество $\mathcal{K}$.

Д1.9. а) Одним из корней является $z = 1$. б) Используйте теорему Виета. в) Рассмотрите график $y = x^3 + x^2$, из которого ясно, что при $c \in \left[0; \frac{4}{27}\right]$ все корни уравнения являются действительными числами и лежат в отрезке $[-1; 1]$, а при $c \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ уравнение имеет действительный корень, не лежащий в этом отрезке. Поэтому надо выяснить, при каких $c \in \left(\frac{4}{27}; 2\right)$ модули комплексных корней не превосходят единицы. г) Воспользуйтесь задачей 5 и теоремой Виета.

Д1.10. а) Подберите один из корней. б) Воспользуйтесь теоремой Виета и формулой середины отрезка между точками. в) Докажите, что $a = 0$. г) Идея: если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то имеет место неравенство

$$|p(z)|^2 = 1 + |a|^2 + |b|^2 + (a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi) +$$
$$+ (b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi) + (a\overline{b}z + \overline{a}b\overline{z}) \geq$$
$$\geq 1 + (a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi) + (b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi).$$

Ответы и комментарии

Д1.1. а) Уравнение

$$\sqrt{(1+y-x)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

преобразуется к виду $x^2 + (y+4)^2 = 25$, значит, искомое множество является окружностью.

б) $z = \pm 2\sqrt{6} - 3i$.

в) $|z| \in [1; 9]$.

г) Поскольку начало координат лежит внутри окружности, то $\arg z \in [0; 2\pi)$.

Д1.2. Обозначим точки: $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$. а) Искомое расстояние равно разности длины отрезка AC и 1 – радиуса окружности с центром в точке C, т. е. 1.

б) Так как $|z_2| = |z_3| = 1$, от искомое множество – это срединный перпендикуляр к отрезку AB.

в) Поскольку отрезок BC симметричен относительно 0 и $z_2 = -z_3$, то образы U и V при поворотах совпадают с друг другом и являются отрезком с концами в точках $z_2 z_3$ и z_3^2.

г) Если z лежит на отрезке AC, то $z = it + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $i \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, откуда $w = \frac{3}{4} - t^2 + it\sqrt{3}$. Значит, искомое множество является дугой параболы $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}y^2$ при $y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{3}\right]$.

Д1.3. а) Если $\varepsilon^5 = 1$, $\varepsilon \neq 1$, то $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$, следовательно

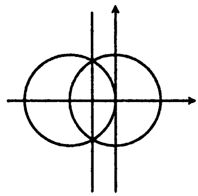
$$1 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{16} = 1 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0.$$

Таким образом, всякий корень второго многочлена является корнем первого. б) Корнями второго многочлена являются числа $z_{1,2} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Проверьте прямой подстановкой, что они будут корнями и первого многочлена.

Д1.4. а) При $|z| = 1$ получаем, что $AB = |z^2 - z| = |z - 1|$ и $BC = |z^3 - z^2| = |z - 1|$.

б) Если $|z^2 - z| = |z^3 - z| = |z^3 - z^2|$ и $z \neq 0; 1$, то $|z| = 1$ и $|z + 1| = 1$, таким образом, $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

в) Итак, $z \neq 0; 1$. Если $|z^2 - z| = |z^3 - z^2|$, то $|z| = 1$. Если $|z^2 - z| = |z^3 - z|$, то $|z+1| = 1$. Если $|z^3 - z| = |z^3 - z^2|$, то $|z+1| = |z|$, откуда $x = -\frac{1}{2}$. Ответ на рисунке.



Д1.5. а) Так как $b = c(-\varepsilon)$, то точка B получена из C при повороте на угол $\frac{\pi}{3}$. Таким образом, треугольник – равносторонний.

б) Имеем, $a + z + (b + z)\varepsilon + (c + z)\varepsilon^2 = u + z(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = u$.

в) Для определенности пусть $u = 0$. В силу предыдущего пункта, можно считать, что $a = 0$. Тогда $b = c(-\varepsilon)$.

г) Пусть центром круга является начало координат. Если $|a|, |b|, |c| \leq 1$, то $|u| \leq 3$. Покажите теперь, что всякая точка круга радиуса 3 с центром в начале координат является значением u для некоторого треугольника с вершинами в единичном круге.

Д1.6. а) Если $z^6 + z^3 + 1 = 0$, то $z^9 = 1$.

б) $2z^3 + iz^2 + 2iz - 1 = z^2(2z + i) + i(2z + i) = (z^2 + i)(2z + i)$, поэтому $z_{1,2} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. в, г) Если $z \in S$, то $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и

$$z^6 + z^2 = \cos 6\varphi + \cos 2\varphi + i(\sin 6\varphi + \sin 2\varphi),$$

поэтому система

$$\begin{cases} z \in S, \\ z^6 + z^2 = a, \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = a, \\ \sin 6\varphi + \sin 2\varphi = 0. \end{cases}$$

Так как $\sin 6\varphi + \sin 2\varphi = 2\sin 4\varphi \cos 2\varphi$, то из второго уравнения системы получаем, что $\varphi = \frac{\pi k}{4}$, теперь из первого уравнения следует, что $a = 0, \pm 2$.

Система

$$\begin{cases} z \in S, \\ z^6 + z^2 \in S \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = \cos\psi, \\ \sin 6\varphi + \sin 2\varphi = \sin\psi, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\cos 4\varphi \cos 2\varphi = \cos\psi, \\ 2\sin 4\varphi \cos 2\varphi = \sin\psi, \end{cases}$$

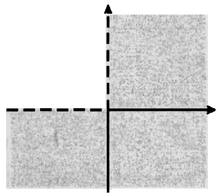
откуда $\cos 2\varphi = \pm\frac{1}{2}$, т. е. $\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. Значит, при $\varphi = \frac{\pi}{6}$: $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 6\varphi = -1$, $\sin 6\varphi = 0$, поэтому $\cos\psi = -\frac{1}{2}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $c_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Рассматривая оставшиеся значения, получаем ответ: $c = \pm\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Д1.7. а) Имеем, $u = i$ и $(1-u)a = 2$, поэтому $f(1+2i) = i$.

б) Если $f(1) = i$, то $u + (1-u)a = i$, откуда $f(-1) = i - 2u$. Если $|u| = 1$, то $f(-1)$ лежит на окружности радиуса 2 с центром в i, при этом $f(-1) \neq i - 2$.

в) Ответ: дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$ при $x < 1$.

г) Так как $f(z) = u(z-a) + a$, то $z \mapsto f(z)$ – это поворот на угол $\arg u$ относительно точки a с последующей гомотетией с коэффициентом $|u|$. Если a лежит во второй четверти, то, так как она остается на месте, никакого u найти не удастся. Положите $u = v + iw$ и $a = b + ic$. Искомое множество есть объединение всех полуплоскостей $b \geq tc$ при всех $t > 0$. Ответ на рисунке.

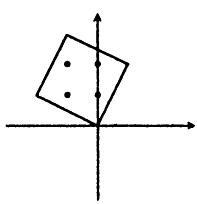


Д1.8. а) $a = 4; 9; 14; 19$.

б) Имеем: $z = (x + iy)(1 + 2i) = x - 2y + i(y + 2x)$. Поскольку $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то $x - 2y = 2x + y$, так что $x = -3y$ и $z = -(3 - i)(1 + 2i)y$.

в) Если $z = \frac{u}{v}$, где $u, v \in \mathcal{K}$, то $z = a + ib$, где a и b – рациональные числа, поэтому и число $|z|^2$ рационально. Если $z = |z|(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$, то для его квадрата получаем выражение $z^2 = |z|^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, чего не может быть, так как число $\cos\frac{\pi}{4}$ иррационально.

г) На рисунке изображен один из квадратов, вершинами которого являются числа множества $\mathcal{K}$, все остальные получаются из них при помощи параллельных переносов. Действительно, $z = (x + iy)(1 + 2i) = x(1 + 2i) + y(i - 2)$. Для каждого из четырех гауссовых чисел, лежащих внутри квадрата, очевидно, какая из точек множества *mathcalK* находится от нее на расстоянии 1.



Д1.9. а) $z = 1; -1 \pm i$.

б) Имеем,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3) - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 1,$$

в силу теоремы Виета.

в) Если $z = a \in \mathbb{R}$ – корень уравнения $z^3 + z^2 - c = 0$, то два оставшихся корня являются корнями уравнения $z^2 + (a+1)z + (a^2 + a) = 0$. Они являются комплексными при $a < -1$ и $a > \frac{1}{3}$, причем первый случай нас не интересует (поскольку действительный корень $a < -1$). Так как корни этого уравнения комплексно сопряжены, то $|z_1 z_2| = |z_1|^2 \le 1$, если $a^2 + a \le 1$, откуда $a \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ответ: $0 \le c \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

г) Если $|a| = |b| = |c| = 1$, то $|a + b + c| = |ab + bc + ca|$ (задача 5), что противоречит теореме Виета.

Д1.10. а) $z = -1; -i; 1 + i$. б) Так как $z_1 + z_2 = 2z_3$, то $z_3 = 0$, откуда $b = 0$.

в) Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то из условия, что эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольника, следует, что они являются корнями уравнения $z^3 = b_1$. Следовательно, они также и корни уравнения $az + b + b_1 = 0$, которое тем самым будет иметь по крайней мере три различных корня, что возможно только при $a = 0$.

г) Осталось показать, что если $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \ne 0$, то найдется решение системы неравенств

$$\begin{cases} a_1 \cos 2\varphi + a_2 \sin 2\varphi \ge 0, \\ b_1 \cos 3\varphi + b_2 \sin 3\varphi \ge 0, \end{cases}$$

для которого хотя бы одно из этих неравенств является строгим (тогда $|p(z)| > 1$!). Если $a_1 \cos 2\varphi_0 + a_2 \sin 2\varphi_0 > 0$, то и $a_1 \cos 2(\varphi_0 + \pi) + a_2 \sin 2(\varphi_0 + \pi) > 0$. С другой стороны, при подстановке φ_0 и $\varphi_0 + \pi$ во второе выражение получаем значения противоположных знаков.

Дополнение 2.

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

От разумного перебора к формулам для числа перестановок и числа размещений. Два основных комбинаторных принципа. Числа сочетаний. Представления в виде сумм. Числа сочетаний как биномиальные коэффициенты. Перестановки с повторениями. Геометрические комбинаторные задачи. Переформулировки стандартных задач. Подсчет вероятностей в случае равновероятных исходов. Подсчет вероятности одновременного осуществления независимых событий. Геометрические вероятности – подсчет вероятности события в случае бесконечного множества исходов.

Обсуждение. В самом упрощенном виде комбинаторная задача состоит в подсчете числа элементов некоторого конечного множества (числа определенных комбинаций). Если их не слишком много, то подсчет можно провести посредством разумного перебора, так, как это было проделано при решении задач 12–14 и 14.12–14.14 *раздела* "*Разные задачи*". С другой стороны, при решении указанных задач применялись два так называемых *основных комбинаторных принципа*, которые в общем виде будут сформулированы чуть далее, однако они настолько естественны, что здравомыслящий человек применяет их неосознанно. Рассмотрим следующую задачу, для решения которой не требуется никаких знаний, а нужны только здравый смысл и четкость мышления.

Задача 1. Сколько различных буквенных сочетаний можно образовать, переставляя буквы слова: 1) *сон*; 2) *слон*; 3) *арба*; 4) *аллах*.

12 Зак. 1116

1) Каждая из трех букв может быть первой и для каждого из этих трех вариантов имеются два варианта расположения двух оставшихся букв, таким образом, всего вариантов $3 \cdot 2 = 6$: *сон, сно, осн, онс, нсо, нос.*

2) В данном случае также возможно выписать все возможные варианты, однако лучше рассуждать по-другому. Если на первом месте стоит буква *с*, то, как следует из предыдущей задачи, оставшиеся три буквы можно расположить 6 способами. То же верно, когда первой стоит любая другая буква, поэтому всего вариантов имеется $4 \cdot 6 = 24$.

3) В данном случае вариантов будет меньше, поскольку бессмысленно менять местами две одинаковые буквы *а*. Конечно, вариантов окажется вдвое меньше, чем в предыдущей задаче, однако давайте проведем другое рассуждение. Букву *б* можно поставить на четыре места, для каждого варианта ее расположения есть еще три места, на которые можно поставить букву *р*, а на оставшиеся два места – букву *а*. Таким образом, всего имеется $4 \cdot 3 = 12$ вариантов.

4) Ясно, что есть 5 вариантов расположения буквы x. Осталось подсчитать, сколькими способами можно выбрать места (из четырех оставшихся), на которых будут стоять две буквы *а*. Вначале выпишем все варианты, в которых присутствует 1, затем – в которых нет 1 и есть 2, и так далее:

$$\begin{gathered} 12, 13, 14, \\ 23, 24, \\ 34, \end{gathered}$$

следовательно, есть 6 способов выбрать место для букв *а*, таким образом, всего вариантов $5 \cdot 6 = 30$.

Конечно, в этой задаче происходило вычисления числа перестановок и перестановок с повторениями, а также использовалось значение числа сочетаний, однако более естественно сначала порешать подобные задачи, а уж потом вводить эти понятия.

Задача 2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых: 1) все цифры четны; 2) нет стоящих рядом цифр одной четности; 3) существует по крайней мере одна единица?

1) Пятизначное число $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$ есть упорядоченный набор $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$, где $a_4 \in \{2, 4, 6, 8\}$ и $a_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ при $i \leq 3$, поэтому всего имеется $4 \cdot 5^4 = 2500$ таких чисел.

2) Будем по отдельности считать количество чисел, начинающихся с чётной цифры и начинающихся с нечетной. В первом случае имеются 4 варианта для первой цифры и по 5 для каждой из следующих, поэтому чисел первого типа всего имеется $4 \cdot 5^4 = 2500$. Если же первая цифра нечетна, то таких чисел будет $5^5 = 3125$. Таким образом, имеется 5625 таких чисел.

3) Удобнее вначале подсчитать количество пятизначных чисел, в записи которых нет ни одной единицы, каковых имеется $8 \cdot 9^4 = 52488$. Поскольку всего есть $9 \cdot 10^4 = 90000$ пятизначных чисел, то чисел, в записи которых присутствует хотя бы одна единица, имеется $90000 - 52488 = 37512$.

Итак, сформулируем основные комбинаторные принципы подсчета:

1) если два множества конечны и не пересекаются, то число элементов в их объединении равно сумме числа элементов в каждом из них;

2) число всевозможных упорядоченных пар (a, b), где a – элемент первого множества, а b – элемент второго, равно произведению числа элементов этих множеств.

Естественно, что эти принципы могут быть перенесены на случай произвольного конечного числа множеств:

3) если множества A_i, $i = 1, 2, \ldots n$, попарно не пересекаются, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|;$$

4) число всевозможных упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равно произведению $|A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_n|$

(здесь и далее $|A|$ – число элементов конечного множества A).

Первый из этих принципов можно обобщить на случай пересекающихся множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1,\ldots,i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

В случае $n = 2$ получаем формулу $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, доказательство которой очень просто; общая формула доказывается по индукции.

В следующей задаче мы введем два числа, называемых числом перестановок и числом размещений.

Задача 3. Сколькими способами можно выложить в один ряд: 1) n различных предметов; 2) k предметов, выбранных из n данных различных?

1) Найдем число упорядоченных наборов $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, где $a_{i_1} \in A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_n}\}$, $a_{i_2} \in A \setminus \{a_{i_1}\}$, $a_{i_3} \in A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}\}$ и т. д., что не совсем соответствует второму комбинаторному принципу подсчета, так как множество, которому принадлежит элемент a_3, зависит от элементов, выбранных на предыдущем шаге. Однако число элементов множества, из которого выбирается a_s, ни от чего не зависит и равно $n - s + 1$. Поэтому ответ: $n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ (читается "n-факториал"). Таким образом, мы доказали, что число P_n *перестановок n элементов* равно $n!$.

2) Число способов, которыми можно выложить в ряд k предметов из n данных различных (т. е. число упорядоченных наборов $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k})$), называется числом A_n^k *размещений из n элементов по k*. Как следует из приведенного рассуждения,

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 4. Сколькими способами можно составить команду: 1) из двух человек, если имеются пять претендентов; 2) из трех человек, если претендентов шесть?

1) В этом случае нетрудно сделать полный перебор. Пронумеруем претендентов цифрами от 1 до 5 и перечислим все команды таким же образом, как это было сделано при решении последнего пункта задачи 1:

$$12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45,$$

таким образом всего есть 10 вариантов.

2) Конечно, и в этом случае можно просто перебрать все возможные варианты, однако поступим по-другому. Разделим все варианты выбора команды на два типа: когда первый претендент взят в команду и когда он не взят. В первом случае осталось выбрать двух человек из пяти, что, как следует из предыдущего пункта, можно сделать 10 способами. Если в команде первый претендент не участвует, то все трое ее членов выбираются из оставшихся пяти претендентов. Но, как нетрудно видеть, для выбора трех человек из пяти существует столько же вариантов, что и для выбора двух человек из пяти (не все ли равно, выбираем мы тех трех, что войдут в команду, или же двоих, кто в нее не войдет). Следовательно, вариантов второго типа тоже 10, поэтому всего имеется 20 возможных команд.

В данной задаче мы встретились с так называемыми *числами сочетаний из n по k* – числом C_n^k способов, которыми можно выбрать k предметов из n данных различных (другими словами, числом всех k-элементных подмножеств множества из n элементов). Для того чтобы получить общую формулу, используем еще один простой, но несколько менее наглядный комбинаторный принцип.

Сопоставим каждому набору $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ ("способу выбора" подмножества) множество всех упорядоченных наборов, составленных из его элементов. Итак,

$$\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \mapsto A_{\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}}.$$

Как следует из предыдущего, число элементов в каждом из таких множеств (при фиксированных $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$) равно $k!$. Таким образом, каждое из множеств справа состоит из $k!$ элементов, а общее число элементов в их объединении равно числу A_n^k размещений из n по k. Следовательно, чтобы получить интересующее нас число неупорядоченных наборов (подмножеств), нужно разделить второе число на первое, в результате получим, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Между числами сочетаний имеется важное рекуррентное соотношение

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

По-существу, доказательство этого соотношения было дано при решении второго пункта задачи. В общем случае можно рассуждать аналогичным образом. Разобьем все $(k+1)$-элементные подмножества множества из $n+1$ элемента на два типа: первый из них состоит из тех подмножеств, которые содержат первый (отмеченный) элемент. Таких подмножеств столько же, сколько и k-элементных подмножеств множества из n элементов (так как один элемент уже выбран, осталось выбрать k из n), а именно C_n^k. Подмножества второго типа не содержат отмеченный элемент и их имеется C_n^{k+1}, так как нам надо выбрать $k+1$ элемент из n данных.

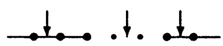
Доказательство другого (и более очевидного) соотношения также содержалось в решении этой задачи:

$$C_n^{n-k} = C_n^k.$$

Прежде чем рассмотреть задачу, благодаря которой числа сочетаний имеют и другое название, рассмотрим задачу, в которой они возникают несколько неожиданным образом.

Задача 5. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде упорядоченной суммы: 1) k натуральных чисел; 2) k неотрицательных целых чисел?

1) Отметим на прямой n точек. Выберем $k-1$ промежуток с концами в паре соседних точек и вобьем "колышек" в его середину. Пусть x_1 – число точек слева от крайнего левого колышка, x_2 – число точек между этим колышком и следующим за ним и т. д. (рисунок).



Таким образом, каждому набору из $k-1$ промежутка сопоставлено упорядоченное представление $n = x_1 + \ldots + x_k$. Нетрудно видеть, что это сопоставление взаимно однозначно, откуда и получаем ответ: C_{n-1}^{k-1} способами.

Итак, доказано, что уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ имеет C_{n-1}^{k-1} натуральных решений.

2) В данном пункте требуется найти число неотрицательных целочисленных решений того же самого уравнения. Поступим следующим образом: составим уравнение, которое будет иметь такое же число натуральных решений, для чего сделаем замену $y_i = x_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, получив в результате уравнение

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n + k.$$

Осталось заметить, что число неотрицательных целых решений исходного уравнения совпадает с числом натуральных решений полученного уравнения, которое, в силу результата предыдущего пункта, равно C_{n+k-1}^{k-1}.

Если в выражении $(x+1)^n$ раскрыть скобки, то получится некоторый многочлен, коэффиценты которого называются *биномиальными коэффициентами*:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Сама эта формула называется *формулой бинома Ньютона.* Дадим объяснение тому, что для коэффициентов при x^k в правой части этой формулы было использовано обозначение C_n^k. Ясно, что $C_n^0 = C_n^n = 1$. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k = (x+1)(x+1)^n = (x+1)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k =$$
$$= x^{n+1} + x\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k + 1 =$$
$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k + 1,$$

то $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ и $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$. Существует табличное представление чисел сочетаний – биномиальных коэффициентов в виде так называемого *треугольника Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Поскольку для биномиальных коэффициентов имеет место то же рекуррентное соотношение, что и чисел сочетаний, значит, они совпадают. В частности, биномиальные коэффициенты можно найти по той же формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Подставив в тождество, являющееся определением биномиальных коэффициентов, по очереди значения $x = 1$ и $x = -1$, получим равенства

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad \text{и} \quad \sum_{k \text{ четно}} C_n^k = \sum_{k \text{ нечетно}} C_n^k.$$

Задача 6. Доказите тождества:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}; \quad 2)\ \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

1) Имеем,

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} =$$
$$= n \cdot \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1},$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} = n2^{n-1}.$$

2) Первое доказательство. Так как

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k x^k \text{ и } (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

то, приравняв в равенстве

$$(1+x)^{2n} = \left((1+x)^n\right)^2$$

коэффициенты при x^n и воспользовавшись симметричностью коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$, получим искомое тождество.

Второе доказательство является чисто комбинаторным. Мы подсчитаем двумя способами число вариантов выбора n элементов из $2n$-элементного множества. С одной стороны, это число равно C_{2n}^n. Теперь разделим множество из $2n$ различных элементов на два множества по n элементов в каждом, так сказать, из белых и из черных точек. Выбирать n точек можно следующим образом: для каждого k от 0 до n мы выбираем множество из k белых точек и $n-k$ черных, что можно сделать $C_n^k \cdot C_n^{n-k} = \left(C_n^k\right)^2$ способами. Осталось просуммировать полученные числа при $k = 0, 1, \dots, n$.

Задача 7. Найдите коэффициент при одночлене $a^3b^2c^5$ в разложении "тринома" $(a+b+c)^{10}$ по степеням a, b и c.

При "раскрытии скобок" в произведении $(a+b+c)^{10}$ коэффициент при каждом из одночленов $a^kb^lc^m$ равен числу вариантов, которыми можно выбрать a в m скобках, b в l других и c в $m = 10-k-l$ оставшихся. Ясно, что общее число вариантов равно произведению

$$C_{10}^3 \cdot C_7^2 \cdot 1 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} \cdot \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 6} = 2520.$$

Ответ в данной задаче – это частный случай так называемого числа *перестановок с повторениями*. Именно, пусть имеется k_1 одинаковых предметов первого типа (букв некоторого алфавита), k_2 – второго, k_s – последнего. Тогда количество различных буквосочетаний, которые можно составить из всех этих $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ букв, равно $\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\ldots k_s!}$. Действительно, если выбрать сначала k_1 мест из n возможных для букв первого типа, k_2 мест из $n - k_1$ оставшихся мест и так далее, то общее число вариантов будет равно

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}^{k_s} =$$
$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1)!(n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \frac{k_s!}{k_s!} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\ldots k_s!}$$

Однако не следует думать, что ответ во всякой комбинаторной задаче выражается через числа сочетаний или размещений (см., к примеру, задачу 14.15).

Задача 8. Сколько существует различных "игральных кубиков", т. е. кубиков, на гранях которых расставлены одна, две, ..., шесть точек?

Прежде всего следует понять, что означает, что кубики различны. Дело в том, что тела в пространстве можно поворачивать, поэтому если при некотором расположении двух тел мы видим различия, то это совсем не означает, что они (или их разметка) действительно отличаются друг от друга.

Рассмотрим два кубика и поставим каждый из них на плоскость той гранью, на которой стоит одна точка. Если на верхней грани стоит разное число точек, то кубики различны. Теперь предположим, что у обоих кубиков на верхней грани имеются, к примеру, две точки. Тогда на одной из боковых граней на обоих кубиках стоят три точки, повернем их так, чтобы эта грань была невидима. Теперь расположение кубиков однозначно зафиксировано. На оставшихся трех гранях находятся четыре, пять, шесть точек, которые можно расставить шестью способами. Осталось заметить, что на грани, противоположной грани с одной точкой, может стоять любая из пяти комбинаций точек. Следовательно, всего имеется $5 \cdot 6 = 30$ различных “игральных кубиков”.

Задача 9. Каково число вариантов замощения “доминошками” полоски размером: 2×5; $2 \times n$ (полоску переворачивать не разрешается).

Для полоски $2{\times}5$ можно провести прямой перебор, в результате должна стать понятной идея, при помощи которой можно будет решить задачу в общем виде. Предположим, что слева находятся две горизонтально расположенные доминошки. Найдем число вариантов замощения ими оставшейся полоски 2×3. Ясно, что таких вариантов имеется три: все доминошки вертикальные, одна доминошка вертикальная, причем посредине полоски она располагаться не может. Теперь пусть слева находится вертикальная доминошка. Осталось подсчитать число вариантов замощения доски 2×4. Если и у нее слева находится вертикальная доминошка, то таких вариантов три (мы уже их подсчитали). Если две горизонтальные, то оставшуюся часть 2×2 можно замостить двумя способами. Таким образом, во втором случае имеется всего 5 вариантов. Тем самым, всего их восемь. Рассуждение станет более ясным, если мы введем следующие обозначения. Пусть u_n – это число вариантов замощения доминошками полоски $2 \times n$. Тогда $u_5 = u_4 + u_3$, $u_3 = u_2 + u_1 = 3$, $u_4 = u_3 + u_2 = 5$, так что $u_5 = 8$.

Итак, центральным моментом рассуждения является рекуррентное соотношение

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

совпадающее с соотношением, определяющим *числа Фибоначчи*. Осталось заметить, что в нашей задаче $u_1 = 1$ и $u_2 = 2$, следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$ число u_n вариантов замощения полоски совпадает с n-ым числом Фибоначчи.

> Не читайте сразу решение следующей задачи, а вначале подумайте!

Задача 10. Найдите число:

а) последовательностей из 8 нулей и единиц, в которых ровно 3 нуля;

б) подмножеств множества из 10 элементов, состоящих из нечетного числа элементов;

в) $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_k^n$.

Сколькими способами можно:

г) разложить 12 одинаковых монет по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не остался пустым;

д) выдать в течение недели два апельсина, три яблока и две груши, если каждый день выдавать по одному фрукту;

е) составить команду из трех мальчиков и трех девочек, если среди кандидатов 10 мальчиков и 8 девочек?

Решения этих задач должны быть понятны из ответов:

а) $C_8^3 = 56$.

б) $\sum_{k=1}^{5} C_{10}^{2k-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{10} = 512$.

в) $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_k^n = 3^n$.

г) $C_{11}^4 = 330$.

д) $\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 210$.

е) $C_{10}^3 \cdot C_8^3 = 6720$.

Какими особенностями обладают комбинаторные задачи, в связи с которыми их очень полезно использовать в обучении? Первое: ответ в этой задаче – натуральное число, угадать которое в подавляющем большинстве случаев невозможно; если ответ верен, то и рассуждение верно! Второе: при решении таких задач необходимо рассуждать (см. предыдущее замечание). Третье: одна и та же по сути задача может иметь несколько эквивалентных формулировок; надо приучать улавливать сходство. Последняя особенность связана с повсеместным распространением и применением компьютеров. Не всегда полезно проводить перебор на листке бумаги, вместо этого можно написать программу, что потребует от учащегося точности в описании алгоритма. Если программа верна, то считайте, что вы свою задачу выполнили, не всегда стоит искать явную формулу.

Пожалуй, самым интересным приложением комбинаторных рассуждений и формул является подсчет *вероятностей* событий. При этом основные понятия – *равновероятность событий* и их *независимость* мы будем понимать чисто интуитивно. В качестве определения *вероятности события* при конечном числе равновероятных исходов принимается *отношение* $\frac{k}{n}$ *числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов некоторого испытания.* К примеру, мы считаем, что исходы – герб или решка – при бросании симметричной монеты равновероятны, поэтому вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$. Если монету бросить два раза подряд, то ясно, что исход второго броска не зависит от того, что выпало в результате первого из них – герб или решка, т. е. эти события A_1 (результат первого броска) и событие A_2 (результат второго) независимы. Таким образом, события ГГ,ГР,РГ,РР равновероятны, следовательно, вероятность появления, к примеру, двух гербов при бросании двух монет равна $\frac{1}{4}$.

Задача-шутка. Какова вероятность выиграть в лотерею? Конечно, одна вторая, поскольку исходов всего два: "выиграю" или "не выиграю".

Рассмотрим пример.

Задача 11. Какова вероятность того, что при одновременном бросании монеты и игрального кубика монета упадет гербом вверх, а на кубике выпадет не менее пяти очков?

Ясно, что мы считаем, что результаты бросания монеты и кубика не зависят друг от друга. Всего имеется $2 \cdot 6 = 12$ вариантов, которые мы считаем равновероятными (и монета, и кубик "правильные"). Подходящих вариантов два: *Г5* и *Г6*, значит, искомая вероятность равна $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Вычисление вероятности одновременного осуществления двух событий можно формализовать. Предположим, что в первом испытании имеются k_1 благоприятных исходов из n_1(равновероятных) возможных, во втором – k_2 из n_2, таким образом, вероятность успеха в первом случае равна $p_1 = \frac{k_1}{n_1}$, во втором равна $p_2 = \frac{k_2}{n_2}$. Какова вероятность того, что при одновременном осуществлении этих испытаний нам в каждом из них будет сопутствовать успех?

Всего имеются $n = n_1 \cdot n_2$ исходов данной пары испытаний, из которых благоприятными являются $k = k_1 \cdot k_2$ пар. Мы считаем проводимые испытания независимыми, т. е. считаем, что результат одного из них не влияет на результат второго, откуда следует, что и пары исходов равновероятны. Следовательно, искомая вероятность равна

$$p = \frac{k}{n} = \frac{k_1 \cdot k_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{k_1}{n_1} \cdot \frac{k_2}{n_2} = p_1 \cdot p_2.$$

Полученная формула называется *формулой умножения вероятностей* при проведении двух независимых испытаний.

При определении того, являются ли события равновероятными, в действительности легко сделать ошибку. Рассмотрим следующий пример.

Задача 12. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков будет равна семи?

Пусть a_i – число очков, выпавших на i-м кубике. Ясно, что все исходы (a_1, a_2) равновероятны и всего их имеется 36. Сколько существует пар (a_1, a_2) таких, что $a_1 + a_2 = 7$? Шесть: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, таким образом, искомая вероятность равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

> Обратите внимание, что мы различали, к примеру, пары $(1,6)$ и $(6,1)$, что можно было сделать, посчитав, что игральные кубики отличаются друг от друга, например, по своему цвету. Такое предположение было необходимо сделать для того, чтобы использовать для определения вероятности понятие равновероятных исходов. Рассмотрим такое "решение". Всего возможных исходов имеется $C_6^2 + 6 = 21$ (число исходов, в которых на кубиках выпало разное число очков, плюс 6 исходов, когда выпал "дубль"). Подходящими для нас исходами являются такие, когда выпало 1 и 5, 2 и 6, 3 и 4, таким образом искомая вероятность равна $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Ошибка в приведенном рассуждении состоит в том, что в нем предполагалось, что, к примеру, исход 1 и 2 и исход 2 и 2 являются равновероятными, тогда как вероятность первого из них в действительности вдвое больше вероятности второго.

Задача 13. Предположим, что самолет может продолжать полет и даже совершить посадку, если у него работает хотя бы половина имеющихся у него двигателей. Какие самолеты являются более безопасными, двух- или четырехмоторные?

Пусть p – вероятность выхода из строя одного двигателя. Двухмоторный самолет потерпит катастрофу, если у него отказали оба двигателя. Поскольку естественно считать, что двигатели выходят из строя независимо друг от друга, то вероятность такого печального события равна $p \cdot p = p^2$. Четырехмоторный самолет потерпит катастрофу, если у него вышли из строя все 4 двигателя – вероятность чего равна p^4, или же три. При этом остаться работать может любой из четырех, значит, вероятность такого события равна $4p^3(1-p)$. Таким образом, вероятность катастрофы четырехмоторного самолета равна $p^4 + 4p^3(1-p) = 4p^3 - 3p^4$.

Рассмотрим неравенство $p^2 > 4p^3 - 3p^4$, или $3p^2 - 4p + 1 > 0$, откуда $p > 1$ (чего не бывает) или $p < \frac{1}{3}$. Ясно, что вероятность p выхода двигателя из строя – малое число, иначе аварии происходили бы слишком часто. Таким образом, менее надежными являются двухмоторные самолеты.

Задача 14. Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$ (тем самым с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

Вероятность того, что все 40 партий закончатся вничью, равна $4^{-40} = 2^{-80} < 10^{-24}$, поэтому будем считать, что матч продолжается до первой победы. Будем решать задачу в общем виде, обозначив через $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ вероятности победы при игре белыми, соответственно, черными фигурами, вероятность ничьи $r = \frac{1}{4}$. Вероятность победы игрока, который в первой партии играет белыми фигурами, равна сумме вероятностей его победы в k-ой по счету партии, т. е. сумме ряда

$$p + qr + pr^2 + qr^3 + \ldots = (p + qr)(1 + r^2 + r^4 + \ldots) = \frac{p + qr}{1 - r^2} = \frac{3}{5}.$$

Действительно, если матч закончился на второй партии, то первая закончилась вничью, а вторая была выиграна при игре черными фигурами, вероятность чего равна произведению $r \cdot q$, если же матч закончился на третьей партии, то первые две закончились вничью, а в третьей победитель играл белыми, поэтому вероятность равна $r^2 \cdot p$ и так далее.

Задача 15. Некоторое устройство может находиться в одном из трех состояний (обозначаемых далее a, b и c). Если оно в некоторый момент находится, к примеру, в состоянии a, то через одну секунду оно перейдет в одно из состояний b или c (вероятность перехода в каждое из которых равна $\frac{1}{2}$). Обозначим через $p_n(x)$, где $x \in \{a, b, c\}$, вероятность того, что через n секунд устройство будет находиться в состоянии x; в начальный момент оно находится в состоянии a.

а) Вычислите $p_3(x)$, $x \in \{a, b, c\}$.

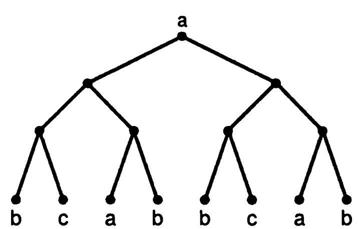
б) Может ли при некотором n вероятность $p_n(x)$, $x \in \{a, b, c\}$, быть равной $\frac{1}{3}$?

в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = \frac{1}{3}$.

г) Докажите, что утверждение, сформулированное в предыдущем пункте, равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k\equiv i \pmod 3} C_n^k = \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, 2.$$

а) $p_3(a) = \frac{1}{4}$, $p_3(b) = p_3(c) = \frac{3}{8}$. Рассмотрим дерево возможных переходов из состояния в состояние в течение первых трех секунд. Поскольку все возможные из восьми вариантов переходов равновероятны, то ответ следует из того, что в нижней строчке состояние a встречается два раза, а каждое из состояний b и c – по три.



б) Если состояние x встречается в нижней строчке дерева возможных переходов за n секунд k раз, то $p_n(x) = \frac{k}{2^n} \neq \frac{1}{3}$.

в) Положим $x_n = p_n(x)$. Тогда $x_n = \frac{1}{2}(1 - x_{n-1})$. Действительно, на n-й секунде устройство будет находиться в состоянии x тогда и только тогда, когда в предыдущий момент оно находилось в одном из двух других состояний (с вероятностью $1 - x_{n-1}$), из которых оно перешло в x (с вероятностью $\frac{1}{2}$). Осталось заметить, что

$$\left|x_n - \tfrac{1}{3}\right| = \left|\tfrac{1}{2}(1 - x_{n-1}) - \tfrac{1}{3}\right| = \tfrac{1}{2}\left|x_{n-1} - \tfrac{1}{3}\right|,$$

поэтому $x_n - \frac{1}{3} \to 0$ при $n \to \infty$.

В действительности нетрудно найти явные формулы для вероятностей $p_n(x)$:

$$p_n(a) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right), \quad p_n(b) = p_n(c) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right).$$

г) Утверждение будет следовать, к примеру, из формулы

$$p_n(a) = \tfrac{1}{2^n} \sum_{k \equiv 2n\,(3)} C_n^k$$

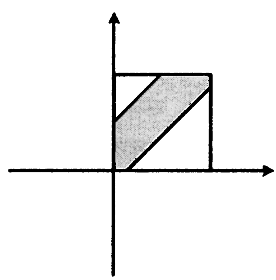
и ее аналогов для вероятностей $p_n(b)$ и $p_n(c)$. Докажем приведенную формулу (доказательства двух других аналогичны).

Припишем переходам $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$ число $+1$, а переходам в обратном направлении – $a \mapsto c \mapsto b \mapsto a$ – число -1. Таким образом, последовательность переходов за n секунд кодируется последовательностью длины n, состоящей из ± 1. Предположим, что в некоторой такой последовательности встречаются k штук $+1$. Нетрудно понять, что последнее состояние совпадает с первым тогда и только тогда, когда $k - (n - k) = 2k - n \equiv 0 \pmod 3$, или $2k \equiv n \pmod 3$, или $k \equiv 2n \pmod 3$. Осталось заметить, что вероятность каждой из последовательностей равна $\frac{1}{2^n}$, а число последовательностей, в которых $+1$ встречается k раз, равно C_n^k.

Во многих случаях бывает нужно найти вероятность события в случае бесконечного множества возможных исходов.

Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие между исходами испытания и точками некоторого множества G на плоскости, причем процесс выбора точки этого множества происходит случайным образом. Мы можем сделать предположение, что вероятность попадания точки в некоторое множество не зависит от его формы, а зависит лишь от его площади. Конечно, в каждом конкретном случае правомерность такого заключения должна быть проверена экспериментально (это есть проверка правомерности применения данной математической модели). Поэтому если нас интересует вероятность наступления некоторого события, которому при имеющемся соответствии сопоставлено подмножество $X \subset G$, то вероятность этого события равна отношению площади множества X к площади всего множества G.

Задача 16. Вася и Оля договорились о встрече между 17 и 18 часами. Вася будет ждать Олю в течение 30 минут после своего прихода, а Оля Васю – 10 минут. Какова вероятность их встречи, если каждый из них может подойти к назначенному месту в любой момент времени между 17 и 18 часами?



Обозначим через $17+x$ время прихода Васи, а $17+y$ – Оли; $x, y \in [0; 1]$. Из условия задачи следует, что они встретятся, если $x \le y \le x+\frac{1}{2}$ или $y \le x \le y+\frac{1}{6}$, т. е. если $x-\frac{1}{6} \le y \le x+\frac{1}{2}$. На рисунке заштриховано множество точек, координаты которых удовлетворяют полученным неравенствам. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной части квадрата к площади всего квадрата. Для того чтобы найти искомую площадь, проще всего из площади всего квадрата вычесть площади двух треугольников, откуда и получаем ответ: $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{36}=\frac{19}{36}$.

Задача 17 (*задача о рассеянной секретарше*). Секретарша напечатала 10 писем и подготовила 10 конвертов с адресами, однако второпях разложила письма в конверты случайным образом. Какова вероятность того, что ни одно из писем не попадет к адресату?

Будем решать задачу в общем виде. Есть n пронумерованных конвертов и n листков с номерами от 1 до n, которые случайным образом раскладываются по конвертам. Пусть в конверт с номером k попал листок с номером a_k. Таким образом, раскладку листочков по конвертам задает перестановка $(a_{i_1}\, a_{i_2}\, \ldots\, a_{i_n})$. Задача состоит в том, чтобы найти число тех перестановок, в которых $a_{i_k} \neq k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Пусть $\mathcal{C}$ - множество всех перестановок, $|\mathcal{C}| = n!$. Обозначим через $\mathcal{B}_i$ множество тех перестановок, у которых $a_i = i$, ясно, что $|\mathcal{B}_i| = (n-1)!$. В пересечение $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j$ входят те перестановки, для которых $a_i = i$ и $a_j = j$, таким образом, $|\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j| = (n-2)!$. Применим формулу включений-исключений к множествам $\mathcal{B}_i$:

$$\begin{gathered}|\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \ldots \cup \mathcal{B}_n| = \\ = n\cdot(n-1)! - C_n^2\cdot(n-2)! + \ldots + (-1)^{n+1}C_n^n\cdot 0! = \\ = n! - \tfrac{n!}{2!} + \tfrac{n!}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\tfrac{n!}{n!} = n!\left(\tfrac{1}{1!} - \tfrac{1}{2!} + \ldots + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\right).\end{gathered}$$

Объединение $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \mathcal{B}_n$ состоит из тех и только тех перестановок, в которых $a_k = k$ хотя бы для одного k, следовательно, $n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$ - это число перестановок, для которых $a_k \neq k$ при всех k. Значит, искомая вероятность определяется формулой

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \approx \frac{1}{e} \approx 0,367879.$$

Следует подчеркнуть, что при $n = 10$ точный ответ отличается от $\frac{1}{e}$ менее, чем на $\frac{1}{11!} < 0,3\cdot 10^{-7}$!

Справочник

1. Формула *включений-исключений*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{i_1,\ldots,i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

В случае трех множеств она имеет вид

$$|A \cup B \cup C| =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| +$$
$$+|A \cap B \cap C|.$$

2. Простейшие комбинаторные понятия и формулы.
Число перестановок n различных элементов

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Число размещений k элементов, выбранных из n различных

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число сочетаний k элементов, выбранных из n различных (число k-элементных подмножеств множества из n элементов)

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Число перестановок с повторениями, т. е. число перестановок n элементов s типов, где k_s – это число элементов s-ого типа

$$\frac{(k_1 + k_2 + \ldots k_s)!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_s!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_s!}.$$

3. Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

4. Свойства чисел сочетаний (биномиальных коэффициентов)

$C_n^0 = C_n^n = 1$	$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ n \ge k \ge 1$
$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$	$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

Задачи для самостоятельного решения

Д2.1. Сколько различных буквенных сочетаний можно образовать, переставляя буквы слова: 1) "*баобаб*"; 2) "*абракадабра*"?

Д2.2. Дан выпуклый n-угольник. Найдите: а) число его диагоналей; б) наибольшее возможное число точек пересечения его диагоналей.

Д2.3. Докажите тождества: а) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} C_n^{k-1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^{k-1} = \frac{1}{n+1}$; в) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-2)^k C_n^k = (-1)^n$.

Д2.4. Найдите: а) сумму коэффициентов; б) коэффициент при x^5 в разложении многочлена $\left(x^2+x+1\right)^{10}$ по степеням x.

Д2.5. Каких чисел больше среди восьмизначных, тех, в десятичной записи которых есть единица, или же тех, в записи которых ее нет?

Д2.6. Найдите число последовательностей из 8 нулей и единиц, в которых имеется не менее 3 нулей.

Д2.7. Шестеро учеников готовятся к ответу, сидя в один ряд на скамье за общим столом. Учитель может вызвать их к доске в любом порядке, при этом после того, как ученик ответил, он выходит из класса. Какова вероятность того, что, выходя к доске, хотя бы один из них потревожит другого?

Д2.8. Какое из событий является наиболее, а какое – наименее вероятным: а) при двух бросаниях симметричной монеты хотя бы раз выпадет герб; б) при четырех бросаниях хотя бы два раза выпадет герб; в) при шести бросаниях хотя бы три раза выпадет герб?

Д2.9. Участник лотереи *4 из 20* отмечает в своем билете 4 числа из 20 имеющихся. В процессе розыгрыша определяются 4 числа, которые объявляются выигрышными в текущем тираже.

а) Найдите вероятность того, что среди отмеченных чисел ровно два окажутся выигрышными.

б) Во сколько раз вероятнее угадать ровно одно выигрышное число, чем три?

Д2.10. Двое играют в такую игру: монету бросают два раза и первый из двух игроков выигрывает, если оба раза она упала одной и той же стороной. Известно, что монета фальшивая, так что вероятность появления герба при одном бросании равна $p \neq \frac{1}{2}$. При каких p чаще будет выигрывать первый игрок?

Д2.11. Имеются две монеты, одна из которых фальшивая: на обеих ее сторонах изображен герб. Случайным образом выбрали одну монету. Какова вероятность того, что монета фальшивая, если она лежит гербом вверх?

Д2.12. Бросили два кубика и оказалось, что на одном из них выпало 3 очка. Вероятность какого события больше, что всего выпало: 5 очков, 6 очков или же 7 очков?

Д2.13. Числа $p, q \in [0; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $x^2 + px + q$ имеет действительные корни.

Д2.14. Отрезок случайным образом разделили на три части. Найдите вероятность того, что:

а) из образовавшихся частей можно составить треугольник;

б) длина каждой из частей не превосходит половины длины данного отрезка.

Д2.15. Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Двое людей по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй из них может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

Д2.16. Известно, что ученик подготовил ответы не на все из 16 выносимых на зачет вопросов.

а) Сколько вопросов он выучил, если известно, что вероятность того, что он сможет ответить на оба из случайно выбранных им двух вопросов, не меньше, чем $\frac{7}{8}$?

б) Сколько вопросов он выучил, если известно, что вероятность того, что он сможет ответить только на один из случайно выбранных им двух вопросов, равна $\frac{1}{2}$?

в) В каком случае вероятность того, что он сможет ответить на один случайно выбранный им вопрос, больше, чем вероятность того, что ему удастся ответить на два (по его выбору) из случайно выбранных им трех вопросов?

г) Учитель распределил случайным образом вопросы по восьми билетам (по два вопроса в каждом). Какова вероятность того, что ученик в состоянии ответить хотя бы на один вопрос каждого из билетов, если известно, что он подготовил ответы на 10 вопросов?

Комментарии и советы

Д2.1. Главное – это не ошибиться при подсчете числа букв.

Д2.2. а) Если на плоскости имеются n точек, то отрезков, их соединяющих, столько же, сколько пар точек. б) Точек пересечения диагоналей столько же, сколько...

Д2.3. а, б) См. задачу 6а. в) См. формулу бинома Ньютона.

Д2.4. а) Как связана сумма коэффициентов со значением многочлена в некоторой точке? б) Произведение каких сомножителей из имеющихся в каждой скобке дает x^5?

Д2.5. Проще вначале найти количество таких восьмизначных чисел, в десятичной записи которых единицы нет.

Д2.6. Проще найти число тех последовательностей, в которых не более двух нулей.

Д2.7. Опять-таки, проще найти вероятность того, что ни один из учеников не потревожит другого.

Д2.8. Всего исходов: а) 4; б) 16; в) 64; в скольких из них герб выпадет требуемое число раз?

Д2.9. См. задачу 10е.

Д2.10. Подсчитайте вероятности всех четырех событий.

Д2.11. Рассмотрите пространство всех исходов в сделанном предположении.

Д2.12. См. комментарий к предыдущей задаче и задаче 12.

Д2.13. Необходимо просто вычислить интеграл (см. задачу 16).

Д2.14. Пусть $x, y \in [0; 1]$ – это точки излома. Множеством всех исходов является единичный квадрат. Задайте множество подходящих исходов неравенствами.

Д2.15. а) Какова вероятность того, что одна пара граней раскрашена в противоположные цвета? б) См. задачу 8. в) Каким образом второй может закрасить противоположную грань? г) Если вам удастся получить ответ – $\frac{147}{1024}$, то, безусловно, рассуждаете вы верно. Поступим следующим образом: поставим на гранях номера, тогда число способов их раскраски равно $2^6 = 64$. Найдите число вариантов раскрашивания кубиков, при которых мы будем получать раскраску каждого из десяти типов.

Д2.16. а) Составьте и решите неравенство относительно количества выученных вопросов. б, в) Составьте и решите уравнение относительно количества выученных вопросов. г) Вначале подсчитайте число способов разбить $2n$ вопросов по n занумерованным билетам.

Ответы и комментарии

Д2.1. а) $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$. б) $\frac{11!}{5!\,2!\,2!} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot2} = 83160$.

Д2.2. а) $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей. б) Если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, то число их точек пересечения равно $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Д2.3. а, б) Имеем,

$$\frac{1}{k}\,C_n^{k-1} = \frac{1}{k}\,\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{1}{n+1}\,C_{n+1}^k.$$

в) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-2)^k\,C_n^k = (1-2)^n$.

Д2.4. а) 3^{10}. б) $C_{10}^2\cdot C_8^1 + C_{10}^1\cdot C_9^3 + C_{10}^5 = 1452$.

Д2.5. Всего есть $9\cdot10^7$ восьмизначных чисел, среди которых $8\cdot9^7$ не содержат единицы. Осталось выяснить, какое из чисел больше, $9\cdot10^7-8\cdot9^7$ или $8\cdot9^7$. Можно провести прямое вычисление, а можно воспользоваться неравенством Бернулли. Итак, имеем $\left(\frac{10}{9}\right)^6 > 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3} > \frac{8}{5}$. В действительности, среди n-значных чисел при $n\geq7$ больше тех, в записи которых имеется единица.

Д2.6. Всего имеется $2^8 = 256$ последовательностей. Тех, в которых не более двух нулей, имеется $1+C_8^1+C_8^2 = 37$. Ответ: 219 последовательностей.

Д2.7. Для того чтобы ни один из учеников не заставлял другого вставать с места, учитель должен всякий раз вызывать того из учеников, который сидит с краю, вероятность чего равна произведению $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{45}$, откуда следует, что искомая вероятность равна $1-\frac{2}{45} = \frac{43}{45}$.

Д2.8. Поскольку

$$p_1 = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4},\, p_2 = \frac{C_4^2+C_4^3+C_4^4}{16} = \frac{11}{16},$$

$$p_2 = \frac{C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6}{64} = \frac{21}{32},$$

то $p_1 > p_2 > p_3$.

Д2.9. а) $p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_{16}^2}{C_{20}^4} = \frac{48}{323} \approx 0,15$. б) $\frac{p_1}{p_3} = \frac{C_4^1 \cdot C_{16}^3}{C_4^3 \cdot C_{16}^1} = 35$.

Д2.10. Составим таблицу вероятностей

Исход	*ГГ*	*РГ*	*ГР*	*РР*
Вероятность	p^2	$(1-p)p$	$p(1-p)$	$(1-p)^2$

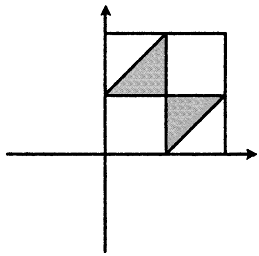
Первый игрок выигрывает чаще, если $p^2 + (1-p)^2 > \frac{1}{2}$, или $4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 > 0$, что имеет место всегда, когда монета – несимметричная.

Д2.11. Обозначим возможные исходы при бросании двух монет через Г, Р, Γ_1, Γ_2, все они равновероятны. В сделанном предположении возможными исходами являются Г, Γ_1, Γ_2. Ответ: $\frac{2}{3}$.

Д2.12. Поскольку пространством всех исходов в сделанном предположении является множество $(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)$, $(5,3),(6,3),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)$, то $p_6 = \frac{1}{11}$, а $p_5 = p_7 = \frac{2}{11}$.

Д2.13. Искомая вероятность равна интегралу $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{12}$.

Д2.14. Искомая вероятность в обоих случаях равна $\frac{1}{4}$, потому что множества подходящих исходов отличаются лишь тем, что во втором случае в него входят граничные контуры. Пусть x и y – места изломов. Предположим, что $x \le y$. Мы получаем отрезки длин x, $y-x$, $1-y$, из которых можно составить треугольник, если $x+y-x > 1-y$, $x+1-y > y-x$ и $y-x+1-y > x$, или $y > \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$. Полученная система неравенств задает левый верхний треугольник (рисунок).



Д2.15. а) Ответ: $\frac{1}{8}$, так как вероятность того, что одна пара противоположных граней раскрашена в противоположные цвета, равна $\frac{1}{2}$. б) Для определенности составим таблицу

Номер	Тип
1	Все грани белые
2	Имеется одна белая грань
3	Две белые грани имеют общее ребро
4	Две противоположные грани – белые
5	Три белые грани имеют общую вершину
6	Из трех белых граней две – противоположные
7	Две противоположные грани – черные
8	Две черные грани имеют общее ребро
9	Имеется одна черная грань
10	Все грани черные

Всего имеются 10 вариантов раскраски куба. По одному варианту в тех случаях, если все грани закрашены одним цветом или же пять граней закрашены одним цветом. По два, если две или три грани закрашены одним цветом. Действительно, если ровно две грани являются белыми, то они либо соседние, либо противоположные. Если ровно три грани – белые, то они либо имеют общую вершину, либо нет.

в) Второй красит грань, противоположную только что закрашенную первым, в противоположный цвет.

г) Ответ: составим таблицу, в которой найдем число способов получить раскраску каждого из 10 типов в предположении, что грани кубика занумерованы, а также вероятность получить такую раскраску при случайном раскрашивании граней кубика. В первой строке указан номер раскраски, во второй – число способов ее получить, в третьей – вероятность получить такую раскраску.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	12	3	8	12	3	12	6	1
$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

Действительно, если ровно одна грань – белая, то, поскольку все они занумерованы, то есть 6 вариантов. Если две соседние грани являются белыми, то таких вариантов 12 – по числу ребер куба. Если две противоположные грани – белые, то вариантов три. Если три белые грани имеют общую вершину, то вариантов столько же, сколько у куба вершин, т. е. восемь. Теперь пусть три белые грани идут “полоской”. В таком случае серединой полоски может быть любая из 6 граней куба, при этом для любой из граней имеются два (так сказать, взаимно перпендикулярных) варианта расположения полоски, так что всего их 12.

Если два кубика раскрашиваются случайным образом, то они окажутся одинаково раскрашенными с вероятностью, равной сумме квадратов вероятностей p_n, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Имеем,

$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{10}^2 = \tfrac{1}{2^{12}}\left(8^2+12^2+2(1^2+6^2+12^2+3^2)\right) = \tfrac{147}{1024}.$$

Д2.16. а) Если ученик знает ответы на p вопросов (причем по условию $p < 16$), то вероятность его успешного ответа на оба поставленных вопроса равна $\frac{C_p^2}{C_{16}^2} = \frac{p(p-1)}{15 \cdot 16} \geq \frac{7}{8}$, значит, $p^2 - p - 210 = (p-15)(p+14) \geq 0$, откуда и следует ответ: $p = 15$.

б) Этот вопрос немногим сложнее предыдущего. Однако в нем имеется следующая психологическая трудность: неискушенному учащемуся может показаться очевидным, что в данных условиях ученик выучил ответы на половину из общего числа вопросов, и так и написать в своем решении, сославшись на некую "симметрию". Однако это "очевидное" – неверно.

Если ученик знает ответы на p вопросов, то выбрать пару вопросов, из которых ответ на один ему известен, а ответ на второй – нет, он может $p(16-p)$ способами. Поэтому $\frac{p(16-p)}{C_{16}^2} = \frac{1}{2}$, откуда $p^2 - 16p + 60 = 0$, значит, $p = 6; 10$.

в) Вероятность того, что он знает один случайно выбранный им вопрос, равна $\frac{p}{16}$. Число вариантов выбора им трех вопросов, ответы по крайней мере на два из которых ему известны, равно $C_p^3 + C_p^2 \cdot C_{16-p}^1$. Поэтому условие задачи записывается неравенством

$$\frac{C_p^3 + C_p^2 \cdot C_{16-p}^1}{C_{16}^3} = \frac{p(p-1)(23-p)}{7 \cdot 15 \cdot 16} < \frac{p}{16},$$

или $p(p^2 - 24p + 128) = p(p-8)(p-16) > 0$, откуда $0 < p < 8$.

г) Решим задачу в общем виде. Вначале подсчитаем число способов разбить $2n$ вопросов по n занумерованным билетам. Поскольку вопросы для первого билета можно выбрать C_{2n}^2 способами, для второго — C_{2n-2}^2 способами и так далее, то общее число вариантов равно

$$\frac{2n(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\dots\frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n!(2n-1)!!\,.$$

Предположим теперь, что ученик знает ответы на p вопросов, и найдем число "удачных" для него способов распределения $2n$ вопросов по n билетам (здесь, конечно, $p \geq n$). Расставим вначале n вопросов из p известных по n билетам; это можно сделать $A_p^n = \frac{p!}{(p-n)!}$ способами. Оставшиеся n вопросов произвольным образом расставляем по билетам, что можно осуществить $n!$ способами. В итоге имеем $\frac{p!n!}{(p-n)!}$ вариантов, однако необходимо учесть, что у нас окажется $p - n$ билетов, ответы на оба вопроса в каждом из которых ученику известны, и такие билеты мы сосчитали дважды. Поэтому число удачных вариантов равно $\frac{p!n!}{2^{p-n}(p-n)!}$, а искомая вероятность есть

$$\frac{p!}{2^{p-n}(p-n)!(2n-1)!!}.$$

Подставив $p = 10$, $n = 8$, получим ответ: $\frac{32}{143}$.

ЗАДАЧИ

ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Эта книга написана для тех, кто свободно решает задачи из школьных учебников по математике и хочет научиться решать более содержательные задачи, хотя бы для того, чтобы поступить в выбранное высшее учебное заведение. Излагаются подходы, идеи, методы рассуждений, возможные ошибки. В конечном итоге это позволяет при внимательной работе с книгой лучше подготовиться к экзаменам – от тестового ЕГЭ до вступительного в выбранный вуз. Книга предназначена не только старшеклассникам и абитуриентам, но и учителям, особенно школ с углубленным изучением математики и физики.

Иванов Олег Александрович, доктор педагогических и кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета, преподаватель Академической Гимназии СПбГУ (ранее – знаменитая школа-интернат 45 при ЛГУ). Трижды Соросовский доцент и дважды Соросовский профессор. Автор более 100 публикаций. Книга О. А. Иванова "Избранные главы элементарной математики" переведена на английский и итальянский языки.

ISBN 5-94157-739-7

9 785941 577392

БХВ-Петербург

194354, Санкт-Петербург
ул. Есенина, 5Б

E-mail: mail@bhv.ru
Internet: www.bhv.ru

Тел./факс: (812) 591-6243