Вариант 2: профильно-элитарный экзамен 1993 года

Обязательные задачи:

1. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2 - 1)$.
   а) Пусть $a = 0$. Решите уравнение $f(x) = 1$.
   б) Пусть $a = -1$. Решите неравенство $f(x) \geqslant -1$.
   в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, a), что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?
   г) Найдите все такие положительные a, при которых для любого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.

2. Дана функция $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$, $x \in [0; \frac{3\pi}{2}]$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -\frac{1}{2}$.
   б) Найдите наибольшую длину промежутка монотонности функции f.
   в) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = a$?
   г) Дано тело, ограниченное плоскостями $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и поверхностью, получаемой при вращении графика функции f вокруг прямой $y = m$, лежащей в плоскости Oxy. При каком m объем этого тела наименьший?

Дополнительные задачи (выбирается один из трех сюжетов):

3. Дана функция $f(x) = x^3 + 3x^2$.
   а) Докажите, что фигуры, ограниченные отрезками горизонтальных касательных к графику функции f и дугами этого графика между точками его пересечения с касательными, имеют равные площади.
   б) Докажите, что график функции f симметричен относительно точки $A(-1, 2)$.

в) Докажите, что прямая, касающаяся графика функции f в точке с абсциссой x_0, не равной -1, пересечет этот график еще в одной точке, абсцисса которой равна $-2x_0 - 3$.

г) Докажите, что прямая, пересекающая график функции f в трех точках, одна из которых является серединой отрезка между двумя другими, проходит через точку $A(-1, 2)$.

4. Пусть S — множество комплексных чисел, модуль которых равен единице.

а) Докажите, что все решения уравнения $z^6 + z^3 + 1 = 0$ принадлежат множеству S.

б) Найдите все решения уравнения $2z^3 + iz^2 + 2iz = 1$, которые лежат в S.

в) Найдите все действительные a, при которых уравнение $z^6 + z^2 = a$ имеет решения, лежащие в S.

г) Найдите все значения $c \in S$, при которых уравнение $z^6 + z^2 = c$ имеет решения, лежащие в S.

5. Числа E_n^k, где n, k — целые неотрицательные, определены равенствами $E_n^k = (k+1)E_{n-1}^k + (n-k)E_{n-1}^{k-1}$, $E_n^0 = 1$ и $E_n^k = 0$ при $k \geqslant n$.

а) Докажите, что $E_n^k = E_n^{n-k-1}$.

б) Найдите отношение E_{11}^5 / E_{10}^5.

в) Докажите, что для любых натуральных чисел p и n верно тождество $p^n = E_n^0 C_p^n + E_n^1 C_{p+1}^n + \ldots + E_n^{n-1} C_{p+n-1}^n$ (здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты).

г) Докажите, что E_n^k совпадает с числом таких перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которых неравенство $a_i > a_{i+1}$ выполняется ровно для k значений $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Решения задач варианта 2.

1. а) *Ответ*: $x = 1 + \sqrt{2}$. б) *Ответ*: $x \in [\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty]$. Задачи обоих этих пунктов совершенно стандартны. Сделаем лишь одно замечание. Так как область определения неравенства 1б — это луч $x > 1$, то $2x - 1 > 1$, следовательно, это неравенство равносильно тому, что $x^2 - 1 \geqslant (2x-1)^{-1}$, $x > 1$.

в) *Ответ*: см. рис. 33; $a \in (-2; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 - 2\sqrt{2}; +\infty)$. Уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1)=1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-1=a+2x, \\ |x|>1, \\ a+2x>0, \\ a+2x\neq 1. \end{cases}$$

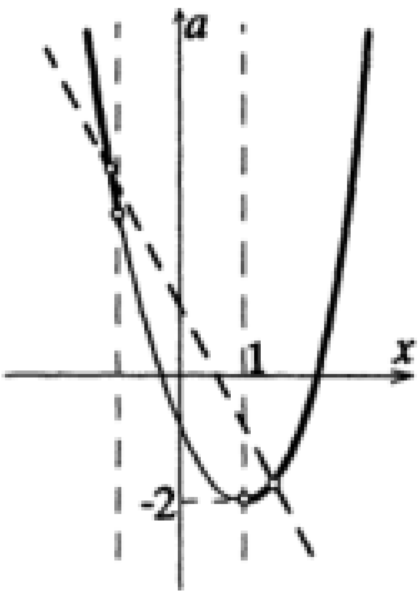

Рис. 33

Заметим, что в силу первого уравнения, одно из двух следующих за ним неравенств можно отбросить. Уравнение $a=x^2-2x-1$ задает параболу, на которой нам следует взять лишь те ее точки, которые лежат вне полосы $|x|\leqslant 1$ и не совпадают с точками пересечения этой параболы и прямой $a=1-2x$, т. е. с точками $(-\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.

Теперь ничего не стоит получить ответ на второй вопрос, имеющий такую геометрическую переформулировку: при каких a на изображенном множестве существует точка с равной a второй координатой? Более того, ясна и зависимость от a числа корней уравнения $f(x)=a$.

Конечно, уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1)=1$ можно решать чисто алгебраически. В этом случае придется исследовать, в каком случае корни уравнения $x^2-2x-(a+1)=0$ входят в область определения исходного уравнения, т. е. потребуется решить иррациональные неравенства $|1\pm\sqrt{2+a}|>1$ и уравнения $a+2(1\pm\sqrt{2+a})=1$. Если же еще не обратить внимание на то, что неравенства $|x|>1$ и $2a+x>0$ для корней квадратного уравнения имеют место одновременно, то придется также решать неравенства $2a + 1 \pm \sqrt{2+a} > 0$.

Таким образом, первый вопрос в данной задаче указывает подход, при помощи которого проще найти ответ и на второй.

Заметим, наконец, что задачу можно усложнить, предложив решить неравенство $f(x) \geqslant 1$ (что достаточно сложно сделать, если не пользоваться графической интерпретацией).

г) *Ответ*: $a \in (2; 1+2\sqrt{2}) \cup (1+2\sqrt{2}; +\infty)$. Можно, конечно, нарисовать график функции $y = \log_{a+2x}(x^2-1)$, исследовав ее поведение при различных a. Однако проще перейти к уравнению $x^2 - 1 = (a+2x)^n$. На рис. 34, 35 изображены графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = (a+2x)^n$, $x \geqslant -a/2$, при $0 < a \leqslant 2$ и $a > 2$. Ясно, что в первом случае при достаточно больших n (именно, $n \geqslant 2$) эти графики не пересекаются, а во втором они имеют одну (и только одну — почему?) общую точку. Осталось исключить тот случай, когда их общая точка совпадает с $(-\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$, т. е. при $a = 1+2\sqrt{2}$.

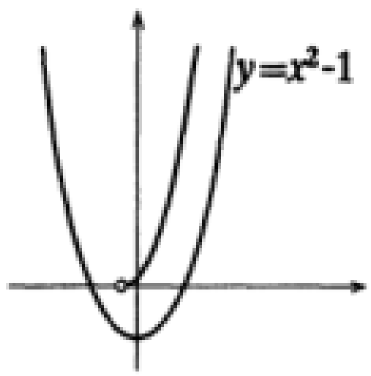

Рис. 34

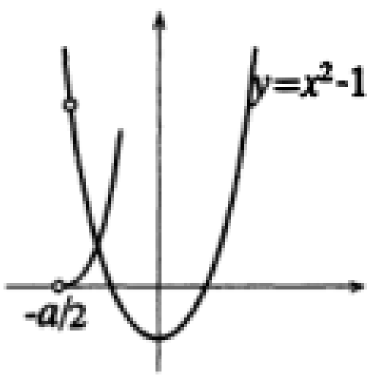

Рис. 35

2. а) *Ответ*: $\pi - \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Единственное затруднение состоит в том, чтобы понять, какое (какие) из чисел $(-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in Z$, лежат в отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$, что опять-таки проще сделать геометрически (рис. 36). Заметим также, что в этой задаче не обойтись без знания определения арксинуса.

б) *Ответ*: $\frac{2\pi}{3}$. Стандартная задача на применение производной. Требуется найти отрезок наибольшей длины, на котором $f'(x)$ сохраняла бы знак:

$$f'(x) = \cos x - \sin 2x = \cos x(1 - 2\sin x),$$

и знаки производной распределяются так, как показано на рис. 37. Так что наибольший отрезок монотонности — это $[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$.

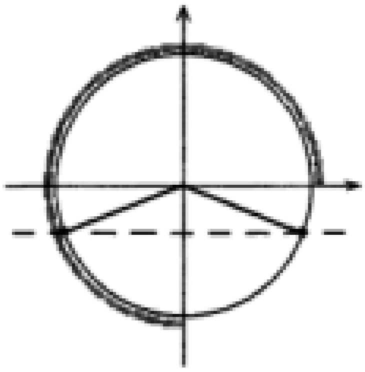

Рис. 36

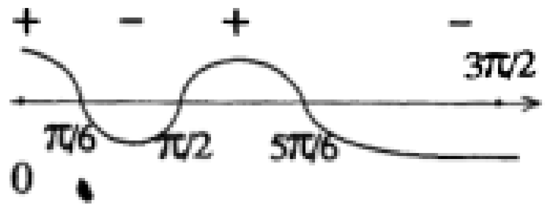

Рис. 37

в) *Ответ*: одно решение при $-\frac{3}{2} \leqslant a < \frac{1}{2}$, два — при $a = \frac{3}{4}$, три — при $a = \frac{1}{2}$ и четыре решения, если $a \in (\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$. При остальных значениях a уравнение решений не имеет. Ответ очевиден из графика (рис. 38).

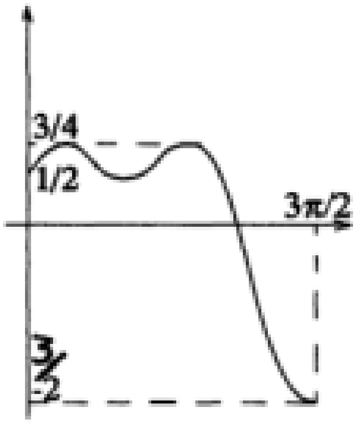

Рис. 38

Для его построения в дополнение к проведенному в предыдущем пункте вычислению нужно лишь найти значения функции f в точках $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Заметим, что решение этого уравнения при помощи замены $t = \sin x$ требует дополнительного исследования, поскольку неотрицательным значениям t (отличным от единицы) соответствуют два значения x из промежутка $[0; \frac{3\pi}{2}]$, а отрицательным — лишь одно.

г) *Ответ*: $m = \frac{2}{3\pi}$. Чрезвычайно простая задача, которая тем не менее вызвала затруднения непривычностью своей формулировки. Объем тела, полученного при вращении графика $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вокруг указанной прямой, есть $\pi \int_a^b (m - f(x))^2 dx = \pi \left((b-a)m^2 - 2m \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \right)$. Это выражение является квадратичной функцией от m, следовательно, оно наименьшее при $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. В данном случае $m = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x)dx = \frac{2}{3\pi}$.

3. Рассмотрим вначале стандартные решения.

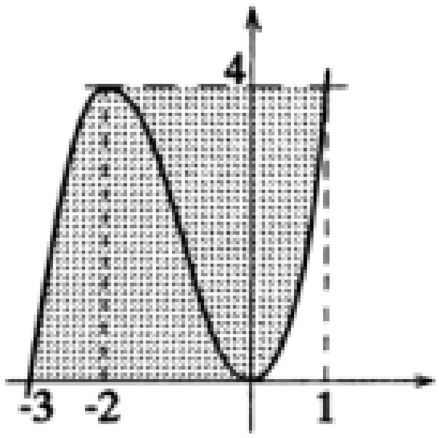

Рис. 39

а) Нетрудно построить график данной функции (рис. 39), найти ее горизонтальные касательные — $y = 0$ и $y = 4$ — и точки их пересечения с графиком — $(-3, 0)$ и $(1, 4)$. Площади, о которых идет речь, равны, соответственно, интегралам $\int_{-3}^{0}(x^3 + 3x^2)dx$ и $\int_{-2}^{1}(4 - x^3 - 3x^2)dx$. Вычислив их, получим одно и то же значение, а именно $\frac{27}{4}$.

б) Пусть $M(x, x^3 + 3x^2)$ — некоторая точка графика. Точка, симметричная ей относительно $A(-1, 2)$, имеет координаты $(-2 - x, 4 - x^3 - 3x^2)$ и лежит на графике данной функции, если $(-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 = 4 - x^3 - 3x^2$, что проверяется непосредственно.

в) Скажем сразу, что формулировка данного пункта несколько неудачна, поскольку учащиеся могли сделать прямую проверку. Пусть $l(x)$ — линейная функция, график которой — данная касательная к графику функции f. Стандартные вычисления показывают, что

$$l(x) = (3x_0^2 + 6x_0)x - 2x_0^3 - 3x_0^2,$$

осталось проверить, что $f(-2x_0 - 3) = l(-2x_0 - 3)$, это можно сделать непосредственно.

Более интересна формулировка, в которой предлагается найти вторую точку пересечения касательной и графика данной кубической функции. Приведем решение, представляющееся автору стандартным.

Уравнение $f(x) - l(x) = 0$ имеет своим корнем x_0, далее, разделив на $x - x_0$, получим квадратное уравнение

$$x^2 + (x_0 + 3)x - 2x_0^2 - 3x_0 = 0,$$

корнями которого являются x_0 и $-2x_0 - 3$.

г) Заметим прежде всего, что требуемое утверждение не вытекает только из симметричности графика относительно некоторой его точки, что видно из рис. 40. Поэтому строгое рассуждение должно использовать и другие свойства функции f.

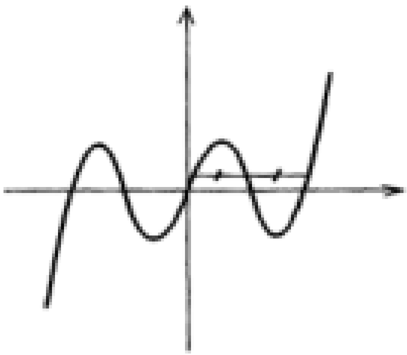

Рис. 40

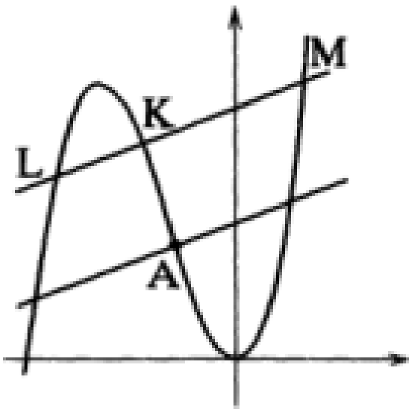

Рис. 41

Итак, пусть некоторая прямая пересекает график f в точках L, K, M, абсциссы которых равны, соответственно, x_1, x_0 и x_2. Считаем для определенности $x_1 < x_0 < x_2$ и предположим, что $x_0 \neq -1$, т. е. $K \neq A$. Проведем через точку A прямую, параллельную LM (рис. 41), пусть $b, -1$ и c — абсциссы точек ее пересечения с графиком, $b < -1 < c$. Предположим для определенности, что прямая LM лежит выше AB. Кажется очевидным (и попробуйте это аккуратно доказать), что $b < x_1 < x_0 < -1$, $x_2 > c$, следовательно, $LK < AB = AC < KM$. Попробуйте выяснить, достаточно ли потребовать непрерывности функции f и того, что всякая прямая пересекает ее график не более чем в трех точках.

Приведем также рассуждения, которые, по мнению автора, являются более изящными.

Ясно, что утверждение 3а следует из 3б, для доказательства которого осуществим параллельный перенос графика функции f на вектор $\bar{h}(1, -2)$. Получим график функции

$$y = f(x-1) - 2 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2 = x^3 - 3x.$$

Поскольку эта функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат, а значит, график исходной функции симметричен относительно A.

Для решения задач 3в и 3г используем формулы Виета. Если прямая $y = ax + b$ пересекает график f в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, то поскольку эти числа являются корнями уравнения $x^3+3x^2-ax-b=0$, то $x_1+x_2+x_3 = -3$. Если точка с абсциссой x_2 — середина отрезка, соединяющего две другие, то $x_1 + x_3 = 2x_2$, значит, $3x_2 = -3$ и $x_2 = -1$. Утверждение 3г доказано. Далее, если прямая $y = kx + d$ касается графика в точке с абсциссой x_0, то $x^3 + 3x^2 - kx - d = (x - x_0)^2(x - x_1)$ (см. решение задачи 2в варианта 1). Приравняв коэффициенты в обеих частях этого равенства, получим, что $x_1 = -2x_0 - 3$.

Конечно, проще было бы сказать, что корнями являются числа x_0, x_0 и x_1, так что $2x_0 + x_1 = -3$ по формулам Виета, однако в этом случае требуется дополнительный разговор, связанный с понятием кратного корня.

Кстати, докажите, что график всякой кубической функции центрально симметричен относительно точки перегиба этого графика.

4. а) Сделав замену $w = z^3$, получим уравнение $w^2 + w + 1 = 0$, следовательно, $w_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, так что $|w_{1,2}| = 1, |z_{1,\ldots,6}|^3 = 1$, поэтому и $|z_{1,\ldots,6}| = 1$. Можно, конечно, извлечь кубический корень из $w_{1,2}$, к примеру, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$, значит $|z_1| = 1$, но это несколько глуповато.

Более элегантное решение: если $z^6 + z^3 + 1 = 0$, то $z^9 - 1 = (z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1) = 0$, значит $|z|^9 = |z^9| = 1$, откуда $|z| = 1$.

б) *Ответ*: $z_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. Данное уравнение решается при помощи разложения на множители, нужно только сообразить использовать тождество $i^2 = -1$:

$$2z^3 + iz^2 + 2iz - 1 = z^2(2z + i) + i(2z + i) = (z^2 + i)(2z + i).$$

в) *Ответ*: $a = 0, \pm 2$. г) *Ответ*: $c = \pm\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

Как и раньше, дадим несколько решений, начав со стандартных.

Если $z \in S$, то $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и

$$z^6 + z^2 = \cos 6\varphi + \cos 2\varphi + i(\sin 6\varphi + \sin 2\varphi),$$

поэтому система

$$\begin{cases} z \in S, \\ z^6 + z^2 = a, \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = a, \\ \sin 6\varphi + \sin 2\varphi = 0. \end{cases}$$

Так как $\sin 6\varphi + \sin 2\varphi = 2\sin 4\varphi \cos 2\varphi$, то из второго уравнения системы получаем, что $\varphi = \frac{\pi k}{4}$, теперь из первого уравнения следует, что $a = 0, \pm 2$.

Система

$$\begin{cases} z \in S, \\ z^6 + z^2 \in S \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = \cos\psi, \\ \sin 6\varphi + \sin 2\varphi = \sin\psi, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\cos 4\varphi \cos 2\varphi = \cos\psi, \\ 2\sin 4\varphi \cos 2\varphi = \sin\psi, \end{cases}$$

откуда $\cos 2\varphi = \pm\frac{1}{2}$, т. е. $\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. Значит, при $\varphi = \frac{\pi}{6}$: $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 6\varphi = -1$, $\sin 6\varphi = 0$, $\cos\psi = -\frac{1}{2}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $c_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Рассматривая оставшиеся значения, получаем ответ.

Теперь решения, использующие векторы.

в) Если $a = z^6 + z^2 \in \mathbb{R}$ и $|z| = 1$, то векторы z^6 и z^2 либо противоположны, т. е. $a = 0$, либо симметричны относительно вещественной оси (рис. 42, 43), значит $6\arg z + 2\arg z = 2\pi k$, т. е. $\arg z = \frac{\pi k}{4}$ и $a = 0, \pm 2$.

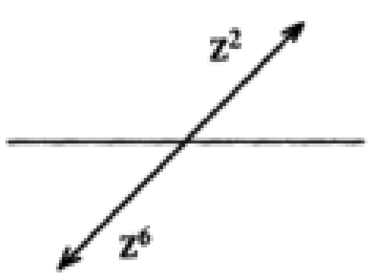

Рис. 42

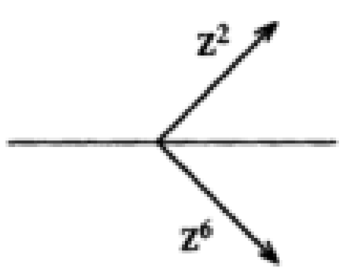

Рис. 43

г) Если $|z| = 1$, $|z^6 + z^2| = 1$, то угол между z^2 и z^6 равен $\frac{2\pi}{3}$ (рис. 44), значит, $6\arg z - 2\arg z = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, т. е. $\arg z = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

Еще одно, более геометричное, решение последнего пункта. Если $|z| = 1$, $|z^6 + z^2| = 1$, то $w = z^4$ лежит на пересечении двух окружностей (рис. 45): $|w| = 1$ и $|w + 1| = 1$, откуда $z^4 = \frac{1}{2}(\pm i\sqrt{3} - 1)$.

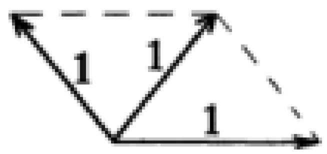

Рис. 44

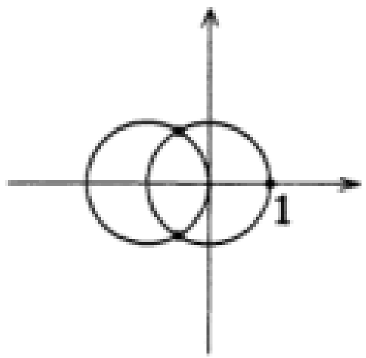

Рис. 45

С математической точки зрения, в пунктах в) и г) идет речь об одном и том же — о пересечении образа единичной окружности S при отображении $z \mapsto z^6 + z^2$ с, соответственно, вещественной осью и самой окружностью S. Поскольку это отображение есть композиция следующих двух: $z \mapsto z^2$ и $z \mapsto z^3 + z$, первое из которых переводит окружность S на себя, то достаточно найти ее образ при втором отображении. Итак, нужно найти (описать, нарисовать) множество

$$\{(\cos 3t + \cos t, \sin 3t + \sin t) \mid t \in [0; 2\pi]\} =$$
$$= \{(2\cos 2t\cos t, 2\sin 2t\cos t) \mid t \in [0; 2\pi]\},$$

т. е. множество, состоящее из точек с координатами $(x(t), y(t))$, где $x(t) = 2\cos 2t\cos t$, $y(t) = 2\sin 2t\cos t$, $t \in [0; 2\pi]$. Поскольку $x(t+\pi) = -x(t)$ и $y(t+\pi) = -y(t)$, то образы отрезков $[0;\pi]$ и $[\pi; 2\pi]$ симметричны относительно начала координат. Далее, $x(\pi - t) = -x(t)$ и $y(\pi - t) = y(t)$, следовательно, образы отрезков $[0; \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ симметричны относительно оси ординат.

Таким образом, достаточно нарисовать множество

$$\{(x(t), y(t)) | t \in [0; \tfrac{\pi}{2}]\},$$

которое в полярной системе координат задано парой функций $r(t) = 2\cos t$, $\varphi(t) = 2t$ и выглядит так, как изображено на рис. 46.

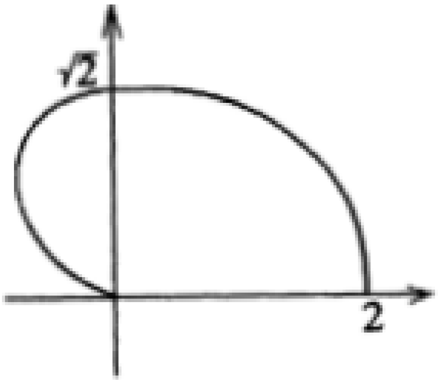

Рис. 46

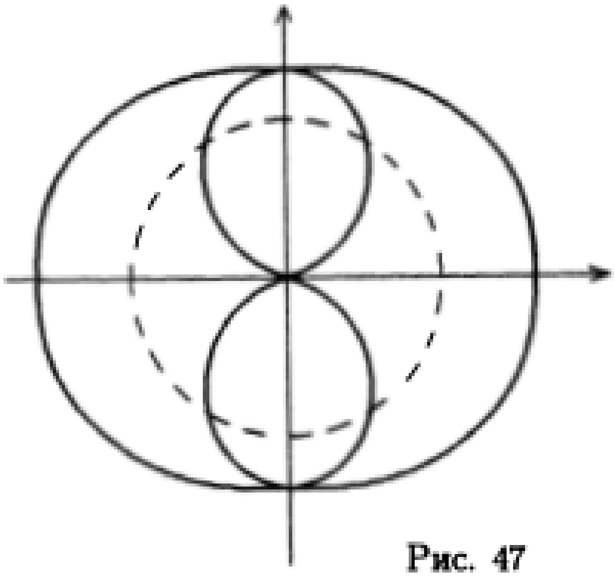

Рис. 47

Произведя две симметрии относительно осей координат, получим кривую, изображенную на рис. 47 (штриховой линией отмечена единичная окружность).

5. В этой задаче требуется доказать некоторые свойства чисел E_n^k, называемых числами Эйлера и определенных при помощи рекуррентного соотношения, напоминающего соотношение между биномиальными коэффициентами.

а) Приведем рассуждение по индукции. База индукции очевидна. Индукционный переход:

$$E_{n+1}^{n-k} = (n-k+1)E_n^{n-k} + (k+1)E_n^{n-k-1} =$$
$$= (n-k+1)E_n^{k-1} + (k+1)E_n^k = E_{n+1}^k.$$

б) *Ответ*: 12, так как $E_{11}^5 = 6E_{10}^5 + 6E_{10}^4 = 12E_{10}^5$ в силу соотношения симметрии предыдущего пункта.

в) Поскольку доказательство сформулированного в этом пункте тождества требует некоторой техники, то мы формализуем его и вначале докажем вспомогательное тождество для биномиальных коэффициентов.

Лемма. Имеем: $(k+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)C_{k+p+1}^{n+1} = pC_{k+p}^n$.

Действительно,

$$(k+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)C_{k+p+1}^{n+1} =$$
$$= (k+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)(C_{k+p}^{n+1} + C_{k+p}^n) =$$
$$= (n+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)C_{k+p}^n =$$
$$= (k+p-n)C_{k+p}^n + (n-k)C_{k+p}^n = pC_{k+p}^n.$$

Итак, докажем тождество 5в по индукции:

$$\sum_{k=0}^{n} E_{n+1}^{k} C_{k+p}^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left((k+1) E_n^k C_{k+p}^{n+1} + (n+1-k) E_n^{k-1} C_{k+p}^{n-1} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E_n^k \left((k+1) C_{k+p}^{n+1} + (n-k) C_{k+p+1}^{n+1} \right) = p \sum_{k=0}^{n-1} E_n^k C_{k+p}^{n},$$

откуда и следует индукционный переход.

г) Формулировка этого пункта дает другое, комбинаторное, описание чисел Эйлера. Идея доказательства знакома, поскольку аналогичные рассуждения часто используются при рассмотрении чисел сочетаний. Именно, мы покажем, что для количества $\tilde{E}_n^k$ перестановок указанного вида выполняются те же соотношения, которыми определялись числа Эйлера, поэтому $\tilde{E}_n^k = E_n^k$.

Ясно, что если при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ верно неравенство $a_i < a_{i+1}$, то $a_i = i$, т. е. имеется одна такая перестановка, поэтому $\tilde{E}_n^0 = 1 = E_n^0$.

Пусть теперь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — перестановка с k инверсиями, под которыми мы понимаем такие пары $(i, i+1)$, что $a_i > a_{i+1}$. Предположим, что $w = a_l$.

Рассмотрим перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, получающуюся из исходной вычеркиванием элемента a_l, так что $b_j = a_j$ при $j < l$ и $b_j = a_{j+1}$ при $j \geqslant l$. Ясно, что число инверсий в полученной таким образом перестановке (b_i) равно либо $k-1$, либо k. Предположим вначале, что это число есть $k-1$. Следовательно, для некоторых $n-k-1$ значений $j \in \{j_1, \cdots, j_{n-k-1}\}$ верно неравенство $b_j < b_{j+1}$. Поэтому исходная перестановка (a_i) может иметь k инверсий, если $l = 1, j_1+1, \ldots, j_{n-k-1}+1$, следовательно, число таких перестановок, получающихся добавлением числа n в $(n-1)$-перестановку с $k-1$ инверсией, равно $(n-k)\widetilde{E}_{n-1}^{k-1}$. Рассуждая аналогично, получаем, что число n-перестановок с k инверсиями, получающихся из $(n-1)$-перестановок с k инверсиями, равно $(k+1)\widetilde{E}_{n-1}^{k}$, таким образом, $\widetilde{E}_n^k = (n-k)\widetilde{E}_{n-1}^{k-1} + (k+1)\widetilde{E}_{n-1}^{k}$.