Задание 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число n, при котором $n!$ делится на 990.

2. Решите уравнение $\max\{x^2 - x + 1, 4x - x^2\} = 3$.

3. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = a?$$

4. Разрежьте квадрат на 6, 8, 9 квадратов. На какое еще число квадратов можно разрезать квадрат?

5. Решите в целых числах уравнение $x + y = xy$.

6. Из Манчестера и Ливерпуля одновременно навстречу друг другу выехади в магическое путешествие Пол и Джон. После их встречи Пол ехал еще 9 часов до Лиыерпуля, а Джон — 16 часов до Манчестера. Сколько часов был в пути каждый из них?

7. Найдите на плоскости точку, сумма расстояний от которой до вершин данного выпуклого четырехугольника является наименьшей.

8. В единичном квадрате где-то расположены 51 точка. Докажите, что в некотором квадрате со стороной $\frac{1}{5}$ имеются хотя бы три из них. Верно ли, что найдется круг радиуса $\frac{1}{7}$, который также содержит по меньшей мере три из этих точек?

9. Можно ли ходом коня попасть из поля `a1` шахматной доски на поле `h8`, побывав на каждой клетке по одному разу?

10. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске так, что ни один из них не бил другого?

Задание 2

1. Длины сторон треугольника — целые числа. Известно, что длины двух сторон — 1 и 3 см. Найдите длину третьей стороны.

2. Решите графически уравнение $\sqrt{x-2} = x-8$ и объясните причину появления "лишнего"корня в обычном решении.

3. Имеется пирамида, составленная из 10 колец разного диаметра, надетых на палочку так, что меньшее кольцо всегда лежит на большем. Требуется переложить эти кольца на другую палочку (используя вспомогательную третью); при этом запрещено класть большее кольцо на меньшее. Какое наименьшее число перекладываний потребуется?

4. Запишите точное значение для $\cos\frac{\pi}{32}$, не используя обозначений тригонометрических функций.

5. Проверьте, что
$$\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}},$$
и найдите еще несколько подобных примеров.

6. На катетах прямоугольного треугольника площади 1 как на диаметрах построены полукруги, расположенные вне этого треугольника. Найжите суммарную площадь частей этих полукругов, расположенных вне круга, описанного около этого треугольника.

7. Вывелите признак делимости на три чисел, записанных в двоичной системе.

8. Двести солдат выстроены прямоугольником 20×10. Кто окажется выше, самый низкий среди двадцати самых высоких в 20 рядах этого прямоугольника или же самый высокий их десяти самых низких в его 10 колоннах?

9. В классе 5 девочек и 19 мальчиков. Сколькими способами можно составить пару для участия в теннисном турнире в: а) смешанном разряде; б) парном женском; в) парном мужском?

10. Может ли быть, чтобы любые два жителя Китая отличались набором своих зубов?

Задание 3

1. Прямая делит единичный квадрат на две части. Найдите наибольшее произведение площадей этих частей.

2. Изобразите на плоскости множество всех пар (p, q), для которых сумма квадратов действительных корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна 1.

3. Известно, что среди 26 монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем все остальные. Найдите эту монету при помощи трех взвешиваний на чашечных весах без гирь. Сколько взвешиваний потребуется, если монет будет 82?

4. Изобразите множество середин отрезков, концы которых лежат на кривой $y = x^3$.

5. Кащей Бессмертный загадывает три цифры a, b, c. Иван Царевич должен назвать три числа x, y, z, после чего Кащей сообщит ему сумму $ax + by + cz$. Царевич должен угадать задуманные цифры, иначе ему отрубят голову. Как ему спастись?

6. Решите числовой ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

$$\text{УДАР} + \text{УДАР} = \text{ДРАКА}$$

7. Каких чисел больше среди восьмизначных: тех, в записи которыз есть единицы, или тех, в записи которых они отсутствуют?

8. Имеются два выпуклых многоугольника, один из которых вложен в другой, стороны которых попарно параллельны и отстают друг от друга на 1. Докажите, что разность площадей этих многоугольников не меньше $p + \pi$, где p — это периметр меньшего многоугольника.

9. Докажите, что любую сумму, бóльшую 7 копеек, можно заплатить без сдачи трех- и пятикопеечными монетами.

10. Докажите, что если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым.

Задание 4

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 5, можно представить как сумму простого числа и составного.

2. Известно, что число $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $x^3 - (a + 2)x^2 + bx - 2a$, где a и b — целые числа. Найдите a, b и остаьные корни этого многочлена.

3. Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит его гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найдите катеты этого треугольника.

4. Найдите все такие простые числа p, для которых число $8p^2 + 1$ — тоже простое.

5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитянин в присутствии другого островитянина сказал, что по крайней мере один из них лжец. Кто они?

6. Докажите неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. При каком наибольшем k верно неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq k(xy + yz + zt + tx + xz + ty)?$$

7. Найдите число областей, на которые разбивают: а) прямую n разичных точек; б) плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

8. Какова наименьшая площадь круга, которым можно накрыть теругольник со сторонами 14, 10 и 9 см?

9. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, целиком покрывают этот четыпехугольник.

10. Докажите, что для всякого натурального числа n сумма кубов чисел от 1 до n является точным квадратом.

Задание 5

1. В трех урнах лежат: два белых; два черных; белый и черный шары. На каждой из них табличка не соответствует ее содержимому. Какое наименьшее число шаров (и из какой урны) надо вынуть, чтобы после этого быть в состоянии развесить таблички правильно.

2. Одиннадцать шестеренок расположены по кругу так, что первая из них сцеплена со второй, вторая — с третьей, а одиннадцатая — с первой. Может ли такая система вращаться? А если шестеренок двенадцать?

3. На прямой дан набор отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

4. Функция f задана на всей прямой и такова, что $2f(x)+f(1-x) = 3x^2$. Найдите $f(5)$.

5. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

6. Проверьте, что $1110 \cdot 1111 \cdot 1112 \cdot 1113 = (1235431)^2$.

7. Котенок сидит на середине лестницы, прислоненной к стене. По какой траектории будет двигаться котенок, если лестница заскользит по полу?

8. Найдите множество точек, являющихся вершинами прямого угла треугольника, две другие вершины которого лежат на сторонах другого прямого угла.

9. Докажите, что десятичная запись некоторой степени числа 27 заканчивается четырьмя нулями и единицей.

10. Известно, что $a > b > c > d > e$. Докажите, что

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 > (a - b + c - d + e)^2.$$

Задание 6

1. Вычислите $1988\frac{19}{6891}\cdot 1987\frac{19}{6891}-1989\frac{19}{6891}\cdot 1986\frac{19}{6891}$.
2. Решите систему
$$\begin{cases} x^{10}+y^{10}=1,\\ x^6+y^6=1.\end{cases}$$
3. Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник и найдите отношение его площади к площади исходного треугольника.
4. В десятичной записи двух натуральных чисел участвуют только цифры 1, 4, 6 и 9. Может ли одно из них быть ровно в 17 раз больше другого?
5. Какое из двух чисел больше, 2^{300} или 3^{200}; $99!$ или 50^{99}?
6. При каких значениях a уравнение $\cos\sqrt{a-x^2}=1$ имеет ровно 8 решений?
7. На доске выписано 450-значное число $123456789123\ldots$ В нем вычеркнули все цифры, стоявшие на нечетных местах. Затем в получившемся числе опять вычеркнули цифры на нечетных местах, и т. д. Какая цифра будет вычеркнута последней?
8. Квадрат 3×3 называется магическим, если в его клетках числа от 1 до 9 расставлены таким образом, что суммы чисел во всех строках, стобцах и диагоналях равны друг другу. Докажите, что в средней клетке любого такого магического квадрата стоит одно и то же число. Сколько всего существует таких квадратов?
9. В вершинах 100-угольника расставлены числа, причем каждое из них равно среднему арифметическому его соседей. Докажите, что все они равны между собой.
10. В клетках бесконечной доски расставлены натуральные числа так, что для любых пяти клеток, расположенных в форме креста, центральное число есть среднее арифметическое четырех других. Докажите, что во всех клетках доски стоит одно и то же число. Верно ли это утверждение, если предполагается, что числа являются целыми?

Задание 7

1. 100 кг свежесобранных грибов имели влажность 99%. Через два дня их влажность составляла 98%. Сколько стали весить грибы?
2. Докажите, что $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}<1$ при всех $x, y \in (0;1)$.
3. Найдите все такие b, при которых для любого a система неравенств

$$\begin{cases} |x-2| \geq 5, \\ |x-a| \leq b \end{cases}$$

имеет решение.
4. Из кучи, содержащей 1001 камень, выбросили один камень, а оставшиеся произвольно разложили на две кучи. Проделаем аналогичную операцию с любой из куч, содержащей более одного камня. Может ли после последовательного применения нескольких таких операций оказаться, что все кучи состоят из трех камней?
5. Пересекающиеся отрезки, параллельные сторонам единичного квадрата, делят его на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей двух не смежных прямоугольников не превосходит $\frac{1}{16}$.
6. Докажите, что многочлен x^3-19x^2+9x-2 не имеет отрицательных корней.
7. Действительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ и $abc>0$. Докажите, что $a, b, c>0$.
8. Сколько существует различных игральных костей, т. е. кубиков, на гранях которых расставлены цифры от 1 до 6?
9. Сколько делителей имеет число 3600?
10. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда число его делителей нечетно.

Задание 8

1. В соревновании по “крестикам-ноликам"по кубковой системе участвуют 1991 человек. Сколько будет сыграно партий до выявления победителя?

2. Докажите, что если из доски $2^n \times 2^n$ удалить любую клетку, то оставшуюся часть можно замостить уголками .

3. Докажите, что данной число — целое:

$$(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1)(\sqrt[3]{49}-1)(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1).$$

4. Действительные числа x, y и a таковы, что $x+y=a-1$, $x^2+y^2=5a^2-3a+\frac{1}{2}$. При каком a произведение xy — наибольшее?

5. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции с длинами a и b и проходящего через точку пересечения ее диагоналей.

6. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда его средние линии равны.

7. Решите уравнение $x^3-[x]-8=0$ (здесь $[\,.\,]$ — целая часть числа).

8. Петя, Коля и Вася решили 100 задач, причем каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу “трудной", если ее решил только один из мальчиков,и “легкой", если ее решили все трое. Докажите, что “трудных"задач на 20 больше, чем “легких".

9. Решите систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2x^2-1)=1. \end{cases}$$

10. Решите уравнение $e^{3x-3}-3e^{x-1}=\sqrt{3}$.

Задание 9

1. У царя Гвидона быо три сына. Из числа его потомков 99 имели по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько всего потомков было у царя Гвидона?

2. Сколько трехзначных чисел делятся на 9 или на 15?

3. Докажите, что при всяком натуральном n верны неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

4. Натуральные числа от 1 до ab выписаны по строчкам (начиная с первой) в порядке возрастания в клетки таблицы, содержащей a строк и b столбцов. Найдите a и b, если извечтно, что число 20 находится в третьей строке, 41 — в пятой, а 103 — в последней.

5. Известно, что средняя линия четырехугольника равна полусумме не пересекающихся с ней сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция.

6. Упростите выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

и объясните полученный ответ.

7. Решите уравнение $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{10}{9}$.

8. Найдите все возможные наборы из семи действительных чисел, сумма любых четырех из которых равна произведению трех оставшихся.

9. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

10. В противоположных вершинах куба сидят тараканы. Каков кратчайший путь от одного из них к другому?

Задание 10

1. Моджно ли расположить под числами $1, 2, \ldots, 17$ те же числа, расположенные в некотором порядке так, чтобы все попарные суммы были нечетны?

2. Решите систему

$$\begin{cases} x - y = xy + 11, \\ x^2y - y^2x + 30 = 0. \end{cases}$$

3. Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугнольника с катетами a и b до центра квадрата, построенного вне треугольника на его гипотенузе.

4. Решите уравнение $\sin(\arcsin x) = \arccos(\cos x)$.

5. Дана окружность и точка A вне ее. Найдите множество середин отрезков AM, где M — точка данной окружности.

6. Шесть команд провели турнир по волейболу (в один круг) и все набрали разное число очков. Как сыграли между собой команды, занявшие 3-е и 4-е места?

7. Тридцать стульев стоят а ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если таковые имелись) встает и уходит. Какое наибольшее число стульев может быть занято, если сначала все они были свободны?

8. Могут ли при некотором действительном значении a быть одновременно целыми числа $a + \sqrt{15}$ и $\sqrt{15} - \frac{1}{a}$?

9. Точка O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции, стороны AD и BC которой параллельны. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

10. Точки K и L — середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, P — точка пересечения отрезков AK и BL, Q — отрезков CL и DK. Докажите, что сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна площади четырехугольника $PKQL$.