Состояние и перспективы школьного углубленного математического образования

Вначале предполагалось, что мое выступление будет посвящено всем сторонам углубленного математического образования, школьным и внешкольным. Однако после долгих раздумий я решил, в силу целого ряда причин, остановиться на проблемах углубленного школьного образования, как наиболее острых и актуальных. Конечно, говорить о нем в тех социальных условиях, в которых сейчас находится российская школа, может показаться наивностью или просто глупостою, однако речь не пойдет о его кардинальном улучшении уже завтра. Просто необходимо сменить приоритеты в учительском сознании и создать условия изменений в будущем. Что касается внешкольного (дополнительного) математического образования, то здесь мою позицию отражает китайское высказывание "Пусть расцветают сто цветов". Имеется Всероссийская олимпиада, которая с зонального уровня является соревнование профессионалов, Соросовская олимпиада, задачи предлагаемые на ней доступнее школьнику в том смысле, что они ближе к школьной программе, есть Турнир городов. Все больше ребят участвуют в игре-конкурсе "Кенгуру" — новом для нас, но, на мой взгляд очень интересном соревновании. Существует такие прекрасные (даже не соревнования, а встречи), как конференции турнира городов, Кубок Колмогорова, региональные турниры матбоев. Работают математические (кружковые) центры, во многих местах проводятся летние математические школы.

Однако давайте поставим перед собой следующий вопрос: какой процент учащихся школ участвует в подобных мероприятиях? К примеру, в Петербурге ежегодно оканчивает школу около 30000 ребят. В кружках и турнирах участвуют, по моей оценке, не более 50 из них, т.е. менее $0,2\%$! Теперь допустим, что 30 из них пойдут далее на матмех СПбГУ. При общем приеме 270 человек, не на них придется ориентироваться при проведении занятий. Я не говорю уже о том, что в городе есть и другие вузы, для успешного обучения в которых нужна хорошая математическая подготовка.

За рубежом есть такой термин — *target group.* К примеру, у нас в городе около 2000 школьников сдают выпускной экзамен по углубленному варианту, т.е. это около 7% от общего числа. Меня более всего волнует качество обучения именно этой 5-10%-ной целевой группы школьников, будущая профессия которых лежит в естественнонаучной области. Из дальнейшего станет ясно, что проблема математического обучения тех, кто в дальнейшем станет работать в социальной сфере (менеджмент и т.п.), кроется там же. Нас и далее не будет никто понимать в обществе, если мы будем ограничиваться интересами и продолжать работать с 0,2%-ной целевой группой, так сказать — будущих математиков, игнорируя 10%-ную. А между ними пока лежит пропасть!

Где-то полмесяца назад я купил книгу "Алгебра и начала анализа. 8–11 классы.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики", авторы Звавич, Шляпочкин, Чичкина, опубликованное в серии "Дидактические материалы" издательства "Дрофа". Сравните уровень заданий, имеющихся в этом пособия с задачами контрольных программы "Матшкольник", опубликованной во втором выпуске новой серии "Математическое Просвещение", или же просто с уровнем статей этой серии. Кстати, при всем уважении к авторам статей этой серии и моему интересу к математике, я не могу не задать себе вопрос — "На кого же эти статьи расчитаны?", если на школьников, то это уже даже не 0,2%-ная группа...

Давайте ясно представлять, что интересы общества связаны с эффективной работой системы углубленного математического образования в примерно 10%–ной целевой группе. Осмелюсь утверждать, что несмотря на почти 40-летнюю историю развития, этой системы так еще и нет. Для подтверждения моей пессимистической точки зрения посмотрите на приведенные в пункте 1 тезисов статистические данных по итогам олимпиады математико-механического факультета. И давайте взглянем на условия задач.

Олимпиада выпускников 2000 года

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3 и 5?

   б) Решите уравнение $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

   в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 2000$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

   г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$ (тем самым с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5$.

   б) Решите уравнение $\sqrt{a + 2\cos 2x} = a\cos x$.

   в) Внутри угла величиной 60° с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

   г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [A'D']$, $L \in [B'C']$ и $M \in [BB']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $16:9$, $2:3$ и $1:2$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2, & \text{если число } x_n \text{ четно}, \\ x_n + 9, & \text{если оно нечетно}. \end{cases}$$

   а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

   б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический "хвост", т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geq N$.

В пункте 2 собраны абсолютно стандартные задачи, в пункте 1 — простенькие "олимпиадные". Некоторую трудность может представлять только задача 3. Мне кажется, что всякий образованный "матшкольник" обязан за 4 часа решить уж по крайней мере половину этих задач. Однако таковых оказалось только 20% из числа участников олимпиады, а если откинуть учащихся 10-1 класса школы 239 ("элиту" города, параллельно в течение нескольких лет обучающихся в кружках), а также иногородних участников, то этот процент снизится до 10.

Системы внешкольного математического образования являются дополнительными. Если учащиеся специализированных школ и классов занимаются математикой по крайней мере 7 часов в неделю (обычно — чуть больше), то естественно считать, что основное образование они должны получать на уроках. Давайте вернемся на 30-40-50 лет назад. Основная задача, которую видели перед собой те, что начинал организовывать кружки, состояла в привлечении школьников к занятиям математикой, развитию их интереса. В 70-е годы — годы расцвета всей системы углубленного математического образования в Ленинграде, самые массовые кружки для школьников существовали в параллелях 5-8-х классов, после этого ребята уходили в одну из школ "большой тройки" — 30, 239, 45-й интернат при ЛГУ — и их дальнейшее обучение проходило уже в стенах этих школ.

На мой взгляд, целью углубленного школьного математического образования является подготовка к дальнейшему обучению в естественно-научной области, для чего необходимо решить задачу интеллектуального развития учащихся, в частности, развития математического способа мышления.

Имея в виду эти цель и задачу, посмотрим с этой точки зрения на вариант общероссийского выпускного экзамена для физико-математических школ (с.282 указанного пособия Звавича и др.)

1. Решите уравнение $\cos 4x + 5\cos^2 x = 0,75$.

2. Найдите производную функции $y = \log_{9x+1}(3x+7)$ в точке $x = 1$.

3. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 3\cos 2x + 3\sin 3x + 8$, осью абсцисс и прямыми $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$.

4. Найдите множество значений функции $y = 3x + \sqrt{7-2x}$.

5. Решите неравенство $4^x + 6 \cdot 2^{|x|} \geq \frac{49}{4}$.

6. На прямой $y = 2x - 1$ найдите все такие точки, что через каждую из них проходит ровно две касательных к графику функции $y = x^2$, а угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{4}$.

Естественно ожидать, что на таком экзамене хоть в некоторой степени, но должен проверяться уровень мышления выпускника, что для получения отличной оценки необходимы не только достаточно глубокие знания, но и умение рассуждать. Однако для решения предлагавшихся задач не нужно ничего, кроме знания небольшого числа рутинных приемов. (Я бы предложил этот вариант своим студентам-педагогам на 40 минут для устного решения.) Чуть запутаннее последняя задача, но она ничуть не менее скучна. Какое мнение о школьной математике может создаться у родителей?

Хорошо, будем считать, что не дело проверять уровень мышления на заключительном экзамене. Тогда давайте посмотрим на текущие задания и варианты контрольных все из того же пособия. (Хочу сказать, что я ничего не имею персонально против его авторов, те же самые претензии, и в большей степени, можно высказать к подавляющему большинству дидактических и методических материалов для, так сказать, углубленного изучения математики. Это пособие просто попалось под руку.)

Казалось бы, имея в виду основную задачу углубленного обучения, следовало от класса к классу повышать требования к мыслительной деятельности учащихся. Однако происходит в точности обратное. Если среди задач для 8-го класса еще есть те, для решения которых ученику необходимо подумать, то, глядя на это пособие, можно сделать вывод, что 11-класснику думать уже не обязательно. В этой связи можно упомянуть интересные данные, полученные в ходе совместного российско-британского эксперимента, которые показывают, что наши школьники плохо обучены таким общим формам математической деятельности, как кодирование имеющейся информации и интерпретация полученных результатов.

Таким образом, первый вывод, которым хочу с вами поделиться, состоит в том что

уровень знаний, умений и навыков учащихся специализированных школ, фиксируемый официальными проверочными работами и многочисленными методическими пособиями, дезориентирует учителей, учеников и их родителей.

Да, у нас существуют школы, в которых работают учителя, обеспечивающие высокий, можно сказать, элитарный уровень образования. На мой взгляд, это происходит в тех учебных заведениях, которые являются одновременно центрами внешкольного (дополнительного) образования, учителя в которых на своих обычных уроках используют кружковый подход к обучению — развитию учащихся. Я думаю, что большинство этих учебных заведений хорошо известны. Был проведен провел следующий эксперимент: составлен список школ, в которых учатся победители Соросовской олимпиады. После этого я попросил хорошо мне знакомого и много знающего И.С.Рубанова отметить среди них ему известные. Оказалось, что из следующего "списка номер 1"

Белорецк, Компьютерная школа
Брянск, 1
Владивосток, 23
Вологда, ВГЕМЛ
Глазов, физмат лицей
Долгопрудный, 5
Ижевск, 30, 41
Киров, 35
Москва, 57, 1543, 444, "Вторая школа", 710
Набережные Челны, 26
Нижний Тагил, 82
Н.Новгород, 40
Николаев, муниципальный коллегиум

Омск, 64
Пермь, 17, 146
Рыбинск, 2
Самара, аэрокосмический лицей
С-Петербург, 239, 366, 30, АЛ
Саратов, 1
Саров, 3, 15
Сыктывкар, физмат лицей
он не слышал только о трех школах. Этот список нетрудно расширить, но мне кажется что присутствующие согласятся с тем, что
в настоящее время система углубленного математического образования в России эффективно работает лишь в рамках 0,2%-ной группы.

Есть и другая сторона медали у сформулированного выше тезиса о "дезориентирующей роли официальных методических материалов". В тезисах доклада хорошо всем известного Р.Г.Хазанкина я прочитал, как учителя школ жалуются ему на трудность экзаменационных заданий и что некоторые из них во время экзамена даже звонили ему из других городов. Казалось бы, это высказывание противоречит моему мнению об абсолютной простоте экзаменационных материалов. Ан нет. Тому, кто всю свою жизнь ездил на 8-й этаж (и с него — на первый) на лифте, будет трудно зайти на него по лестнице, не говоря о том, чтобы вскарабкаться даже на невысокую горку. Те учителя, которые в течение долгих лет пережевывали со своими учениками, так сказать, "математическую жвачку", сами разучились мыслить нешаблонно. В качестве второго вывода получаем, что
для того, чтобы перейти к углубленному математическому образованию на уровне 5-10% от общего числа учащихся, необходимо существенно повысить уровень математической компетентности учителей.

С 1993 года я составляю варианты так называемого профильно-элитарного выпускного экзамена; высшего уровня сложности в Петербургской системе выпускных экзаменов. Для моих коллег по факультету решение задач этих экзаменов не представляет никакого труда, для большинства учителей школ они являются непреодолимым препятствием. По нашим оценкам лишь около 100 выпускников школ города способны достаточно успешно написать этот экзамен; т.е. мы снова получаем почти ту же самую цифру — 0,3% от общего числа выпускников.

Перед вами вариант 2000 года. По существу, некоторую сложность могут представлять только последние пункты заданий 3А и 3В. Задания выглядят по форме вполне традиционно, а их группировка напоминает "сюжетные" задания, к примеру, французских вариантов. Для того, чтобы стало понятно принципиальное отличие профильно-элитарных заданий, разберем решение задачи 2.

Профильно-элитарный экзамен. 2000 год

Обязательные задачи. Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \log_2(2^x + a)$.
   а) При каком a прямая $y = \frac{x+1}{2}$ касается графика функции f?
   б) Докажите, что $f(0) \leq \frac{a}{\ln 2}$.

в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Сколько решений (в зависимости от b) имеет уравнение $f(x) = \frac{x}{2} + b$?

г) Пусть $a > 0$ и $t > 0$. Докажите, что $\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| < 4a$.

2. Дана система $4\cos x - 3\cos y = a$, $4\sin x + 3\sin y = b$.

   а) Решите систему при $a = b = 0$.

   б) Решите систему при $a = 3, b = 4$.

   в) Найдите наибольшее значение площади четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 1, 3, 1 и 4.

   г) Изобразите на плоскости множество всех точек $M(a, b)$, таких что данная система имеет решение.

Дополнительные задачи (выбирается один из трех сюжетов)

3А. Пусть $p(z) = z^2 + az + b$, $z \in \mathbb{C}$. В следующих далее формулировках мы для краткости будем отождествлять комплексные числа с их изображениями как точек плоскости.

   а) Пусть $b = 1$. Верно ли, что при всех $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 2$, корни многочлена $p(z)$ лежат на единичной окружности?

   б) Пусть $b = 1$, $a \in \mathbb{C}$ и $|a| \leq 1$. Найдите наименьшее значение модуля разности корней многочлена $p(z)$.

   в) Пусть z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, — вершины квадрата с центром u. Докажите, что $\sum_{k=1}^4 p(z_k) = 4p(u)$.

   г) Пусть m — наибольшее значение $|p(z)|$ при $|z| = 1$. Докажите, что $|p(z)| \leq m$ при всех $|z| \leq 1$.

3Б. Рассматриваются последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, для которых $x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$, $n \geq 1$.

   а) Пусть $x_0 = \frac{1}{2}$. Вычислите x_{2000}.

   б) Докажите, что если $x_0 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ монотонна.

   в) Найдите множество $\mathcal{C}_0$ всех чисел, которые не могут являться начальными членами x_0 таких (бесконечных) последовательностей.

   г) Найдите множество начальных членов x_0 монотонных последовательностей $\{x_n\}$.

3В. Некоторое устройство может находится в одном из трех состояний (обозначаемых далее a, b и c). Если оно в некоторый момент находится, к примеру, в состоянии a, то через одну секунду оно перейдет в одно из состояний b или c (вероятность перехода в каждое из которых равна $\frac{1}{2}$). Обозначим через $p_n(x)$, где $x \in \{a, b, c\}$, вероятность того, что через n секунд устройство будет находится в состоянии x; в начальный момент оно находится в состоянии a.

   а) Вычислите $p_3(x)$, $x \in \{a, b, c\}$.

   б) Может ли при некотором n вероятность $p_n(x)$, $x \in \{a, b, c\}$, быть равной $\frac{1}{3}$?

   в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = \frac{1}{3}$.

г) Докажите, что утверждение, сформулированное в предыдущем пункте, равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k\equiv i \pmod 3} C_n^k = \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Мне кажется, что эта задача служит хорошей иллюстрацией к следующим двум важным мыслям.

Alan Schoenfeld

George Polya

Одной из тем нашей секции является содержание учебных программ. Напомню, что в предисловии к описанию упомянутой выше программы "Матшкольник" сказано, что "несмотря на долгую традицию преподавания в математических кружках и математических классах, вопрос о том, чему следует учить школьников, серьезно интересующихся математикой, представляется по-прежнему важным и не до конца ясен". Р.Г.Хазанкин пишет о тех темах, которые по его мнению являются чужеродными в школьном математическом образовании. Я бы хотел поставить вопрос по-другому. Необходимо обсуждать **не содержание программ, а содержание обучения**; второе понятие является несравнимо более емким и важным.

Хочу привести один поразивший меня пример. Кроме профильно-элитарного экзамена и олимпиады математико-механического факультета, с начала 90-х годов мы распространяли по школам варианты семестровых контрольных работ. Два года назад мы попросили учителей ведущих математических школ ответить на анкету, один из вопросов которой звучал так: *Оказали ли подобные "почти школьные задачи" влияние на ваше видение школьного математического образования; и, если да, то в чем?* Один из самых блестящих учителей ответил так: "Да. Смещение в сторону приоритета развития над техническими навыками." Я не сомневаюсь в том, что, работая в кружках, он занимался именно развитием своих учеников. До чего же сильно влияние стереотипов в школьном преподавании математики, что даже думающему учителю потребовался внешний толчок, чтобы сделать этот, казалось бы тривиальный, вывод.

Приведу цитату из своей статьи, опубликованной в журнале "Математика в школе" (1997, вып.6). При обучении неискушенных в математике учащихся (которые привыкли решать задачи только на определенные правила) все представляет сложность. Они не понимают: что же такое — "рассуждение" (дедуктивный аспект мышления); зачем вообще нужно что-то доказывать, а кроме того не видят логических пробелов (формально-логический аспект); не то, что не могут увидеть подход к решению, а просто не понимают, что же это такое — "идея решения" (индуктивный аспект); они не привыкли рассматривать связи между задачами (ассоциативный аспект мышления). И далее там же: *"Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, но нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и кровь и действовали с силой инстинкта"* (Пойа и Сёге, из предисловия к книге "Задачи и теоремы из анализа"). Далее, в уже упоминавшемся российско-британском эксперименте была сделана попытка обратить внимание учителей на роль общих форм интеллектуальной деятельности, таких как, классификация и систематизация; кодирование, преобразование и интерпретация; выдвижение и проверка гипотез и некоторых других в процессе обучения математике. В одном из интервью английский учитель подчеркнул, насколько интересной и, как ему кажется, важной для развития его учеников оказалась проведенное в классе обсуждение этих понятий.

Поэтому третий вывод состоит в том, что необходимо

разработать методические материалы (в частности, сборники задач) для школ и классов с углубленным изучением математики, в которых была бы последовательно проведена линия на интеллектуальное развитие учащихся.

Мы часто считаем, что развитие происходит само собой в процессе изучения математики и решения задач. Однако сам процесс обучения может более или же менее способствовать такому развитию. Не случайно же у одного учителя ученики добиваются большего, чем у другого. По крайней мере опыт проведения выпускных экзаменов в Петербурге показал, что на стандартном школьном материале (уравнения, неравенства, исследование функций) можно составлять достаточно содержательные в математическом и дидактическом смысле задачи, для решения которых нужно проявить не только знание, но и понимание предмета, а также умение "мыслить математически".

Хочу подчеркнуть тривиальную мысль, которую тем не менее многие упускают из виду: **Как** учат математике, даже более важно, чем **чему** же учат на уроках математики. К примеру, Р.Г.Хазанкин пишет, что не следует предлагать учащимся тригонометрические уравнения, требующие, как он говорит, изощренной техники, трудные задачи с параметрами, сложные задачи на прогрессии, системы уравнений, для решения которых нужно знать некоторые искусственные приемы. Я плохо понимаю, о чем идет речь. Приведу пример.

В прошлом году на одном из вступительных экзаменов в СПбГУ была предложена следующая задача,

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$\arccos 3x + \arcsin(a + x) = 0$ *имеет решение.*

Конечно, она поставила в тупик большинство абитуриентов. Но сложна ли она по-существу? Если юноша или девушка обучены мыслить, понимают определения, умеют использовать графическую интерпретацию уравнений, владеют стандартной техникой дифференциального исчисления, то для решения этой задачи им потребуется, может быть, полчаса. Из перечисленных мною требований некоторые излишни, однако без умений, выраженных глаголами "мыслить" и "понимать" при решении этой задачи не обойтись.

Другой пример. При поступлении на факультет психологии СПбГУ основную "отсеивающую" роль играет экзамен по математике, хотя сам факультет воистину гуманитарный. Жестоко по отношению к абитуриентам и бессмысленно с точки зрения истинных интересов факультета будет предлагать на этом экзамене задачи того же стиля и уровня, что и на матмех, хотя по конкурсной ситуации (5-6 человек на место) вполне можно предложить несколько "гробов". Так вот, нам иногда удавалось придумывать задачи, например, по стереометрии(!) или текстовые, которые проверяют уровень развития человека, а не его натасканности.

Конечно, если под методикой преподавания темы "Решение тригонометрических уравнений" понимать изложение 10-20 типов уравнений со специфическими способами их решения (а так случается), то после подобного обучения даже задачи "из Сканави" будут вызывать серьезные затруднения. Если же всего лишь сместить акценты в преподавании, говоря о двух общих подходах — сведение к алгебраическому уравнению и разложение на множители, — и тренируя школьников в анализе заданного выражения и путей его преобразования, то результат будет совсем иным.

Совсем свежий пример. В обсуждении программ по математике в АГ СПбГУ участвовал физик, Андрей Казанский, исследователь международного уровня и к тому же прекрасный школьный преподаватель. Обычно физики стараются побудить математиков истребить все, как им кажется, не относящееся к делу, чтобы те побыстрее ввели производные и интегралы. Андрей же говорил нам: "Ни в коем случае не выкидывайте из программы тригонометричесике преобразования, уравнения и неравенства, поскольку ни что иное не развивает умения видеть формулу в целом".

Необходимость "смещения акцентов" связана с тем, чтобы придать смысл в противном случае бессмысленной деятельности по решению огромного числа уравнений, неравенств и их систем. Недопустимо, чтобы у учащихся складывалось впечатление, что математика только этим и занимается.

Осмелюсь утверждать, что

одна из основных трудностей при преподавании математики (не на элитарном уровне) и особенно в нематематических школах состоит в необходимости придания смысла внешне бессмысленным действиям и требованиям.

Когда я смотрю на программу по математическому анализу для АГ СПбГУ, то она вызывает у меня глухое раздражение, хотя я сам же ее и составлял. Программа 10 класса включает в себя: свойства вещественных чисел, пределы функций, непрерывность, степень с произвольным показателем и логарифмы, производную — стандартные темы первого курса вуза. Без конкретного наполнения задачами и методическими идеями она пуста. Одно и то же содержание можно изложить множеством способов, только некоторые из которых будут способствовать развитию школьников. Те же самые претензии у меня и к программе "Матшкольник": она задает уровень знаний учащихся, но не определяет собственно содержание обучения.

Докладчик пытался выразить свои мысли и подходы к углубленному математическому обучению в ряде статей, опубликованных в журнале "Квант": 1994,6; 1995,5; 1999,4 и газете "Математика": 1998, вып.17,18,21. Наконец, в 1998 году в издательстве СПбГУ было опубликовано учебное пособие "Практикум по элементарной математике. Алгебро-аналитические методы", к сожалению, его тираж составил всего 500 экземпляров. А хотелось бы сделать его доступным всем заинтересованным учителям, хотя бы для конструктивной критики. Общая идея состоит в использовании вместо серий задач более сложно сконструированных их наборов, которые были названы *пучками задач.* Примерами могут служить задачи профильно-элитарного экзамена. Попытка теоретического осмысления подхода, основанного на использовании пучков задач предпринята в работе “Пучки задач как средство построения методик продуктивного обучения” (в сборнике: “Теория и практика продуктивного обучения”, который выйдет из печати в самое ближайшее время.)

Говоря о перспективах школьного обучения математике в новом столетии, нельзя пройти мимо использования в учебном процесе современных компьютерных технологий и средств коммуникаций. Невозможно и далее преподавать математику, игнорируя существование компьютеров (и даже калькуляторов), позволяющих проводить символьные вычисления и строить графики. Как мне кажется, задача разумного использования этих средств для совершенствования учебного процесса ранее не изучалась. На эту тему можно услышать много анекдотических историй, как “за”, так и “против”. Однако до сих пор никто всерьез не проводил исследований с целью многопараметрической оценки эффективности применения компьютерных средств при изучении математики.

С одной стороны, я целиком на стороне Стивена Кранца (S.Krantz), когда он говорит, что ни что иное, кроме как упражнения с карандашом и бумагой, не могут дать студенту нужного опыта. Пусть лучше он проведет час за построением одного графика, чем за то же самое время просмотрит 50 графиков на экране компьютера. Построение графика — один из важнейших процессов в деле развитии аналитического мышления. С другой стороны, когда мне самому приходится взять первообразную от выражения, которое я не могу быстро проинтегрировать в уме, то, вместо того, чтобы взять ручку, я поворачиваюсь к компьютеру (не говорю — “включаю компьютер”, поскольку он включен с утра до вечера). Разумно ли требовать от школьника на экзамене, к примеру, найти отношение

$$\frac{\int_0^2(\sqrt{4x+1}-2x+1)\,dx}{\int_{-0,25}^2(\sqrt{4x+1}-2x+1)\,dx},$$

считая существенной любую допущенную им арифметическую ошибку (попробуйте сами получить верный ответ!)?

Ряд примеров разумного и неправильного применения компьютерной техники приведен в статье “Современная математика в школьных задачах”, которая вскоре будет опубликована в “Соросовском образовательном журнале” (вып.6 или 7 за 2000-й год). Мне видятся следующие подходы.

Первый из них был указан В.И.Рыжиком в его статье, опубликованной в журнале “Компьютерные инструменты в образовании”: компьютер есть средство для избавления от рутинных и громоздких вычислений. Несколько примеров. Предположим, что требуется решить уравнение $6x^3 + 7x^2 - 45x - 56$. Неужели следует всегда требовать делать это вручную? Не естественнее ли скомандовать `Factor[.]`? Встретился интеграл $\int_0^\pi \cos^8 x\,dx$; не будем лезть в таблицу или считать его по рекуррентной формуле. Ответ — $\frac{35}{128}\pi$ можно получить за 20 секунд. Таким образом, его идея состоит в том, что, допуская использование компьютеров, можно предлагать учащимся более содержательные задачи.

Второй подход обсуждается в моей статье: компьютерный эксперимент может быстро предоставить большой набор данных для последующего анализа, что поможет найти правильную идею. Тривиальный пример: Напишем
`Do[Print[FactorInteger[n^5-n]],n,20]`,
какой интересный материал сразу получим!

Третье: обучение алгоритмике, в частности, на примере исследования разделов из "дискретной математики". К примеру, Эдвард Дубинский (Edward Dubinsky) активно развивает подход к преподаванию/изучению чистой математики, основанный на алгоритмической реализации стандартных схем рассуждений.

Естественно, что для реализации указанных подходов необходимо провести большую работу по подбору подходящих задач.

Реализация дистанционного обучение требует больших затрат, однако оно имеет перспективы в отношении: привития интереса к математике, обмена опытом между преподавателями,

Наконец, конкретные предложения.

1. В качестве первого шага к построению технологии углубленного преподавания математики подготовить посвященный этой теме сборник статей, избрав для этой цели здесь на нашей секции его редакционную комиссию; просить редакционную коллегию серии "Математическое просвещение" выделить для публикации сборника один выпуск.

2. Предложить оргкомитету конференции включить в заключительный документ и направить в Минобразование предложение о постепенном введении системы текущей переподготовки учителей специализированных школ на базе ведущих классических или педагогических университетов регионов, при одновременном снижении на 1/3 недельной нагрузки направляемым на курсы.

3. Предложить оргкомитету конференции включить в заключительный документ и направить в Российский фонд фундаментальных исследований предложение о выделении средств для поддержки теоретических исследований и практических разработок в области углубленного математического образования школьников.

Закончить же свое выступление я хочу на следующей ноте.

Если будет принята программа общероссийского тестирования, то об идее углубленного математического образования в том смысле, в котором я здесь о ней говорил, можно будет забыть. Никаких перспектив в этом случае у него не будет. Хотя элитарное углубленное, конечно, останется.

Замечу, во-первых, что даже в США идет острая дискуссия по поводу целесообразности общенациональных тестов. В частности отмечается, что за последние годы развилась новая высокодоходная область бизнеса — симбиоз компаний, проводящих тесты, и издательских компаний, во-вторых, оказалось, что возможны ошибки в оценке, результатом чего уже стали судебные разбирательства. Приведу еще цитату из письма в газету "Известия" Н.Медведевой, как она представилась, "педагога из Ганновера": "Да, такая система существует и в немецких гимназиях. Из-за этого к концу тринадцатого класса у ребят остается лишь одна цель — получить то количество баллов, которое дает право на продолжение учебы."