О. А. Иванов, Т. Ю. Иванова, К. М. Столбов

Алгебра в 9 классе

Функции и последовательности

Санкт-Петербург
2018

УДК 51(xxx)
ББК XX.xxXX
X??

Иванов О. А., Иванова Т. Ю., Столбов К. М.

X?? Алгебра в 9 классе. Функции и последовательности.— СПб: 2018.— ??? с., ил.

ISBN ???-?-??????-??-?

Пособие содержит основной материал курса алгебры 9 класса: темы «Функции» и «Последовательности». Излагается теоретический материал, разбираются примеры решений задач. Оно содержит задачи для домашних заданий, двенадцать самостоятельных работ по разделам курса, а также дополнительные задачи. Данное пособие будет полезно учителям, работающим в школах с углубленным преподаванием математики, школьникам и их родителям, а также преподавателям и студентам математических факультетов педагогических университетов.

ББК XX.xxXX

Оглавление

Глава 2. Последовательности

Предисловие

Как ясно из названия, эта книга представляет собой пособие для изучения важных разделов школьного курса математики, связанных с понятиями *функции* и *последовательности*. Мы предполагаем, что учащиеся уже знакомы с начальными представлениями о предмете; по крайней мере, с функциями они встречались в 7 и 8 классах. Другое дело, как сказано во Введении, ранее говорилось о «линейной функции», «квадратичной функции», мы же будем говорить о «функциях вообще».

Особенностью изложения является чередование задач и теоретического материала, при этом достаточно часто решение задачи предшествует новому определению и (или) теореме. Например, мотивировкой введения понятия монотонности функции являются две самые первые разобранные задачи. Задача 3 Введения есть, на наш взгляд, характерный пример задачи, показывающей, что не стоит «ставить знак равенства» между функцией и выражением, поскольку функцию можно задавать и другими способами.

Вообще, задачи (а их в основном тексте разобрано 146) играют центральную роль. Мы приводим подробные решения всех этих задач, поскольку один из основных критериев, использованных нами при их отборе, состоял в том, что в решении задачи должно присутствовать *рассуждение*. А если при решении задачи необходимо провести преобразование, то оно должно быть естественным. Тем самым мы старались показать, каким образом следует учить, чтобы в процессе обучения происходило развитие учащихся, а не просто их «натаскивание» в решении задач определенных типов.

Каждая тема завершается подборкой задач для домашних заданий, среди которых практически нет «клонов» задач, разобранных в соответствующей теме. Конечно, не стоит предлагать их всех «списком», стоит выбирать те из них, которые ваши учащиеся действительно будут в состоянии решить самостоятельно. С другой стороны, после каждой самостоятельной работы приводятся дополнительные упражнения, среди которых как раз можно встретить задачи, похожие на те, что были разобраны в основном тексте.

Для проверки «усвоения пройденного материала», а вернее, для проверки уровня понимания учащимися введенных понятий, полученных ими навыков рассуждений и определенной техники решения задач, в книгу включены варианты самостоятельных работ. Каждая из работ рассчитана на один урок. При этом всякий раз мы предлагаем работы двух уровней сложности. Варианты 1 и 2 являются, с нашей точки зрения, более простыми, чем варианты 3 и 4. Глава «Функции» содержит 12 тем и 7 самостоятельных работ, глава «Последовательности» — 7 тем и 5 самостоятельных работ.

Теперь о том, как можно использовать эту книгу. Темы «Функции» и «Последовательности» изучаются в 9 классе, потому мы и назвали ее «Алгебра в 9 классе». Безусловно, реализовать изложенную в ней программу можно только при достаточном количестве часов и, скорее всего, только в специализированных школах. В приведенном далее «Тематическом планировании» мы не учитывали изложение материала из «уроков одной задачи», а также темы «Сравнение арифметических и геометрических прогрессий». Возможно, что некоторые темы стоит в полном объеме излагать уже на факультативных занятиях, например, такую важную для понимания математики тему, как «Множества, заданные уравнениями и неравенствами». Кроме того, опыт показывает, что после первого знакомства с последовательностями в 9 классе к ним приходится возвращаться уже в 10 классе. А решения задач, основанные на *свойствах функций*, появятся снова в 10–11 классах при изучении тригонометрических, показательной и логарифмической функций.

Главное, что нужно показывать на каждом уроке и к чему необходимо приучать школьников, — это то, что решение любой задачи должно быть основано *на рассуждении.*

Конечно, всякое планирование весьма условно. Трудно составить график изучения материала, к примеру, на полугодие и «не отстать» от него. В приведенной далее таблице указано наименьшее, по нашему мнению, число часов, которое следует отвести на изучение соответствующей темы.

О. А. Иванов — математико-механический факультет СПбГУ

Т. Ю. Иванова — Губернаторский физико-математический лицей №30 Санкт-Петербурга

К. М. Столбов — Лицей «Физико-техническая школа» Академического университета

декабрь 2017 года, Санкт–Петербург

Тематическое планирование

Глава 1. Функции

Введение. Линейная функция, квадратичная функция и просто — функция	2 часа
Тема 1. Понятие функции. Задание функции формулой	3 часа
«Чтение» графика	1 час
Самостоятельная работа 1	1 час
Тема 2. Монотонные функции	3 часа
Тема 3. Примеры исследования функций	3 часа
Самостоятельная работа 2 (темы 2 и 3)	1 час
Тема 4. Графики функций	3 часа
Тема 5. Множество значений функции	3 часа
Самостоятельная работа 3 (темы 4 и 5)	1 час
Тема 6. Функциональный подход к решению уравнений	2 часа
Тема 7. «Сложные» функции	3 часа
Тема 8. Исследование «сложных» функций и построение их графиков	3 часа
Самостоятельная работа 4 (темы 6–8)	1 час
Тема 9. Обратимые функции. Функция, обратная данной	3 часа
Самостоятельная работа 5 (тема 9)	1 час
Тема 10. Множества, заданные уравнениями и неравенствами	5 часов
Тема 11. Преобразование графиков функций	3 часа
Самостоятельная работа 6 (темы 10 и 11)	1 час
Тема 12. Исследование уравнений, неравенств и их систем	4 часа
Самостоятельная работа 7 (тема 12)	1 час
Итого по главе 1: 48 часов	

Глава 2. Последовательности

Тема 13. Последовательности: их задание и значения	
Способы задания последовательностей	3 часа
Исследование множеств значений последовательностей	2 часа
Самостоятельная работа 8 (тема 13)	1 час

Тема 14. Монотонные последовательности. Периодические последовательности	
Возрастающие и убывающие последовательности	3 часа
Периодические последовательности	2 часа
Самостоятельная работа 9 (тема 14)	1 час
Тема 15. Ограниченные последовательности	3 часа
Самостоятельная работа 10 (тема 15)	1 час
Тема 16. Суммирование последовательностей	3 часа
Самостоятельная работа 11 (тема 16)	1 час
Тема 17. Прогрессии: арифметическая и геометрическая	5 часов
Тема 18. «Текстовые» задачи на прогрессии	3 часа
Самостоятельная работа 12 (темы 17 и 18)	1 час

Итого по главе 2: 29 часов

Глава 1
Функции

Слово «функция» встречалось и ранее, однако оно всегда выступало в сопровождении некоторого прилагательного. А именно, ранее говорилось о «линейной функции», «квадратичной функции». Что такое *функция вообще*, — об этом как раз и пойдет речь в этой главе.

Введение: линейная функция, квадратичная функция и просто — функция

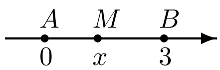
Мы начнем наше изложение с трех задач.

Задача 1. В поселке Новый Ручей живут 50 школьников, а в деревне Старый Ручей живут 10 школьников. Расстояние от деревни до поселка составляет 3 километра. В каком месте следует построить школу, чтобы расстояние, которое суммарно проходят все школьники по дороге из дома в школу, было бы наименьшим?

Ясно, что школу надо строить где-то на дороге между поселком и деревней. Обозначим через x расстояние от места расположения школы до поселка Новый Ручей. Тогда расстояние от этого места до деревни Старый Ручей равно $3 - x$. В таком случае школьники из поселка суммарно пройдут $50x$ километров, а школьники из деревни пройдут $10(3 - x)$ километров. Следовательно, общее пройденное ими расстояние равно $L(x) = 50x + 30 - 10x = 30 + 40x$ километров. Поэтому, чем меньше x, тем меньше суммарно пройденное школьниками расстояние, значит, оно будет наименьшим при $x = 0$. Таким образом, школу надо строить в поселке Новый Ручей.

Заметим, что при выводе формулы для пройденного школьниками расстояния мы пользовались тем, что, с точки зрения здравого смысла, школу надо строить между поселком и деревней. Таким образом, предполагалось, что $0 \leqslant x \leqslant 3$. Теперь давайте поступим более формально.

Рассмотрим числовую прямую. Пусть поселок Новый Ручей располагается в точке A — точке с нулевой координатой. Деревня Старый Ручей располагается в точке B с координатой 3. Предположим, что школу мы строим в точке M, координату которой обозначим через x. На рисунке точка M лежит между точками A и B, однако в вычислениях мы этого предполагать не будем.



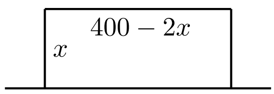
Поскольку в общем случае длина отрезка AM равна $|x|$, а длина отрезка BM равна $|x-3|$, то

$$L(x) = 50|x| + 10|x-3| = \begin{cases} 30 - 60x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 40x + 30, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 60x - 30, & \text{если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Графики таких *кусочно-линейных* функций мы будем строить в дальнейшем. Сейчас же закончим наше исследование следующим замечанием. Простота приведенного выше решения основывалась на том, что мы сузили *область определения* рассматриваемой функции.

Задача 2. Фермеру нужно поставить забор вокруг пастбища, которое находится на берегу канала. Поэтому он будет ставить этот забор по трем сторонам прямоугольника (четвертой стороной является берег). Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы пастбище имело как можно бóльшую площадь, если имеющегося у него материала хватит на 400 метров забора?

Обозначим через x длины сторон прямоугольника, перпендикулярных берегу канала (рисунок).



Поскольку общая длина забора равна 400 метрам, то длина горизонтальной стороны равна $400 - 2x$, следовательно, для площади $S(x)$ пастбища получаем формулу $S(x) = x(400-2x) = 400x - 2x^2$. Заметим, кстати, что значение x лежит в промежутке $(0; 200)$.

Следовательно, задача сводится к поиску наибольшего значения квадратичной функции на интервале $(0; 200)$. В силу известных свойств такой функции получаем, что ее наибольшее значение достигается при $x = \dfrac{400}{2 \cdot 2} = 100$. Таким образом, следует огородить прямоугольник размером 100×200 метров. В результате площадь огороженного пастбища составит $20\,000$ м^2 (или два гектара).

Последняя из предлагаемых задач (взятая авторами из вариантов олимпиады «Ломоносов–2015») имеет совсем другой характер. В ее решении, как вы увидите, можно задать функцию формулой, но это задание совсем не облегчает само решение.

Задача 3. Скучая на уроке математики, Маша придумала такую игру. Она написала многозначное число и проделала с ним следующую операцию: отбросила его последнюю цифру, домножила получившееся число на 3, а затем прибавила к результату удвоенную отброшенную ранее цифру. С получившимся числом она проделала ту же самую операцию, потом применила ее снова и снова. В итоге Маша с удивлением обнаружила, что после нескольких проведенных ею операций число перестало изменяться. Найдите число, которое в результате получила Маша.

Пусть x — написанное Машей число, a — его последняя цифра. Тогда $x = 10b + a$, где b и есть число, полученное из x после отбрасывания его последней цифры. В результате проделанной операции Маша получит число $y = 3b + 2a$. Воспользуемся функцией *целая часть числа*. Как обычно, целой частью данного числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целую часть числа x мы будем обозначать $[x]$.

Из того, что a является цифрой, следует, что $0 \leqslant \dfrac{a}{10} < 1$, поэтому из равенства $\dfrac{x}{10} = b + \dfrac{a}{10}$ получаем, что $b = \left[\dfrac{x}{10}\right]$. Далее, $a = x - 10b = x - 10\left[\dfrac{x}{10}\right]$, следовательно,

$$y = 3b + 2a = 3\left[\frac{x}{10}\right] + 2x - 20\left[\frac{x}{10}\right] = 2x - 17\left[\frac{x}{10}\right].$$

Число перестанет изменяться, если y станет равным x. Таким образом, мы приходим к уравнению $x = 17\left[\dfrac{x}{10}\right]$.

Для того чтобы его решить, естественно положить $x = 10b + a$, Подставив это равенство в уравнение, получим, что $10b + a = 17b$, откуда

$a = 7b$. Поскольку a есть цифра, то $a = 7$ и $b = 1$. Следовательно, в результате своих действий Маша получила число 17.

Теперь обратим внимание на то, что рассуждать можно было проще, не выводя явной формулы, «выражающей y через x». Действительно, если $x = 10b + a$, то результатом описанной операции является число $y = 3b + 2a$, поэтому равенство $y = x$ равносильно равенству $a = 7b$, откуда и следует, что полученное Машей число — это 17. Таким образом, никакой «выгоды» от выведенной формулы мы не имеем.

Мы никоим образом не хотим убедить читателя, что формулы не важны. Суть в том, что функцию можно определить и без использования явной формулы, выражающей y через x.

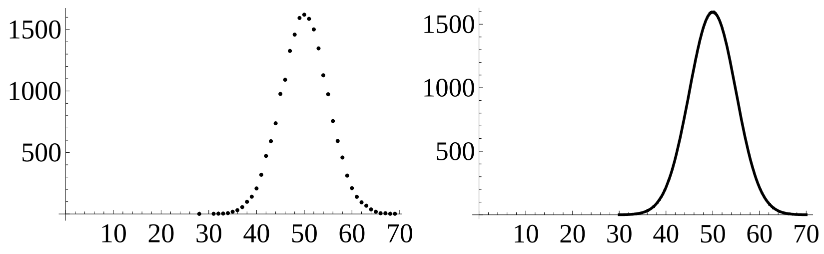
Кстати, интересный вопрос: а какое число могло быть изначально написано Машей? Если $3b + 2a = 17$ и a — это цифра, то возможны следующие варианты: $a = 1$ и $b = 5$, $a = 4$ и $b = 3$, $a = 7$ и $b = 1$. Поэтому $51 \mapsto 17$ и $34 \mapsto 17$. А число $x = 123$ порождает последовательность чисел

$$123 \mapsto 42 \mapsto 16 \mapsto 15 \mapsto 13 \mapsto 9 \mapsto 18 \mapsto 19 \mapsto 21 \mapsto 8 \mapsto 16,$$

и в этот момент нам следует прекратить дальнейшие вычисления, поскольку следующим числом будет 15, затем 13, и далее никаких новых чисел мы не получим.

Функции используются и при математическом описании окружающей нас реальности. При этом достаточно часто имеющаяся в нашем распоряжении информация имеет графический характер. Мы приведем один пример, демонстрирующий, что и в случайностях есть свои закономерности.

Предположим, что мы бросили монету 100 раз. Естественно ожидать, что «орел» (и, конечно, «решка») выпадет около 50 раз. Предположим, что эта операция повторена несколько раз. В скольких случаях «орел» выпал 50 раз, 51 раз, 49 раз; мог ли он выпасть 70 раз из 100? Конечно, реально бросать монету не стоит, вместо этого можно провести компьютерный эксперимент. Как вы думаете, сколько раз из 20 000 серий, в каждой из которых монета была подброшена 100 раз, «орел» выпал 50 раз из 100? Оказывается, что это число близко к 1600, при этом, однако, «орел» мог выпасть и 70 раз из 100. На левом рисунке на следующей странице точки имеют координаты $(n; T_n)$, где T_n — это число испытаний, в которых «орел» появился n раз из 100.



Как вы видите, эти точки явно лежат на некоторой кривой очень характерной формы (правый рисунок). Формулу для этой кривой мы приводить не будем, это уже — совсем «высшая математика».

Тема 1. Понятие функции. Задание функции формулой. «Чтение» графика

Если каждому числу x из некоторого числового множества D соответствует число y, то говорят, что задана *функция с областью определения* D. Число y называется *значением* данной функции при заданном значении x ее аргумента. Когда мы говорили о *линейной функции*, то правило, по которому числу x соответствует число y, задавалось формулой $y = kx + b$. В случае *квадратичной функции* аналогичная формула имеет вид $y = ax^2 + bx + c$ (здесь $a \neq 0$).

В задаче 1 Введения рассматривалась линейная функция, значения которой вычислялись по формуле $y = 40x + 30$, при этом аргументом этой функции являлось произвольное число x из отрезка $[0; 3]$ числовой прямой. Таким образом, этот отрезок является областью определения этой функции. Функция в задаче 2 задавалась формулой $y = 400x - 2x^2$, при этом ее областью определения являлся интервал $(0; 200)$ числовой прямой.

Для того чтобы связь значения функции со значением ее аргумента была более явной, используется обозначение $y = f(x)$. Здесь через x обозначено значение аргумента, через y — значение функции при заданном значении аргумента, а буква f — это своего рода «имя» для правила $x \mapsto y$. В случае, когда правило задается формулой, то $f(x)$ есть просто *выражение*. Конечно, в задаче 3 Введения появилось выражение $f(x) = 2x - 17\left[\frac{x}{10}\right]$, однако участвующая в нем «пара квадратных скобок» сама является обозначением для функции *целая часть числа* с текстовым определением.

Задача 4. Пусть $f(x) = x^2 + 1$.
1) Найдите $f(-3)$ и $f(2)$.
2) Найдите $f(a)$ и $f(b+1)$.
3) Решите уравнение $f(x) = f(2)$.
4) Решите неравенство $f(x) \leqslant f(2)$.
5) Решите уравнение $f(2x) = 2f(x)$.

1) $f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$ и $f(2) = 5$.
2) В определении функции вместо «буквы x» можно подставлять «любую букву и любое выражение», так что $f(a) = a^2 + 1$ и $f(b+1) = (b+1)^2 + 1 = b^2 + 2b + 2$.
3) Конечно, одним из решений является $x = 2$, второе решение — $x = -2$. Все ли учащиеся увидят, что «решать» уравнение не надо, поскольку $f(x) = f(-x)$ при любом x? С другой стороны, нет ничего страшного в том, если они «честно» напишут уравнение $x^2 + 1 = 5$ и получат $x = \pm 2$.
4) Здесь учащиеся могут сделать стандартную ошибку, если не подумают. Если «решать честно», то ее можно избежать. Ответ: отрезок $[-2; 2]$.
5) Так как $f(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$, $2f(x) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$, то получаем уравнение $4x^2 + 1 = 2x^2 + 2$, откуда $2x^2 = 1$, поэтому $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 5. Выясните, являются ли числа a и b значениями данной функции $f(x)$.
1) $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$;
2) $a = 1$, $b = 6$, $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$;
3) $a = 2$, $b = 3$, $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

1) Уравнение $\dfrac{2x+1}{x-1} = 1$ имеет решение $x = -2$. Преобразуя уравнение $\dfrac{2x+1}{x-1} = 2$, получим уравнение $1 = -2$, которое решений не имеет. Значит, число $a = 1$ является значением данной функции, тогда как число $b = 2$ не является ее значением.
2) Преобразовав уравнение $x + \dfrac{4}{x} = 1$, получим уравнение $x^2 - x + 4 = 0$, которое решений не имеет. Если $x + \dfrac{4}{x} = 6$, то $x^2 - 6x + 4 = 0$, откуда $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Значит, число $a = 1$ не является значением данной функции, тогда как число $b = 6$ является ее значением.
3) Преобразовав уравнение $\sqrt{3 - 2x - x^2} = 2$, получим уравнение

$x^2+2x+1=0$, откуда $x=-1$. Если $\sqrt{3-2x-x^2}=3$, то $x^2+2x+6=0$, чего не бывает. Поэтому число $a=2$ является значением данной функции, тогда как число $b=3$ не является ее значением.

Задача 6. Пусть $f(2x+1)=x$. а) Найдите $f(1)$ и $f(5)$.
б) Задайте формулой функцию, определенную правилом $y=f(x)$.

а) Подставив $x=0$ в равенство $f(2x+1)=x$, получим, что $f(1)=0$. Подставив в него же $x=2$, получим, что $f(5)=2$.

б) Далее можно пойти двумя путями (и, естественно, оба их показать). Похоже, что выражение для $f(x)$ является линейным, пусть $f(x)=kx+b$. Так как $f(1)=0$ и $f(5)=2$, то $k+b=0$ и $5k+b=2$. Следовательно, $4k=2$, откуда $k=\dfrac{1}{2}$, а $b=-\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$. Сделаем проверку. Если $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$, то

$$f(2x+1)=\frac{2x+1-1}{2}=x,$$

что и требовалось. Однако при данном способе решения остается открытым вопрос о единственности найденного для $f(x)$ выражения.

Потому будем рассуждать иначе. Поскольку $f(2x+1)=x$, то и $f(2a+1)=a$. Положив $x=2a+1$, получим, что $a=\dfrac{x-1}{2}$, откуда и следует, что $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$.

Задача 7. Пусть $f(x)=x^2-2x$. Решите уравнения: а) $f(x^2-2x)=3$; б) $f(x^2-2x)=-1$.

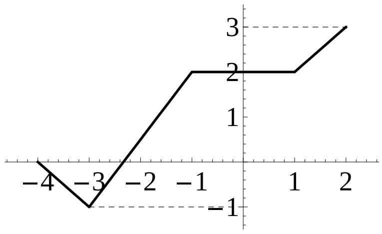
А вот при решении этой задачи явное выражение для $f(x^2-2x)$ находить как раз не надо.

а) Решениями уравнения $f(a)=3$ являются $a=3$ и $a=-1$, поэтому, если $f(x^2-2x)=3$, то $x^2-2x=3$ или $x^2-2x=-1$. Следовательно, решениями данного уравнения являются числа $x=-1; 1; 3$.

б) Если $f(x^2-2x)=-1$, то $x^2-2x=1$, значит, $x=1\pm\sqrt{2}$.

Как говорилось во Введении, функции могут задаваться графически.

Задача 8. Пусть f — это заданная на отрезке $[-4; 2]$ функция, график которой изображен на следующем рисунке.



1) Вычислите значения $f(0)$ и $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
2) Решите уравнение $f(x) = f(0)$.
3) Решите неравенство $f(x) > -1$.
4) Найдите все значения аргумента, при которых значение этой функции является неотрицательным.
5) Найдите все значения, которые принимает данная функция.
6) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.
7) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два решения.
8) Напишите формулу, задающую значения данной функции при x из отрезка $[-1; 1]$.
9) Напишите формулу, задающую значения данной функции при x из отрезка $[-4; -3]$.

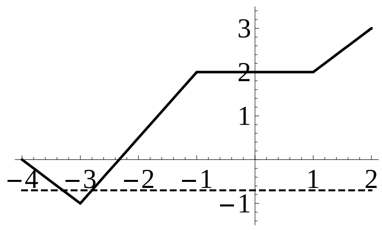
Приведем ответы и прокомментируем предложенные задания. Подчеркнем, что для поиска ответов на первые семь из них формулы не нужны.
1) Конечно, $f(0) = 2$, но для вычисления второго значения функции надо немного подумать. Поскольку точка $\frac{3}{2}$ является серединой отрезка $[1; 2]$, то значение данной функции при $x = \frac{3}{2}$ является серединой отрезка $[2; 3]$, следовательно, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$.
2) Конечно, решением является отрезок $[-1; 1]$.
3) Почти все точки графика данной функции лежат выше прямой $y = -1$, исключением является точка с координатами $(-3; -1)$. Поэтому решением является объединение промежутков $[-4; -3) \cup (-3; 2]$.
4) Надо найти точку пересечения графика с осью абсцисс. Рассуждаем геометрически: пусть C — искомая точка. Рассмотрим точки $A(-3; 0)$, $B(-3; -1)$, $D(-1; 2)$ и $E(-1; 0)$. Поскольку треугольники ABC и CDE являются подобными с коэффициентом подобия 2, то точка C делит отрезок AE в отношении $1 : 2$. Значит, абсцисса точки C равна

$-3+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{7}{3}$. Кроме того, значение $f(-4)=0$ также неотрицательно. Поэтому ответ: $x\in\{-4\}\cup\left[-\dfrac{7}{3};2\right]$.

5) Множество значений функции — это множество всех ординат точек ее графика; в данном примере — это отрезок $[-1;3]$.

6) Это задание приведено для того, чтобы учащиеся осознали, что решать здесь нечего; уравнение $f(x)=a$ имеет решение, если число a является значением данной функции.

7) Уравнение $f(x)=a$ имеет два решения, если горизонтальная прямая $y=a$ пересекается с графиком данной функции ровно в двух различных точках. По графику это будет выполняться при $a\in(-1;0]$ (рисунок).



8) $f(x)=2$ при $x\in[-1;1]$. 9) $f(x)=-4-x$ при $x\in[-4;-3]$.

Сформулируем аналогичные задания для функции, заданной формулой.

Задача 9. Рассмотрим на отрезке $[-4;2]$ функцию, заданную формулой $f(x)=x^2-2x$.

1) Вычислите значения $f(0)$ и $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

2) Решите уравнение $f(x)=f(0)$.

3) Найдите все значения аргумента, при которых значение этой функции является неотрицательным.

4) Решите неравенство $f(x)>-1$.

5) Найдите все значения, которые принимает данная функция.

6) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет решения.

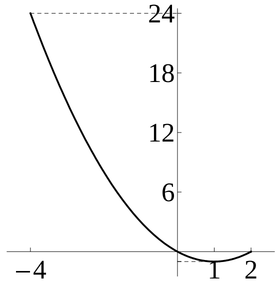
7) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет ровно два решения.

Первые четыре задания решить легко, поскольку нам известна формула для данной функции. 1) $f(0)=0$ и $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}-3=-\dfrac{3}{4}$.

2) $f(x)=f(0)$, если $x^2-2x=0$, откуда $x=0;2$.

3) $x^2 - 2x = x(x-2) \geqslant 0$ при $x \in [-4;0] \cup \{2\}$ (напомним, что по условию областью определения функции является отрезок $[-4;2]$).
4) $x^2-2x > -1$, если $(x-1)^2 > 0$, что имеет место при $x \in [-4;1)\cup(1;2]$.

А теперь самое время взглянуть на график данной функции (рисунок).



5) Множество значений — отрезок $[-1;24]$.
6) Уравнение $f(x) = a$ имеет решение при $a \in [-1;24]$.
7) Уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два решения при $a \in (-1;0]$.

Задачи для домашних заданий по теме 1

1. Известно, что решением уравнения $f(x) = 2014$ является множество чисел $-1, 0, 1, 4$. Решите уравнения: 1) $f(2x+1) = 2014$; 2) $f(x^2) = 2014$; 3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2014$; 4) $f(\sqrt{x}\,) = 2014$.

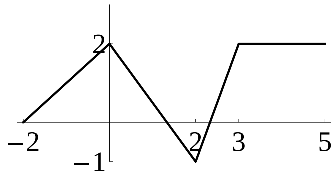
2. Известно, что решением неравенства $f(x) \leqslant 2014$ является объединение промежутков $[-2;0]$ и $(4;+\infty)$. Решите неравенства:
1) $f(2x+1) \leqslant 2014$; 2) $f(x^2) \leqslant 2014$; 3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 2014$; 4) $f(\sqrt{x}\,) \leqslant 2014$.

3. Функция f задана равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2x - x^2 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите: а) $f(0)$; б) $f(3)$. в) Задайте формулами функцию $g(x) = f(2x+1)$.

4. Пусть f — это заданная на отрезке $[-2;5]$ функция, график которой изображен на следующем рисунке.



1) Вычислите значения $f(0)$ и $f(1)$.
2) Решите уравнение $f(x) = f(0)$.
3) Решите неравенство $f(x) < 1$.
4) Найдите все значения, которые принимает данная функция.
5) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.
6) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два решения.
7) Напишите формулу, задающую значения данной функции при x из отрезка $[0; 2]$.
8) Напишите формулу, задающую значения данной функции при x из отрезка $[2; 3]$.

5. Предположим, что функция задана формулой $f(x) = x^2 + x + 1$. Задайте формулой функцию, определенную правилом:
1) $y = f(x) + 2$; 2) $y = f(x + 2)$; 3) $y = 2f(x)$; 4) $y = f(2x)$.

6. Решите уравнение $f(x) = 0$, если известно, что $f(3x + 2) = x - 1$.

7. Даны функции $f(x) = x^2 - 2x$ и $g(x) = 2x$.
1) Решите уравнения $f(x) = f(3)$ и $g(x) = g(3)$.
2) Найдите значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет одно решение.
3) Найдите значения a, при которых уравнение $g(x) = g(a)$ имеет одно решение.
4) Решите уравнения $f(x + 1) = f(x) + f(1)$ и $g(x + 1) = g(x) + g(1)$.
5) Найдите значения a, при которых уравнение $f(x + a) = f(x) + f(a)$ имеет более одного решения.
6) Докажите, что множество решений уравнения $g(x + a) = g(x) + g(a)$ не зависит от значения параметра a, и приведите геометрическую интерпретацию этого факта.

8. а) Докажите, что для любой линейной функции f справедливо равенство $f(x - 1) + f(x + 1) = 2f(x)$. б) Выясните, существует ли квадратичная функция, для которой справедливо аналогичное равенство. в) Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что если $a > 0$, то для любых различных чисел x_1 и x_2 справедливо неравенство $2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_1)+f(x_2)$.

9. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+3}$. Выясните, имеются ли у данной функции значения: а) бо́льшие 1; б) бо́льшие $\dfrac{2}{3}$. в) Найдите все значения данной функции.

10. Задайте формулой функцию, сопоставляющую каждому натуральному числу его остаток при делении на 7.

11. а) Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. Докажите, что полученная разность делится на 9. б) Из трехзначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что полученная разность делится на 99.

12. а) Докажите, что $[x]+[y] \leqslant [x+y]$ при любых действительных числах x и y. б) Приведите также примеры чисел, для которых указанное неравенство оказывается строгим.

Решения домашних задач по теме 1

1. 1) По условию $f(2x+1) = 2014$ тогда и только тогда, когда аргумент данной функции, т. е. число $2x+1$, равен -1, 0, 1 или 4. Поэтому $x = -1; -\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{3}{2}$. Ответы: 2) $x = 0; \pm1; \pm2$. 3) $x = \pm1; \dfrac{1}{4}$. 4) $x = 0; 1; 16$.

2. 1) Неравенство верно, если $-1 \leqslant 2x+1 \leqslant 0$ или же $2x+1 > 4$. Поэтому решением данного неравенства является объединение промежутков $\left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$ и $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. Ответы: 2) $(-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$. 3) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left(0; \dfrac{1}{4}\right)$. 4) $\{0\} \cup (16; +\infty)$.

3. а) Так как $0 < 1$, то при вычислении $f(0)$ следует использовать первую из формул, а потому $f(0) = 1$. б) Поскольку $3 > 1$, то $f(3) = 2\cdot3 - 3^2 = -3$.

в) Первую формулу мы применяем, если $2x+1 \leqslant 1$, т. е. $x \leqslant 0$, вторую, соответственно, при $x > 0$. В результате получим, что

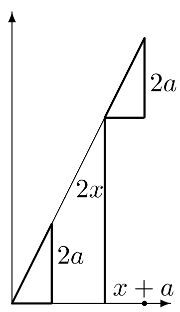
$$g(x) = \begin{cases} 2(2x+1)+1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 2(2x+1)-(2x+1)^2 \text{ при } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 4x+3 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1-4x^2 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

4. Аналогичная задача рассматривалась в этой теме. Приведем ответы. 1) $f(0) = 2$ и $f(1) = \dfrac{1}{2}$. 2) $\{0\} \cup [3; 5]$. 3) $[-2; -1) \cup \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$. 4) $[-1; 2]$. 5) $[-1; 2]$. 6) $(-1; 0)$. 7) $f(x) = 2 - \dfrac{3x}{2}$. 8) $f(x) = 3x - 7$.

5. Смысл этой задачи должен быть ясен. В случае когда функция задается формулой, при вычислении ее значений надо понимать «что куда подставлять».
1) $y = f(x) + 2 = x^2 + x + 1 + 2 = x^2 + x + 3$;
2) $y = f(x + 2) = (x + 2)^2 + (x + 2) + 1 = x^2 + 5x + 7$;
3) $y = 2f(x) = 2(x^2 + x + 1) = 2x^2 + 2x + 2$;
4) $y = f(2x) = (2x)^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 2x + 1$.

6. Собственно говоря, это — задача-«шутка», ведь кто-то из учащихся может написать: «Конечно, $x = 1$!». И он будет почти прав, поскольку, подставив $x = 1$ в формулу, определяющую данную функцию, мы получим $f(5) = 0$, так что ответ: $x = 5$.

7. Данная задача есть упражнение, демонстрирующее разницу между линейной и квадратичной функциями.
1) Ясно, что $x = 3$ является решением обоих уравнений. Будучи линейным, второе уравнение других решений не имеет. Однако, например, в силу теоремы Виета уравнение $f(x) = f(3)$ имеет своим решением также и $x = -1$.
2) В силу теоремы Виета единственным решением уравнения вида $x^2 - 2x + c = 0$ является $x = 1$. Поэтому ответ: $a = 1$.
3) Уравнение $2x = 2a$ имеет единственное решение при любом значении a.
4) Уравнение $(x + 1)^2 - 2(x + 1) = x^2 - 2x - 1$ имеет своим решением $x = 0$. Равенство $2(x + 1) = 2x + 2$ справедливо при всех x.
5) Ясно, что если $a = 0$, то равенство $f(x+a) = f(x)+f(a)$ справедливо при всех x. Других значений нет, так как это равенство простыми преобразованиями приводится к виду $2ax = 0$.
6) Ясно, что $2(x + a) = 2x + 2a$ вообще при всех a и x. Геометрическая интерпретация этого факта — на рисунке.



8. а) Если $f(x) = ax + b$, то

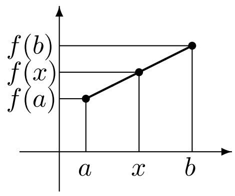
$$f(x-1) + f(x+1) = a(x-1) + b + a(x+1) + b = 2ax + 2b = 2f(x).$$

б) Если $f(x) = ax^2 + bx + c$, то

$$f(x-1)+f(x+1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c + a(x+1)^2 + b(x+1) + c = \\ = 2(ax^2 + bx + c) + 2a = 2f(x) + 2a,$$

поэтому, если $a \neq 0$, то $f(x-1) + f(x+1) \neq 2f(x)$.

При разборе этой задачи будет очень полезно обратить внимание на геометрический смысл данного равенства.



Положим для краткости $a = x - 1$ и $b = x + 1$. Ясно, что точка x числовой оси есть середина отрезка с концами в точках a и b. С формальной точки зрения, это также следует из равенства $2x = a + b$, или $x = \dfrac{a+b}{2}$. Данное условие $f(a) + f(b) = 2f(x)$ означает, что точка $f(x)$ — середина отрезка с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$. Теперь рассмотрим точки плоскости с координатами $A\big(a; f(a)\big)$, $M\big(x; f(x)\big)$ и $B\big(b; f(b)\big)$. По доказанному M является серединой отрезка с концами в точках A и B. Это значит, что точка графика с абсциссой x является серединой отрезка с концами в точках графика с абсциссами a и b. Таким свойством, конечно, обладают прямые — графики линейных функций и не обладают параболы — графики квадратичных функций.

в) Имеем

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 2a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + 2b\,\frac{x_1+x_2}{2} + 2c = \\ = \frac{ax_1^2}{2} + ax_1x_2 + \frac{ax_2^2}{2} + bx_1 + bx_2 + 2c < \frac{ax_1^2}{2} + \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2} + \frac{ax_2^2}{2} + bx_1 + bx_2 + 2c = \\ = ax_1^2 + bx_1 + c + ax_2^2 + bx_2 + c = f(x_1) + f(x_2).$$

Имеет смысл показать и другое решение этой задачи, основанное на идее «симметризации». По аналогии с пунктом (б) положим

$x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ и $d = \dfrac{x_1-x_2}{2}$. Тогда $x_1 = x_0 + d$ и $x_2 = x_0 - d$. Поэтому

$$f(x_1)+f(x_2) = a(x_0+d)^2 + b(x_0+d) + c + a(x_0-d)^2 + b(x_0-d) + c =$$
$$= 2(ax_0^2 + bx_0 + c) + 2ad^2 > 2(ax_0^2+bx_0+c) = 2f(x_0) = 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

9. а) Поскольку числитель и знаменатель данной дроби положительны, причем числитель меньше знаменателя, то $f(x) < 1$ при всех x. Следовательно, у данной функции нет значений, бо́льших 1.

б) Будем решать неравенство $\dfrac{x^2+2}{x^2+3} > \dfrac{2}{3}$. Избавившись от знаменателей, получим неравенство $3x^2+6 > 2x^2+6$, или $x^2 > 0$, которое верно при всех $x \neq 0$. Значит, $f(0) = \dfrac{2}{3}$, при этом все остальные значения данной функции больше $\dfrac{2}{3}$.

в) Ответ: множеством значений данной функции является промежуток $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$. Стоит разобрать два разных подхода к решению, один из которых основан на «догадке». Формулу для функции естественно преобразовать к виду $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+3}$. Так как x^2+3 может быть произвольным числом из промежутка $[3; +\infty)$, то $\dfrac{1}{x^2+3}$ — произвольное число из промежутка $\left(0; \frac{1}{3}\right]$, а потому $f(x)$ может быть равным любому числу из промежутка $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Второй подход более формален. Мы можем найти все значения a, при которых имеет решение уравнение $f(x) = a$, или $\dfrac{x^2+2}{x^2+3} = a$, или $x^2 = \dfrac{3a-2}{1-a}$, которое имеет решение, если $\dfrac{3a-2}{1-a} \geqslant 0$. Решением полученного неравенства и является промежуток $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

10. До ответа легко «просто догадаться». Чтобы получить остаток от деления данного числа n на 7, нужно вычесть 7 из этого числа $\left[\frac{n}{7}\right]$ раз. А потому остаток задается формулой $r = n - 7\left[\frac{n}{7}\right]$.

Приведем также формальное решение. Число r есть остаток от деления n на 7, если $n = 7d+r$, где $r = 0, 1, \ldots, 6$ и число d — целое. Тогда $\frac{n}{7} = d + \frac{r}{7}$. Поскольку $0 \leqslant \frac{r}{7} < 1$, то d и есть наибольшее целое число, не превосходящее числа $\frac{n}{7}$, т. е. $d = \left[\frac{n}{7}\right]$. Поэтому $r = n - 7d = n - 7\left[\frac{n}{7}\right]$.

11. Собственно говоря, к данной теме эта задача отношения не имеет. Смысл ее — в переходе от словесного описания к алгебраическому. Пусть $x = \overline{abc}$ — данное число, соответственно, a, b и c — это его цифры. Тогда $x = 100a + 10b + c$.

а) Так как полученная разность равна $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$, то она делится на 9.

б) Полученная разность равна $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$, следовательно, она делится на 99.

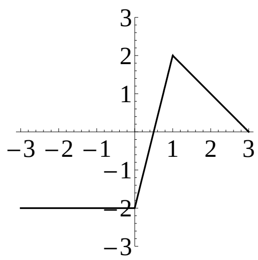
12. а) Так как $[x] \leqslant x$ и $[y] \leqslant y$, то $[x] + [y] \leqslant x + y$. Поэтому $[x] + [y]$ есть целое число, не превосходящее суммы $x + y$. Поскольку по определению целая часть $[x + y]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее $x + y$, то $[x] + [y] \leqslant [x + y]$.

б) Например, если $x = 1{,}5$, а $y = 2{,}5$, то $[x] = 1$, $[y] = 2$, а потому $[x] + [y] = 3$, тогда как $[x + y] = [4] = 4$.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. На рисунке представлен график кусочно-линейной функции f, заданной на отрезке $[-3; 3]$.



1) Найдите все значения этой функции при $x \geqslant 0$. 2) Решите уравнение $f(x) = 1$. 3) Решите неравенство $f(x) \leqslant 0$. 4) При $x \in [1; 3]$ задайте эту функцию формулой.

2. Длину каждого из ребер прямоугольного параллелепипеда увеличили в 3 раза. Выясните, как в результате изменился его объем.

3. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. а) Докажите, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

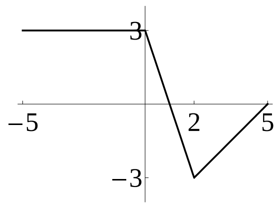
б) Решите уравнение $f\left(\dfrac{2}{x}\right) = f(x)$.

4. Пусть $f(x) = x^2 - 4x$. Решите уравнение:

а) $f(x + 1) = f(x) + 1$; б) $f(3x - x^2) = -4$.

Вариант 2

1. На рисунке представлен график кусочно-линейной функции f, заданной на отрезке $[-5; 5]$.



1) Найдите все значения, которые принимает эта функция при $x > 0$.
2) Решите уравнение $f(x) = -2$. 3) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.
4) При $x \in [2; 5]$ задайте эту функцию формулой.

2. Длину каждого из ребер прямоугольного параллелепипеда уменьшили в 2 раза. Выясните, как в результате изменился его объем.

3. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. а) Докажите, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.
б) Решите уравнение $f\left(\dfrac{2}{x}\right) = f(x)$.

4. Пусть $f(x) = x^2 - 6x$. Решите уравнение:
а) $f(x-1) = f(x) - 1$; б) $f(4x - x^2) = -9$.

Вариант 3

1. Длину каждого из ребер прямоугольного параллелепипеда увеличили в 3 раза. Выясните, как в результате изменилась площадь его полной поверхности.

2. Пусть $f(x) = 4 - x^2$ при $x \in [-1; 4]$.
1) Решите уравнение $f(x) = f(1)$.
2) Найдите все x, при которых $f(x) \leqslant 0$.
3) Найдите все значения, которые принимает данная функция.
4) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.

3. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
а) Докажите, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$. б) Решите уравнение $4f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.

4. Пусть $f(2x-3) = x$. а) Найдите $f(1)$. б) Найдите $f(x)$.

Вариант 4

1. Длину каждого из ребер прямоугольного параллелепипеда уменьшили в 2 раза. Выясните, как в результате изменилась площадь его полной поверхности.
2. Пусть $f(x) = x^2 - 9$ при $x \in [-4; 2]$.
1) Решите уравнение $f(x) = f(2)$.
2) Найдите все x, при которых $f(x) \geqslant 0$.
3) Найдите все значения, которые принимает данная функция.
4) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.
3. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
а) Докажите, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.
б) Решите уравнение $\dfrac{1}{f(x)} - f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2$.
4. Пусть $f(3x + 2) = x$. а) Найдите $f(8)$. б) Найдите $f(x)$.

Дополнительные упражнения по теме 1

1.1. Найдите $f(1)$ и $f(x)$, если: 1) $f(x+1) = x-1$; 2) $f(x)+1 = x-1$; 3) $f(2x) = x-1$; 4) $2f(x) = x-1$; 5) $f(2x-3) = x-1$; 6) $f(x^3) = x^6-1$; 7) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x - 5$ при $x \neq 0$; 8) $f\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right) = x$ при $x \neq 3$.

1.2. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2}$ и $g(x) = \dfrac{x - x^2}{2}$. Найдите $f(1+x)+g(1-x)$.

1.3. Решите уравнение $f(x + 1) = f(1 - x)$, если:
а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = x^2 + 5x - 1$; в) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

1.4. Для каждой из функций: а) $f(x) = 2x - 1$ при $x \in [-1; 3]$; б) $f(x) = 2x + 1 - x^2$ при $x \in [0; 3]$; в) $f(x) = x^2 - x + 2$ при $x \in [-1; 3]$:
1) решите уравнение $f(x) = 2$;
2) найдите все значения данной функции;
3) найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение;
4) найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет единственное решение.

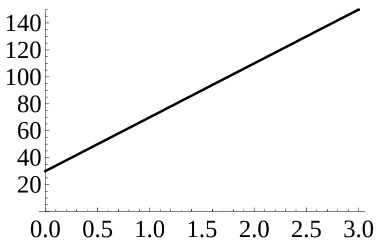
1.5. Приведите примеры непостоянных функций, для которых при всех значениях x из области их определения справедливы соотношения: 1) $f(2x) = 2f(x)$; 2) $f(x^2) = \big(f(x)\big)^2$; 3) $f(x + 1) = f(1 - x)$;
4) $f(x + 1) = -f(1 - x)$; 5) $f(x) = f(-x)$; 6) $f(x) = -f(-x)$.

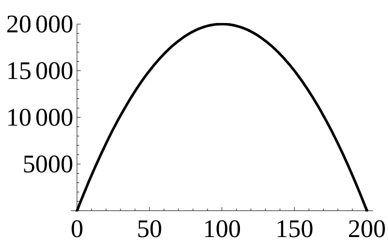
1.6. Пусть $f(x) = x^2 - x + 7$. Найдите значение c, при котором $f(c) = f(c - 2)$.

1.7. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.
1) Решите неравенство $f(x) \leqslant f(1)$.
2) Решите уравнение $f(6x-9x^2) = 2$.
3) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение.
4) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет единственное решение.

Тема 2. Монотонные функции

Для мотивировки важного понятия посмотрим на графики функций из задач 1 и 2 (на страницах 10 и 11). Конечно, для того чтобы эти графики можно было нарисовать на листе бумаги, следует выбрать разные масштабы на осях абсцисс и ординат. Если точка с координатами $(a; b)$ лежит на графике некоторой функции, то число b есть значение этой функции при значении аргумента, равном числу a. Для функции из задачи 1, график которой изображен на левом рисунке, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.





Действительно, при движении по этому графику слева направо ордината точки постоянно растет. График функции из задачи 2 (правый рисунок) таким свойством не обладает. При движении по этому графику от начала координат до его точки с абсциссой, равной 100, ордината растет, а после — убывает.

В связи с этим введем следующее определение. Говорят, что функция f *возрастает на множестве* D, если большему значению ее аргумента из этого множества соответствует большее значение этой функции. Другими словами, функция возрастает на D, если из того, что $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in D$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогичным образом, говорят, что функция $y = f(x)$ *убывает на множестве* D, если большему значению ее аргумента из этого множества соответствует меньшее значение этой функции.

Если из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется нестрого возрастающей, а если из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция называется нестрого убывающей.

Возрастающие, в том числе и нестрого, или убывающие функции называются *монотонными*. Вообще-то говоря, здесь нет устоявшейся терминологии. Иногда нестрого возрастающие функции называют просто возрастающими и вводят термин «строго возрастающие» для функций, являющихся возрастающими во введенном нами смысле.

Следующее свойство линейной функции хорошо известно, но давайте все же его сформулируем на новом языке.

Теорема 2.1. Линейная функция $f(x) = ax + b$ является монотонной на всей числовой прямой. При этом, если $a > 0$, то эта функция является возрастающей, а если $a < 0$ — убывающей.

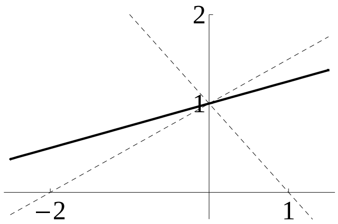
Действительно, если $a > 0$ и $x_1 < x_2$, то $f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$. Если же $a < 0$, то $ax_1 + b > ax_2 + b$.

Задача 10. Найдите все значения a, при которых линейная функция $y = ax + 1$ положительна на отрезке $[-2; 1]$.

Заметим, что функция положительна на отрезке, если является положительным ее наименьшее значение на этом отрезке. Линейная функция принимает свое наименьшее значение на данном отрезке на одном из его концов. Так как значение данной функции при $x = -2$ равно $1-2a$, а значение при $x = 1$ равно $a+1$, то оба они должны быть положительными, поэтому число a должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} 1 - 2a > 0, \\ a + 1 > 0, \end{cases}$$

из которой и следует ответ: $a \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Следующий рисунок иллюстрирует полученный ответ.



Теперь решим задачу, в которой рассматривается квадратичная функция. При этом следует сказать учащимся, что их задача не состоит в проведении операций с дробями.

Задача 11. Для функции, определенной формулой $f(x) = x^2 - 3x$, выясните, какое из ее значений больше, $f\left(\frac{17}{12}\right)$ или $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

Положим $x_1 = \frac{17}{12}$ и $x_2 = \frac{4}{3}$ и преобразуем разность $f(x_1) - f(x_2)$. Получим

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - 3x_1 - (x_2^2 - 3x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 3(x_1 - x_2) = \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3). \end{aligned}$$

Так как $x_2 = \frac{4}{3} = \frac{16}{12} < \frac{17}{12} = x_1$, то $x_1 - x_2 > 0$. Так как $x_1 = \frac{17}{12} < \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$, то $x_1 + x_2 < 2x_1 < 3$, а потому $x_1 + x_2 - 3 < 0$. Следовательно, $f(x_1) - f(x_2) < 0$, поэтому $f\left(\frac{17}{12}\right) < f\left(\frac{4}{3}\right)$.

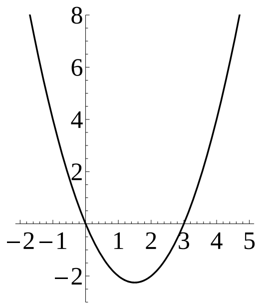
Не правда ли, что проводить такое рассуждение более приятно, чем непосредственно вычислять значения $f\left(\frac{17}{12}\right)$ и $f\left(\frac{4}{3}\right)$? Если $f\left(\frac{4}{3}\right)$ найти не сложно, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9} - 4 = \frac{16 - 36}{9} = -\frac{20}{9}$, то поиск значения $f\left(\frac{17}{12}\right)$, равного $-\frac{323}{144}$, вас не обрадует. Не говоря уже о том, что далее нам придется сравнить полученные значения.

Приведем также несколько иное решение этой задачи, преобразовав формулу для данной функции следующим образом:

$$f(x) = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Так как $\frac{4}{3} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$, то $x_2 - \frac{3}{2} < x_1 - \frac{3}{2} < 0$, следовательно $\left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 > \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2$, поэтому $f(x_1) < f(x_2)$.

Однако самое естественное решение этой задачи основано на свойстве квадратичной *функции*. Разумеется, что учащиеся уже умеют рисовать «параболы». На следующем рисунке изображен график квадратичной функции $f(x) = x^2 - 3x$.



Таким образом, «по графику» мы видим, что на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ рассматриваемая функция убывает, а на промежутке $\left[\frac{3}{2}\,; +\infty\right)$ — возрастает. Поскольку $\frac{4}{3} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$, то $f\left(\frac{17}{12}\right) < f\left(\frac{4}{3}\right)$.

Но дело в том, что построение графика функции есть последний этап ее исследования, в частности, исследования на монотонность. Поэтому одно — это *знать* на каких промежутках данная квадратичная функция является убывающей, на каких — возрастающей, а другое — уметь это *обосновать*.

Поэтому полезно предложить учащимся сформулировать общую теорему и доказать ее. Возможно, что целесообразнее всего предложить им в качестве домашнего задания написать доказательство этой теоремы.

Теорема 2.2. Положим $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Если $a > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2+bx+c$ убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$. Если $a < 0$, то эта функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$.

Пусть $x_1 > x_2$, и рассмотрим разность $y_1 - y_2$ значений функции в этих точках:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= ax_1^2 + bx_1 + c - (ax_2^2 + bx_2 + c) = \\ &= a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(ax_1 + ax_2 + b). \end{aligned}$$

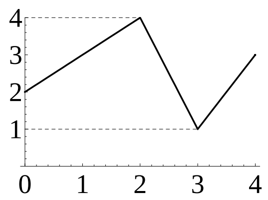
Пусть $a > 0$. Если $x_2 < x_1 \leqslant -\dfrac{b}{2a}$, то $ax_1 \leqslant -\dfrac{b}{2}$ и $ax_2 < -\dfrac{b}{2}$, следовательно, $ax_1 + ax_2 < -b$. Поскольку $x_1 - x_2 > 0$, а $ax_1 + ax_2 + b < 0$, то $y_1 - y_2 < 0$, таким образом, данная функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$.

Если $x_1 > x_2 \geqslant -\dfrac{b}{2a}$, то $ax_1 + ax_2 + b > 0$, откуда следует, что $y_1 > y_2$. Таким образом, данная функция возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}\,; +\infty\right)$.

Вторая часть этой теоремы доказывается аналогичным образом.

Продолжим упражнения на графическую интерпретацию возрастания и убывания функций.

Задача 12. Для функции, график которой изображен на рисунке, найдите: 1) ее наибольшее и наименьшее значения; 2) множество значений этой функции; 3) промежутки ее области определения, на которых эта функция является а) возрастающей и б) убывающей.

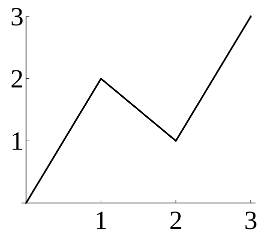


Ответ на задания пунктов 1 и 2 ясен: наибольшее значение этой функции равно 4, наименьшее ее значение равно 1, множеством значений является отрезок $[1; 4]$. 3) По графику этой функции ясно видно, что она возрастает на каждом из отрезков $[0; 2]$ и $[3; 4]$, убывает — на отрезке $[2; 3]$.

Теперь решим обратную задачу.

Задача 13. Нарисуйте график функции $y = f(x)$, $x \in [0; 3]$, не являющейся ни возрастающей, ни убывающей на этом отрезке, и у которой $f(0)$ есть ее наименьшее значение, а $f(3)$ — наибольшее значение на данном отрезке.

Ответов бесконечно много; один из них — на следующем рисунке.



Теперь сформулируем и докажем два свойства монотонных функций, которые будем неоднократно использовать в дальнейшем.

Теорема 2.3. 1) Если обе функции f и g являются возрастающими (или убывающими), то правило $y = f(x) + g(x)$ задает функцию, также являющуюся возрастающей (соответственно, убывающей).
2) Если из функций f и g одна является возрастающей, а другая убывающей, то функция, заданная правилом $y = f(x)+g(x)$, не обязательно является монотонной.

1) Предположим, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ являются возрастающими. Тогда, по определению, из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(x_1) < g(x_2)$. В силу свойств числовых неравенств справедливо неравенство $f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2)$, что и означает, что функция, определенная правилом $y = f(x)+g(x)$, является возрастающей. Аналогичным образом рассматривается случай убывающих функций. (Пусть учащиеся проведут рассуждение самостоятельно.)

2) Достаточно привести пример двух конкретных функций. Функция $f(x) = x^2$ возрастает на луче $[0; +\infty)$, а функция $g(x) = -2x$ убывает на всей числовой прямой, в частности, на указанном промежутке. Однако функция $y = x^2 - 2x$ не является монотонной на $[0; +\infty)$; она убывает на $[0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$.

Для закрепления проведенного рассуждения стоит предложить учащимся решить следующую задачу.

Задача 14. Докажите, что если функция $y = f(x)$ — возрастающая, то функция, определенная правилом $y = af(x)$, при $a > 0$ является возрастающей, а при $a < 0$ — убывающей.

Следующий пример показывает, что о *разности* возрастающих функций ничего определенного утверждать нельзя.

Задача 15. Приведите пример двух возрастающих на всей числовой прямой функций f и g, разность $f - g$ которых:
а) есть возрастающая на всей прямой функция;
б) есть убывающая на всей прямой функция;
в) убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

а) Положим $f(x) = 2x$, а $g(x) = x$.

б) Наоборот, пусть $f(x) = x$, а $g(x) = 2x$.

в) Можно взять, например,

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2x, \text{ если } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

И последний теоретический вопрос, по ответу на который можно будет судить, насколько вашим учащимся необходимо повторить материал следующей темы.

Задача 16. Выясните, верно ли, что произведение возрастающих функций является возрастающей функцией.

Конечно, это неверно! Самый простой пример — функция $f(x) = x$, возрастающая на всей прямой, произведение которой саму на себя дает функцию $g(x) = x^2$, убывающую на промежутке $(-\infty; 0]$.

Задачи для домашних заданий по теме 2

1. Пусть функция f убывает на всей числовой прямой. Решите неравенства: а) $f(x) > f(4)$; б) $f(2x-5) \leqslant f(5x-2)$.

2. а) Докажите, что если функция возрастает на каждом из промежутков $[a; b]$ и $[b; c]$, то она возрастает на промежутке $[a; c]$. б) Выясните, верно ли, что если функция возрастает на каждом из промежутков $[a; b]$ и $(b; c]$, то она возрастает на промежутке $[a; c]$.

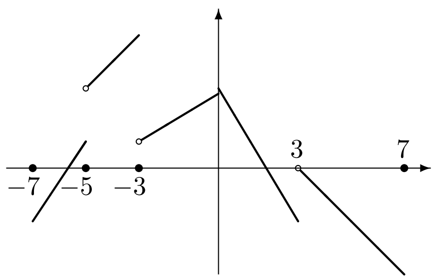
3. Найдите все значения a, при которых функция, заданная на всей числовой прямой равенством $f(x) = ax + 2|x|$: а) является монотонной; б) имеет наименьшее значение; в) имеет наибольшее значение.

4. О числах a и b известно то, что $a > b$. Выясните, всегда ли:
1) $a^2 > b^2$; 2) $a^2 + 4a > b^2 + 4b$; 3) $3a - 1 > 2b - 2$; 4) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

5. Найдите все значения a, при которых функция $f(x) = x^2 + ax$:
а) убывает на промежутке $(-\infty; 5]$ и возрастает на промежутке $[5; +\infty)$;
б) убывает на промежутке $(-\infty; 5]$;
в) возрастает на промежутке $[5; +\infty)$.

6. Докажите, что следующие функции являются возрастающими:
а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $g(x) = x^3$.

7. Найдите промежутки монотонности функции, график которой изображен на рисунке:



8. Сумма двух целых чисел равна 19. Найдите наибольшее значение произведения этих чисел.

9. Выясните, верно ли, что если неравенство $f(x+1) > f(x)$ справедливо для всех значений x, то функция f — возрастающая.

Решения домашних задач по теме 2

1. а) Ответ: $x < 4$. Действительно, если $x < 4$, то в силу определения убывающей функции справедливо неравенство $f(x) > f(4)$. Если же $x > 4$, то $f(x) < f(4)$.

б) Заданное неравенство равносильно неравенству $2x - 5 \geqslant 5x - 2$, откуда $x \leqslant -1$.

2. а) Пусть $x_1 < x_2$. Если $x_2 \leqslant b$ или $x_1 \geqslant b$, то $f(x_1) < f(x_2)$ в силу условия на данную функцию. Поэтому предположим, что $x_1 < b < x_2$. Поскольку $f(x_1) < f(b)$ и $f(b) < f(x_2)$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

б) Очевидно, что данное утверждение неверно. Достаточно рассмотреть, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in [0;1], \\ x-1, \text{ если } x \in (1;2]. \end{cases}$$

3. а) На каждом из промежутков $(-\infty;0]$ и $[0;+\infty)$ данная функция является линейной, значит, монотонной. В соответствии с решением предыдущей задачи, эта функция монотонна тогда и только тогда, когда на каждом из промежутков $(-\infty;0]$ и $[0;+\infty)$ она имеет одинаковый характер монотонности. Поскольку

$$f(x) = \begin{cases} (a+2)x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ (a-2)x, \text{ если } x \leqslant 0, \end{cases}$$

то рассматриваемая функция монотонна, если $a \geqslant 2$ или же $a \leqslant -2$.

б) Данная функция имеет наименьшее значение, если она убывает, хотя бы и нестрого, на промежутке $(-\infty;0]$ и возрастает (возможно, что нестрого) на промежутке $[0;+\infty)$, что имеет место, если $a-2 \geqslant 0$ и $a+2 \leqslant 0$, т. е. при $a \in [-2;2]$.

в) Рассуждая аналогичным образом, получим, что $a \geqslant 2$ и $a \leqslant -2$, что одновременно выполняться не может. Таким образом, наибольшего значения данная функция не имеет.

4. Конечно, каждое из данных неравенств справедливо не при всех a и b, но быстро ли учащиеся построят соответствующие примеры?

Контрпример к неравенству (1) построить совсем просто. Для этого достаточно, например, взять $a = 1$ и $b = -2$. «Подобрать» соответствующий пример для неравенства (2) будет посложнее, а потому стоит не гадать, а рассуждать. Так как

$$a^2 + 4a - b^2 - 4b = (a-b)(a+b) + 4(a-b) = (a-b)(a+b+4)$$

и $a - b > 0$, то достаточно взять такие a и b, чтобы $a + b + 4 < 0$. Например, положим $a = 0$ и $b = -5$. Действительно, в этом случае $a^2 + 4a = 0$, а $b^2 + 4b = 5$.

3) Конечно, если $a > b$, то $3a - 1 > 3b - 1 > 3b - 2$. Однако не всегда $3b - 2 > 2b - 2$! Так как

$$3a - 1 - (2b - 2) = 3(a - b) + b + 1,$$

то мы можем взять число b так, чтобы $3(a - b) + b + 1 < 0$. Пусть $a - b = 1$, тогда достаточно, чтобы $b < -4$. Например, если $b = -6$ и $a = -5$, то $3a - 1 = -16$, а $2b - 2 = -14$.

4) Если $a > 0$, а $b < 0$, то $\dfrac{1}{a} > 0 > \dfrac{1}{b}$.

Дело в том, что исследование элементарных функций на возрастание и убывание, определение промежутков их монотонности опирается на свойства числовых неравенств. Эти свойства использовались и ранее, но полезно их повторить, поэтому и предложена эта задача. Если затруднений она не вызовет, то, видимо, общую теорему можно будет только напомнить и не доказывать.

Теорема 2.4 (о свойствах числовых неравенств)

1. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, если же $c < 0$, то $ac < bc$.
2. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
3. Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.
4. Если $a > b$ и числа a и b либо оба положительны, либо оба отрицательны, то $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
5. Если $a > b \geqslant 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$.

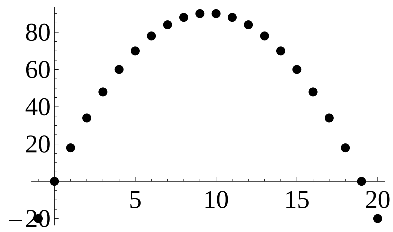
5. Ответы: а) $a = -10$; б) $a \leqslant -10$; в) $a \geqslant -10$. При разборе этой задачи обратите внимание учащихся на связь ответов к заданиям (б) и (в) с ответом к заданию (а).

6. а) Пусть $x_1 > x_2 \geqslant 0$. Если предположить, что $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$, то, возведя в квадрат обе части этого неравенства, мы получим, что $x_1 \leqslant x_2$, что противоречит предположению.

б) Если $x_1 > x_2 \geqslant 0$, то $x_1^3 > x_2^3$ по свойствам числовых неравенств. Если $x_1 \geqslant 0 > x_2$, то $x_1^2 \geqslant 0 > x_2^3$. Наконец, если $x_2 < x_1 \leqslant 0$, то $-x_2 > -x_1 \geqslant 0$, поэтому $-x_2^3 > -x_1^3$, значит, $x_2^3 < x_1^3$.

7. Данная функция возрастает на отрезке $[-7; -3]$ и на промежутке $(-3; 0]$; убывает на отрезке $[0; 3]$ и на промежутке $(3; 7]$.

8. Обозначим эти числа через x и y. Так как по условию $x+y = 19$, то их произведение $xy = x(19 - x) = 19x - x^2$ является квадратичной функцией от числа x. Найденная функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{19}{2}\right]$ и убывает на промежутке $\left[\frac{19}{2}; \infty\right)$. Поскольку по условию число x — целое, то наибольшим будет являться значение этой функции при $x = 9$ или же при $x = 10$. Нетрудно видеть, что в обоих случаях мы получим одно и то же значение произведения $xy = 9 \cdot 10 = 90$. Рисунок иллюстрирует эту задачу.



9. Конечно, ответ — отрицательный.
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x}{2} + \{x\}$ (здесь, как обычно, через $\{a\}$ обозначена дробная часть числа a). Поскольку дробные части чисел x и $x + 1$ совпадают, то $f(x + 1) > f(x)$. С другой стороны, $f(1) = \frac{1}{2}$, а $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, так что введенная функция не является возрастающей.

Еще один пример, который учащиеся сами не придумают, но который полезно показать при разборе этой задачи. Контрпримером является функция, определенная равенством

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ 2x, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Вполне возможно, что учащиеся будут строить примеры соответствующих функций, задавая их графически, — и это вполне разумный подход.

Тема 3. Примеры исследования функций

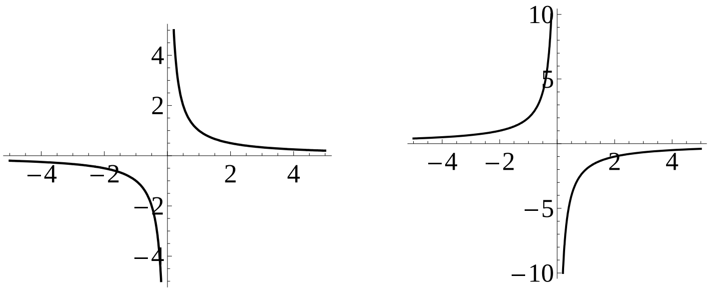
Рассмотрим еще одну «элементарную функцию», а именно функцию, называемую *обратной пропорциональностью.*

Теорема 3.1. Пусть $f(x) = \dfrac{k}{x}$. Тогда, если $k > 0$, то данная функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, если же $k < 0$, то эта функция возрастает на каждом из этих промежутков.

Если $x_1 > x_2 > 0$ или $x_2 < x_1 < 0$, то $x_1x_2 > 0$, поэтому, поделив обе части неравенства $x_1 > x_2$ на произведение x_1x_2, мы получим неравенство $\dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_2}$, откуда $f(x_1) = \dfrac{k}{x_1} < \dfrac{k}{x_2} = f(x_2)$ при $k > 0$.

Если $k < 0$, то мы получим, что $f(x_1) = \dfrac{k}{x_1} > \dfrac{k}{x_2} = f(x_2)$. Теорема доказана.

На рисунках изображены графики: $y = \dfrac{1}{x}$ (слева) и $y = -\dfrac{2}{x}$ (справа).



Сами кривые называются *гиперболами.*

Рассмотрим более общие функции (построение их графиков — отдельная тема, о которой будем говорить далее).

Задача 17. Найдите промежутки возрастания и убывания функций: а) $y = \dfrac{x+2}{x+1}$; б) $y = \dfrac{x+1}{x+2}$.

а) Пусть $x_1 > x_2$, и обозначим через y_1 и y_2 значения функции в этих точках. Преобразуем формулу для вычисления значений функции к виду $y = 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Если $x_1 > x_2 > -1$, то $x_1 + 1 > x_2 + 1 > 0$, поэтому $\dfrac{1}{x_1+1} < \dfrac{1}{x_2+1}$, значит, $y_1 < y_2$. Таким образом, данная функция убывает на промежутке $(-1; +\infty)$.

Если $x_2 < x_1 < -1$, то $x_2 + 1 < x_1 + 1 < 0$, поэтому $\dfrac{1}{x_1+1} < \dfrac{1}{x_2+1}$, значит, $y_1 < y_2$. Значит, данная функция убывает и на промежутке $(-\infty; -1)$.

б) В этом случае справедливо равенство $y = 1 - \dfrac{1}{x+2}$. Рассуждение, аналогичное проведенному при решении задания предыдущего пункта, показывает, что данная функция является возрастающей на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$.

Рассмотрим теперь более сложные функции.

Задача 18. а) Докажите, что функция $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. б) Выясните, верно ли, что на промежутке $(0; +\infty)$ функция $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ является возрастающей.

а) Данная функция убывает на указанном промежутке, поскольку она есть сумма двух функций, каждая из которых убывает на этом промежутке.

б) Составим таблицу значений данной функции (что обычно делают учащиеся).

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	$9\frac{2}{3}$	$16\frac{1}{2}$

Может показаться (см. таблицу), что эта функция возрастает. Конечно, это не так, поскольку значение этой функции, например, при $x = \dfrac{1}{2}$ равно $\dfrac{17}{4}$, что больше, чем ее значение при $x = 1$.

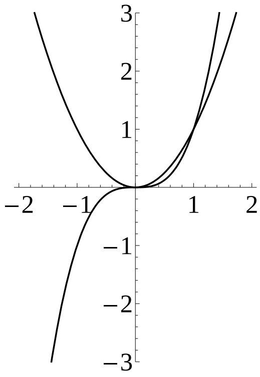
Задача 19. Докажите, что функция $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ убывает на промежутке $(0; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

Как всегда, найдем выражение для разности значений функции в двух точках. Имеем

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + \frac{2}{x_1} - x_2^2 - \frac{2}{x_2} =$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2)\left(x_1 + x_2 - \frac{2}{x_1 x_2}\right).$$

Если $1 \geqslant x_1 > x_2 > 0$, то $x_1 - x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 2$, а $\dfrac{2}{x_1 x_2} > 2$, потому $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Если же $x_2 > x_2 \geqslant 1$, то $x_1 + x_2 > 2 > \dfrac{2}{x_1 x_2}$, поэтому $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Свойства простейшей квадратичной функции хорошо известны. Как следует из решения домашней задачи 6 темы 2, кубическая функция возрастает на всей числовой прямой. На рисунке изображены: парабола — график простейшей квадратичной функции $y = x^2$ и «кубическая кривая» — график функции $y = x^3$.



Оказывается, что свойства степенной функции, заданной формулой $y = x^n$, где число n — натуральное, зависят от того, является ли показатель степени числом четным или нечетным.

Теорема 3.2. Рассмотрим степенную функцию $f(x) = x^n$ (здесь n — натуральное число). Если число n нечетно, то функция f возрастает на всей числовой прямой. Если число n четно, то функция f убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Заметим прежде всего, что если $x_1 > x_2 \geqslant 0$, то в силу свойств числовых неравенств для любого натурального числа n справедливо неравенство $x_1^n > x_2^n$. Следовательно, при любом натуральном n данная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Пусть n нечетно. Если $x_1 \geqslant 0 > x_2$, то $x_1^n \geqslant 0 > x_2^n$. Теперь предположим, что $0 \geqslant x_1 > x_2$. Тогда $-x_2 > -x_1 \geqslant 0$, следовательно, $-x_2^n = (-x_2)^n > (-x_1)^n = -x_1^n$, значит, $x_1^n > x_2^n$. Тем самым мы доказали, что данная функция возрастает на $\mathbb{R}$.

Теперь пусть n — четное число, $0 \geqslant x_1 > x_2$. Тогда $-x_2 > -x_1 \geqslant 0$, следовательно, $x_2^n = (-x_2)^n > (-x_1)^n = x_1^n$. Таким образом, $x_1^n < x_2^n$, следовательно, в этом случае на промежутке $(-\infty; 0]$ данная функция является убывающей.

Задача 20. Найдите промежутки монотонности функций:
а) $f_1(x) = x^5 + 2x$; б) $f_2(x) = x^4 + 2x^2$.

а) Данная функция возрастает на всей числовой прямой как сумма двух возрастающих функций.

б) Данная функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty;0]$ как сумма функций, обладающих теми же свойствами на каждом из этих промежутков.

Задача 21. Найдите промежутки, на которых является: а) возрастающей и б) убывающей функция $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Конечно, поскольку $f(x) = 0$ при $x = -2; 0; 2$, то данная функция не является монотонной ни на одном из промежутков $(-\infty;0]$ и $[0;+\infty)$. С данной функцией естественным образом связан квадратичный многочлен $t^2 - 4t$, промежутки монотонности которого нам известны. Поэтому давайте рассуждать следующим образом. Пусть изначально $x = 0$. Если мы начнем его увеличивать, то будет расти и $t = x^2$, поэтому значение $f(x)$ будет уменьшаться. Но как только значение x станет бо́льшим $\sqrt{2}$, то x^2 будет больше, чем 2, поэтому при дальнейшем увеличении значения x вместе с ростом x^2 будет расти и $f(x)$. Следовательно, $f(x)$ убывает на отрезке $[0;\sqrt{2}\,]$ и возрастает на промежутке $[\sqrt{2}\,;+\infty)$. Далее, так как $f(x) = f(-x)$, то поведение данной функции на промежутке $(-\infty;0]$ определяется ее поведением на промежутке $[0;+\infty)$ (см. задачу 1 домашнего задания). В результате получаем, что данная функция возрастает на отрезке $[-\sqrt{2}\,;0]$ и убывает на промежутке $(-\infty;-\sqrt{2}\,]$.

Приведенное рассуждение является строгим. Конечно, можно записать его в более формальном виде (см. задачу 6 домашнего задания к данной теме).

Задачи для домашних заданий по теме 3

1. Пусть f — возрастающая функция. Рассмотрим функцию g, заданную равенством $g(x) = f(ax + b)$. Докажите, что если $a > 0$, то эта функция также является возрастающей, если же $a < 0$, то она — убывающая.

2. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - 3x$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$ и убывает на отрезке $[-1;1]$.

3. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^n$, где n — целое отрицательное число.

4. Пусть функция f задана на промежутке $[0;+\infty)$ и является возрастающей. Рассмотрим функцию, областью определения которой является вся числовая прямая, и которая задана посредством равенств:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geqslant 0, \\ -f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

а) Докажите, что эта функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$. б) Выясните, верно ли, что эта функция возрастает на всей числовой прямой.

5. Найдите все значения a, при которых функция $f(x) = x^3 + ax$ возрастает на всей числовой прямой.

6. Приведите формальное решение задачи 21.

7. Разность двух целых чисел равна 5. Найдите: а) наименьшее значение их произведения; б) наименьшее значение их частного.

8. Докажите, что при всех допустимых значениях x справедливы неравенства: а) $\sqrt{5x+1} + \sqrt{x} \geqslant 1$; б) $\dfrac{1}{x} - x\sqrt{3x-2} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

9. Пусть $f(x) = \dfrac{ax+1}{x+1}$ и $a > 1$. а) Докажите, что эта функция возрастает на промежутке $(-1; +\infty)$. б) Найдите все значения данной функции при $x \geqslant 0$.

Решения домашних задач по теме 3

1. Конечно, утверждение этой задачи есть частный случай общей теоремы, которая будет дана далее. Но для ее «пропедевтики» вначале полезно рассмотреть частный случай.

Пусть $a > 0$. Если $x_1 > x_2$, то $ax_1 + b > ax_2 + b$, значит, $g(x_1) = f(ax_1+b) > f(ax_2+b) = g(x_2)$ в силу того, что функция f возрастает. Если $a < 0$, то $ax_1 + b < ax_2 + b$, откуда и следует, что $g(x_1) < g(x_2)$. Таким образом, в данном случае функция g — убывающая.

2. Пусть $x_1 > x_2$. Воспользуемся разложением

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3).$$

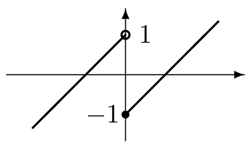
Если $x_2 \geqslant 1$ или $x_1 \leqslant -1$, то $x_1^2+x_1x_2+x_2^2 > 3$, поэтому $f(x_1) > f(x_2)$. Если $-1 \leqslant x_2 < x_1 \leqslant 1$, то $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 < 3$, поэтому $f(x_1) < f(x_2)$.

3. Введем натуральное число $k = -n$. Тогда $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$. Если число n четно, то функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает на промежутке $(0; +\infty)$. Действительно, если $x_2 < x_1 < 0$, то $x_2^k > x_1^k > 0$, поэтому $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2^k} < \dfrac{1}{x_1^k} = f(x_1)$. Если $0 < x_2 < x_1$, то $0 < x_2^k < x_1^k$, поэтому $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2^k} > \dfrac{1}{x_1^k} = f(x_1)$.

Если число n нечетно, то из неравенства $x_2 < x_1$ следует неравенство $t_2 = x_2^k < x_1^k = t_1$. Из того, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ следует, что если $t_1 < 0$ или $0 < t_2$, то $f(x_1) = \frac{1}{t_1} < \frac{1}{t_2} = f(x_2)$, что и требовалось доказать.

4. а) Утверждение этого пункта есть прямое следствие результата задачи 1.

б) Конечно, функция g не обязана быть возрастающей. Рассуждение, аналогичное проведенному в пункте (а), показывает, что функция g возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$. Однако из того, что некоторая функция возрастает и на промежутке $(-\infty; 0)$, и на промежутке $[0; +\infty)$, не следует, что она возрастает на всей числовой прямой. Например, можно взять $f(x) = x - 1$ при $x \geqslant 0$. График функции g приведен на рисунке.



5. Ответ: $a \geqslant 0$. Если $a = 0$, то все очевидно, если $a > 0$, то f возрастает как сумма двух возрастающих функций. Если $a < 0$, то функция обращается в нуль в трех различных точках, а потому не может быть возрастающей.

6. Если положить $p(x) = x^2 - 4x$, то $f(x) = p(x^2)$.

Пусть $x_2 < x_1 \leqslant -\sqrt{2}$. Тогда $t_2 = x_2^2 > x_1^2 = t_1 \geqslant 2$. Поскольку функция p возрастает на промежутке $[2; +\infty)$, то $p(t_2) > p(t_1)$. Таким образом,

$$f(x_2) = p(t_2) > f(x_1) = p(t_1),$$

что и означает, что функция f убывает на промежутке $(-\infty; -\sqrt{2}]$.

Пусть $-\sqrt{2} \leqslant x_2 < x_1 \leqslant 0$. Тогда $x_1^2 < x_2^2 \leqslant 2$. Поскольку функция p убывает на промежутке $(-\infty; 2]$, то

$$f(x_1) = p(x_1^2) > p(x_2^2) = f(x_2).$$

Следовательно, на промежутке $[-\sqrt{2}; 0]$ функция f — возрастающая.

Если $0 \leqslant x_2 < x_1 \leqslant \sqrt{2}$, то $x_2^2 < x_1^2 \leqslant 2$, поэтому

$$f(x_2) = p(x_2^2) > p(x_1^2) = f(x_1),$$

значит, на промежутке $[0; \sqrt{2}]$ функция f — убывающая.

Наконец, если $\sqrt{2} \leqslant x_2 < x_1$, то $2 \leqslant x_2^2 < x_1^2$, следовательно,

$$f(x_2) = p(x_2^2) < p(x_1^2) = f(x_1),$$

значит, функция f возрастает на промежутке $[\sqrt{2}\,; +\infty)$.

7. а) Если $x - y = 5$, то $xy = x(x-5) = x^2 - 5x$. Наименьшее значение полученного квадратичного выражения достигается при $x = \frac{5}{2}$, однако поскольку по условию число x является целым, то наименьшим будет значение при $x = 2$ (или при $x = 3$), равное -6.

б) В действительности, здесь есть два случая, так как не сказано, какое частное надо рассматривать, $\frac{x}{y}$ или же $\frac{y}{x}$. Так как $\frac{x}{y} = \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$, то наименьшим будет значение -4 при $x = 4$. Во втором случае $\frac{y}{x} = \frac{x-5}{x} = 1 - \frac{5}{x}$ и наименьшим будет значение -4 при $x = 1$.

8. а) Допустимыми являются все значения $x \geqslant 0$. Квадратный корень, как было показано, возрастает на $[0; +\infty)$. В силу утверждения задачи 1, функция $f(x) = \sqrt{5x+1}$ также является возрастающей на своей области определения, поэтому и сумма $g(x) = \sqrt{5x+1} + \sqrt{x}$ является возрастающей на $[0; +\infty)$ функцией. Значит, при всех $x > 0$ справедливо неравенство $f(x) > f(0) = 1$.

б) Допустимыми являются значения $x \geqslant \frac{2}{3}$. Пусть $f(x) = \frac{1}{x} - x\sqrt{3x-2}$. Нетрудно видеть, что f убывает на $\left[\frac{2}{3}\,; +\infty\right)$, а потому при всех $x > \frac{2}{3}$ имеет место неравенство $f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

9. а) Положим $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда

$$f(x) = \frac{ax+1}{x+1} = a - \frac{a-1}{x+1} = a - (a-1)g(x+1).$$

Поскольку функция g убывает на $(0; +\infty)$ и $a > 1$, то f возрастает на $(-1; +\infty)$.

б) Если $x \geqslant 0$, то, в силу предыдущего пункта, $f(x) \geqslant f(0) = 1$. С другой стороны, выражение $\frac{a-1}{x+1}$ положительно и может быть сколь угодно малым при больших значениях x. Следовательно, множеством значений данной функции при $x \geqslant 0$ является промежуток $[1; a)$.

«Алгебраическое» решение: если $f(x) = b$, то $x = \frac{b-1}{a-b}$. Так как $x \geqslant 0$ и $a > 1$, то $1 \leqslant b < a$.

Самостоятельная работа 2 (темы 2 и 3)

Вариант 1

1. а) Докажите, что если $a > b$, то не всегда выполнено неравенство $a^2 + 2a > b^2 + 2b$.
б) Докажите, что если $a > b \geqslant -1$, то $a^2 + 2a > b^2 + 2b$.
2. Пусть $f(x) = 3x^2 - 4x$. Выясните, какое из значений этой функции больше другого, $f\left(\frac{3}{4}\right)$ или $f\left(\frac{31}{39}\right)$.
3. Докажите, что $\sqrt{2x+1} + x \geqslant \sqrt{3} + 1$ при всех натуральных x.
4. Пусть $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ и $x \geqslant 0$.
а) Докажите, что данная функция является возрастающей.
б) Найдите все значения, которые принимает данная функция.

Вариант 2

1. а) Докажите, что если $a > b$, то не всегда выполнено неравенство $a^2 + 4a > b^2 + 4b$.
б) Докажите, что если $a > b \geqslant -2$, то $a^2 + 4a > b^2 + 4b$.
2. Пусть $f(x) = 5x^2 - 4x$. Выясните, какое из значений этой функции больше другого, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ или $f\left(\frac{11}{28}\right)$.
3. Докажите, что $\sqrt{4x-2} + 3x \geqslant 3 + \sqrt{2}$ при всех натуральных x.
4. Пусть $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ и $x \geqslant 0$.
а) Докажите, что данная функция является убывающей.
б) Найдите все значения, которые принимает данная функция.

Вариант 3

1. Докажите, что если $a > b$, то: а) не всегда выполнено неравенство $a^2 + 2a > b^2 + 2b$; б) верно неравенство $a^3 + 2a > b^3 + 2b$.
2. Докажите, что $x\sqrt{2x-1} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ при всех натуральных x.
3. Сумма двух целых чисел равна 10. Найдите: а) наибольшее и б) наименьшее значение их частного.
4. Пусть $f(x) = \dfrac{ax+3}{x+2}$.
а) Докажите, что при $a = 1$ данная функция убывает на промежутке $(-2; +\infty)$.
б) Найдите все значения a, при которых данная функция убывает на промежутке $(-2; +\infty)$.

Вариант 4

1. Докажите, что если $a > b$, то: а) не всегда выполнено неравенство $a^2 + a > b^2 + b$; б) верно неравенство $a^3 + a > b^3 + b$.

2. Докажите, что $x\sqrt{3x-2} - \dfrac{2}{x+1} \geqslant 0$ при всех натуральных x.

3. Сумма двух целых чисел равна 8. Найдите: а) наибольшее и б) наименьшее значение их частного.

4. Пусть $f(x) = \dfrac{ax+2}{x+3}$.

а) Докажите, что при $a = 1$ данная функция возрастает на промежутке $(-3; +\infty)$.

б) Найдите все значения a, при которых данная функция возрастает на промежутке $(-3; +\infty)$.

Дополнительные упражнения по темам 2 и 3

2.1. Пусть $f(x) = 5x^2 - 2x + 7$. Сравните значения:
а) $f\left(\sqrt{2}\right)$ и $f\left(\sqrt{3}\right)$; б) $f\left(-\dfrac{87}{88}\right)$ и $f\left(-\dfrac{88}{89}\right)$.

2.2. а) Докажите, что если $a > b > 1$, то $103a^2 - 3a > 103b^2 - 3b$.
б) Выясните, верно ли, что если $a > b > 0$, то $103a^2 - 3a > 103b^2 - 3b$.

2.3. Выясните, существуют ли возрастающая на всей числовой прямой функция f и убывающая на всей числовой прямой функция g, такие что: 1) их сумма $h(x) = f(x) + g(x)$ убывает; 2) их разность $h(x) = f(x) - g(x)$ возрастает; 3) их произведение $h(x) = f(x)g(x)$ возрастает; 4) их отношение $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ возрастает.

2.4. Докажите, что если функция f возрастает на некотором промежутке и все ее значения на этом промежутке неотрицательны, то функция $g(x) = f^2(x)$ также возрастает на этом промежутке.

2.5. Сумма двух натуральных чисел равна 101. Найдите наибольшее и наименьшее значения произведения этих чисел.

2.6. Произведение двух положительных чисел равно 8. Найдите наибольшее и наименьшее значения суммы этих чисел.

2.7. Найдите промежутки возрастания и убывания функций: 1) $f_1(x) = x^2 + 6x - 11$; 2) $f_2(x) = \sqrt{3x-1}$; 3) $f_3(x) = \sqrt{3-4x}$; 4) $f_4(x) = \dfrac{x-1}{2x+4}$; 5) $f_5(x) = \dfrac{x+2}{5-x}$; 6) $f_6(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; 7) $f_7(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2}$; 8) $f_8(x) = \sqrt{6x - x^2 - 5}$.

2.8. Докажите, что функция $f(x) = 12x - x^3$ возрастает на отрезке $[-2; 2]$.

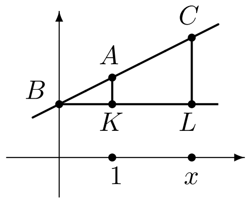
2.9. Постройте заданную на $\mathbb{R}$ функцию, которая ни на каком промежутке не является ни возрастающей, ни убывающей.

Тема 4. Графики функций

Начнем с точного определения. Графиком функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют равенству $y = f(x)$. Хотя график линейной функции давно известен, но пора соответствующее утверждение аккуратно доказать.

Теорема 4.1. Графиком линейной функции является прямая на плоскости.

Рассмотрим линейную функцию $f(x) = kx+b$. Если $k = 0$, то функция постоянна, ее графиком является множество всех точек, ордината которых равна b. Таким образом, этот график есть прямая, параллельная оси абсцисс. Теперь предположим, что $k > 0$. Пусть B — это точка пересечения графика с осью ординат. Поскольку абсцисса этой точки равна нулю, то ее ординатой является значение $y = f(0) = b$. Рассмотрим на графике еще следующие точки: точку A, абсцисса которой равна 1, и точку C с произвольной положительной абсциссой x. Возьмем еще две вспомогательные точки $K(1; b)$ и $L(x; b)$ (рисунок). Поскольку точки B, K и L имеют равные ординаты, то они лежат на прямой, параллельной оси абсцисс. Требуется доказать, что точки B, A и C лежат на одной прямой, для чего достаточно установить равенство углов $\angle KBA$ и $\angle LBC$.



Ординатой точки A является значение рассматриваемой функции при $x = 1$, таким образом, она равна $k + b$, следовательно, длина отрезка AK равна k. Ординатой точки C является число $kx+b$, поэтому $CL = kx$. Следовательно,

$$\frac{BL}{BK} = x = \frac{CL}{CK}\,.$$

Поскольку треугольники ABK и CBL — прямоугольные, то из доказанной пропорциональности их сторон следует подобие этих треугольников, откуда мы и получаем, что $\angle KBA = \angle LBC$.

Теперь надо рассмотреть случай, когда $x < 0$, а затем случай, в котором коэффициент k является отрицательным числом. Рассуждения аналогичны проведенному, приводить мы их не будем, особенно в силу того, что более простое доказательство этой теоремы будет приведено далее (см. теорему 10.2 на странице 122).

Задача 22. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;-3)$ и $B(2;4)$. б) Выясните, лежат ли на одной прямой точки $A(0;2)$, $B(2;3)$ и C(184;93). в) Найдите тангенс угла наклона прямой $y = 2x+3$ к оси абсцисс.

а) Требуется найти такие числа k и b, при которых прямая $y = kx+b$ проходит через данные точки. Таким образом, пары $(-1;-3)$ и $(2;4)$ должны удовлетворять уравнению $y = kx+b$. Поэтому $-3 = -k+b$ и $4 = 2k+b$. Решив полученную систему, получим, что $k = \frac{7}{3}$ и $b = -\frac{2}{3}$, таким образом, получаем уравнение $y = \frac{7x-2}{3}$.

б) Идея проста: найти уравнение прямой, проходящей через точки A и B, а затем проверить, лежит ли на ней точка C. Прямая AB задается уравнением $y = \frac{x+4}{2}$. Положив $x = 184$, мы получим, что $y = 94$. Поэтому на этой прямой лежит точка с кординатами $(184;94)$, а точка C лежит ниже ее.

в) Из доказательства теоремы 4.1 следует, что длина отрезка AK равна k (обозначения — на приведенном выше рисунке). Поскольку $BK = 1$, то тангенс угла ABK равен k. В данном случае тангенс угла наклона равен 2.

В силу результата последнего пункта предыдущей задачи коэффициент k в уравнении $y = kx+b$, задающем прямую, называется *угловым коэффициентом* этой прямой.

Задача 23. Найдите общую формулу для углового коэффициента прямой, проходящей через точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ (здесь $x_1 \neq x_2$).

Пусть $y = kx+b$ есть уравнение прямой, проходящей через данные точки. Тогда $y_1 = kx_1+b$ и $y_2 = kx_2+b$, поэтому $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

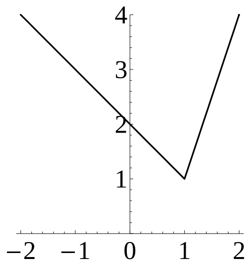
В проведенном рассуждении существенно, что нам не пришлось рассматривать различные случаи взаимного расположения точек A и B.

Задача 24. Постройте график функции $f(x) = x + 2|x-1|$.

Поскольку

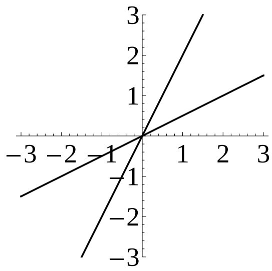
$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, \text{ если } x \geqslant 1, \\ 2-x, \text{ если } x \leqslant 1, \end{cases}$$

то графиком данной функции является изображенное на рисунке объединение двух лучей.

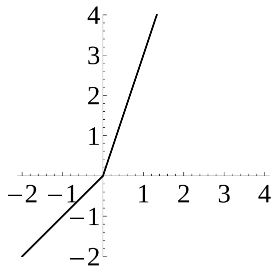


Частая ошибка учащихся при построении графиков *кусочно заданных* функций состоит в том, что предъявляемый ими ответ вообще не является графиком никакой функции.

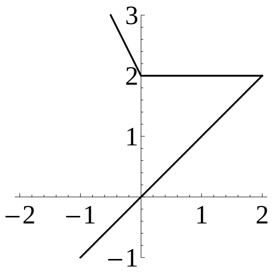
Задача 25. Среди приведенных рисунков укажите те, которые являются графиками некоторых из следующих функций:
1) $f_1(x) = |x| + |x-2|$; 2) $f_2(x) = |x| - |x-2| + 2$; 3) $f_3(x) = 2x + |x|$;
4) $f_4(x) = \begin{cases} |x| + |x-2|, \text{ если } x \leqslant 2, \\ x, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$



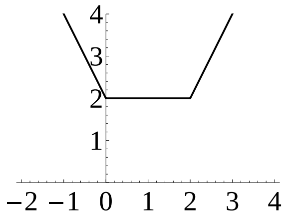
(1)



(2)



(3)



(4)

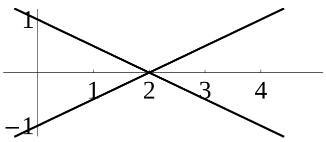
Идея понятна. Значением функции при заданном значении b ее аргумента является ордината точки пересечения прямой $x = b$ с графиком этой функции. Поскольку при каждом значении аргумента функция имеет только одно значение, то всякая вертикальная прямая должна пересекаться с графиком не более, чем в одной точке. Поэтому на рисунках (2) и (4) изображены графики некоторых функций, тогда как множества, изображенные на рисунках (1) и (3), графиками функций не являются.

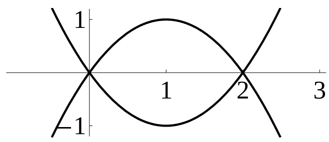
На рисунке (2) изображен график функции f_3, на рисунке (4) — график функции f_1.

Рассуждение, проведенное при решении предыдущей задачи, можно обобщить.

Теорема 4.2. Множество на плоскости является графиком некоторой функции тогда и только тогда, когда всякая вертикальная прямая пересекает это множество не более, чем в одной точке. При этом проекция этого множества на ось абсцисс и является областью определения этой функции.

Взглянем на следующие рисунки, на которых изображены графики: слева — линейных функций $y = \dfrac{x-2}{2}$ и $y = \dfrac{2-x}{2}$, справа — квадратичных функций $y = x^2 - 2x$ и $y = 2x - x^2$.

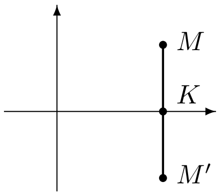




Можно заметить, что как прямые слева, так и параболы справа симметричны друг другу относительно оси абсцисс. Это следует из одного простого и общего свойства графиков.

Теорема 4.3. График функции $g(x) = -f(x)$ симметричен графику функции f относительно оси абсцисс.

Утверждение этой теоремы следует из следующего наблюдения. Рассмотрим точки $M(x;y)$, $M'(x;-y)$ и $K(x;0)$ (рисунок).



Ясно, что отрезок MM' перпендикулярен оси абсцисс, при этом его середина, точка K, лежит на оси абсцисс. Следовательно, точки M и M' симметричны друг другу относительно этой оси. Если M лежит на графике функции f, то $y = f(x)$, значит, $-y = -f(x)$, поэтому точка M' лежит на графике функции $-f$. И наоборот, если точка M' лежит на графике $-f$, то точка M (с той же абсциссой) будет располагаться на графике функции f.

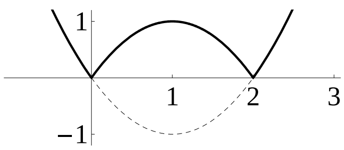
Из доказанного утверждения сразу следует и метод построения графика $y = |f(x)|$ по графику $y = f(x)$.

Следствие. Для построения графика $y = |f(x)|$ следует отразить симметрично относительно оси абсцисс часть графика $y = f(x)$, лежащую ниже этой оси, сохранив ту часть графика $y = f(x)$, которая расположена выше оси абсцисс.

Действительно, если $f(x) \geqslant 0$, то, с одной стороны, точка с координатами $\big(x; f(x)\big)$ лежит выше оси абсцисс, с другой стороны, поскольку в этом случае $|f(x)| = f(x)$, эта точка является также точкой графика $y = |f(x)|$. Если же $f(x) < 0$, то точка, симметричная точке $\big(x; f(x)\big)$ относительно оси абсцисс, имеет координаты $\big(x; -f(x)\big)$ и лежит на графике $y = |f(x)|$, так как в данном случае $|f(x)| = -f(x)$.

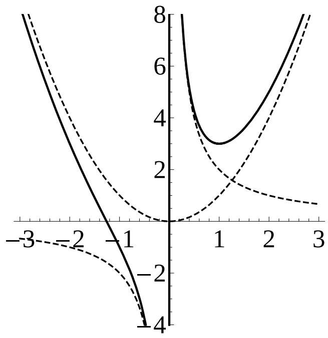
Задача 26. Изобразите график функции $f(x) = |x^2 - 2x|$.

Ответ на следующем рисунке, на котором пунктиром отмечена дуга параболы $y = x^2 - 2x$, лежащая ниже оси абсцисс.



Кому-то может показаться, что последняя задача этой темы, которую мы сейчас сформулируем, «слишком трудна». Однако ее цель — показать, что если промежутки монотонности функции уже найдены, то для построения ее графика часто достаточно «здравого смысла».

Задача 27. Изобразите график $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.



Из решения задач 18 и 19 предыдущей темы известно, что данная функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$, возрастает на промежутке $[1; +\infty)$. Если x — «большое по модулю число», то $\dfrac{2}{x}$ является очень маленьким, поэтому при больших по модулю x значение данной функции близко к x^2, а ее график близок к параболе $y = x^2$. Если же x мало, то $\left|\dfrac{2}{x}\right|$ велико, тогда как x^2 мало. Поэтому при малых x искомый график близок к гиперболе $y = \dfrac{2}{x}$. Ответ — на рисунке, на котором пунктиром обозначены указанные парабола и гипербола.

Задачи для домашних заданий по теме 4

1. Выясните, лежат ли на одной прямой точки с координатами $(1; 1)$, $(2; 2)$ и $(3; 5)$.

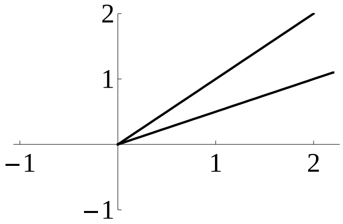
2. Найдите условие, при выполнении которого точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой (в предположении, что абсциссы всех точек различны).

3. Постройте график $y = f(f(x))$, если: а) $f(x) = x - 1$; б) $f(x) = 1 - x$; в) $f(x) = |x - 1|$.

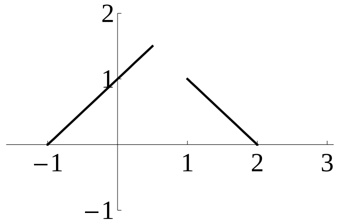
4. Определите в зависимости от значения параметра a число решений уравнения:
1) $x + 2|x - 1| = a$; 2) $2x + |x - 1| = a$; 3) $x|x - 2| = a$; 4) $|x|(x - 2) = a$.

5. Найдите число «естественных» функций, графики которых лежат в объединении прямых $y = 2x$ и $y = -\frac{x}{2}$.

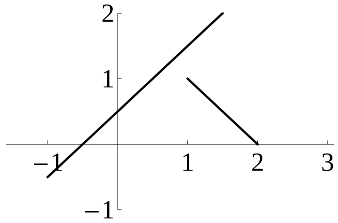
6. Выясните, какие из изображенных на следующих рисунках множеств являются графиком некоторой функции. Ответ обоснуйте.



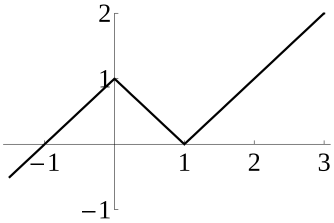
(1)



(2)



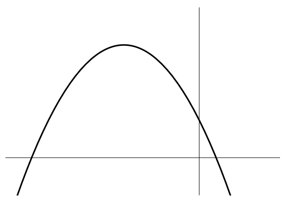
(3)



(4)

7. Выясните, лежат ли на одной параболе точки с координатами $(1; 1)$, $(2; 4)$ и $(3; 5)$.

8. На рисунке изображена парабола $y = ax^2 + bx + c$.



Определите знаки коэффициентов a, b и c.

9. Докажите, что если точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ не лежат на одной прямой и их абсциссы различны, то существует единственная парабола, на которой все они лежат.

10. Докажите, что если функция f — возрастающая и ее график лежит выше прямой $y = x$, то график $y = f(f(x))$ также лежит выше этой прямой.

11. Пусть функции f и g связаны соотношением $g(x) = f(-x)$. Докажите, что графики этих функций симметричны друг другу относительно оси ординат.

Решения домашних задач по теме 4

1. Ясно, что первые две точки лежат на прямой $y = x$. Поскольку $3 \neq 5$, то третья точка не лежит на этой прямой.

2. Точки будут лежать на одной прямой, если совпадают угловые коэффициенты прямых AB и AC. В силу доказанной формулы это будет иметь место, если

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

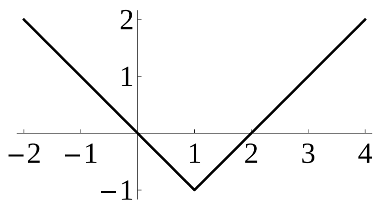
3. а) Так как $f(f(x)) = (x-1) - 1 = x - 2$, то искомым графиком является прямая $y = x - 2$.

б) Так как $f(f(x)) = 1-(1-x) = x$, то искомым графиком является прямая $y = x$.

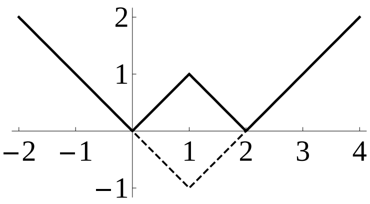
в) В данном случае $f(f(x)) = \big||x-1| - 1\big|$. Достаточно вначале построить график $y = |x-1| - 1$. Так как

$$|x-1| - 1 = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \geqslant 1, \\ -x, \text{ если } x < 1, \end{cases}$$

то графиком $y = |x-1| - 1$ является изображенное на рисунке объединение двух лучей.

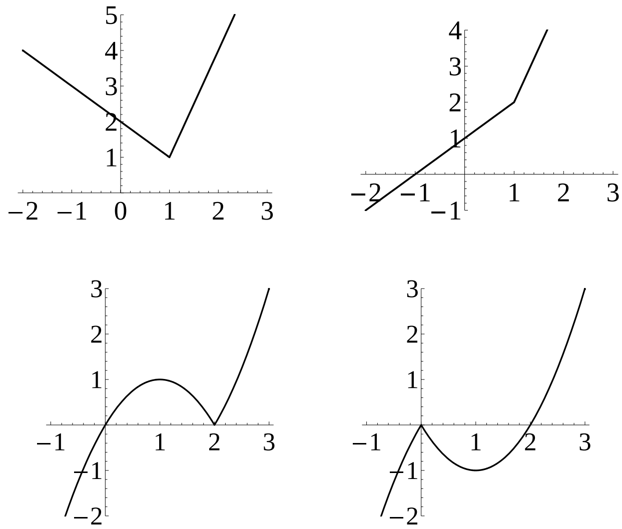


По теореме о построении графика модуля функции все, что осталось сделать, — это отразить часть построенного графика, лежащую ниже оси абсцисс, относительно оси абсцисс. Искомый график — на рисунке.

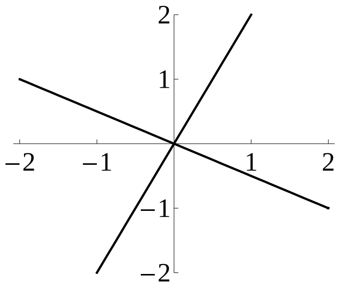


4. Ответы:
1) Нет решений при $a < 1$; одно решение при $a = 1$; два решения при $a > 1$.
2) Одно решение при любом значении a.
3) Одно решение при $a < 0$ и $a > 1$; два решения при $a = 0$ и $a = 1$; три решения при $a \in (0; 1)$.
4) Одно решение при $a < -1$ и $a > 0$; два решения при $a = 0$ и $a = -1$; три решения при $a \in (-1; 0)$.

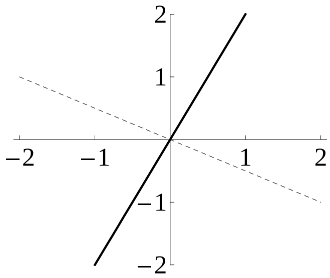
Все они прямо «читаются» по графикам соответствующих функций, приведенным на следующих рисунках.

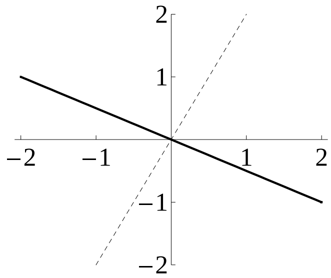


5. Ответ: четыре функции. Конечно, само объединение данных прямых не является графиком никакой функции.

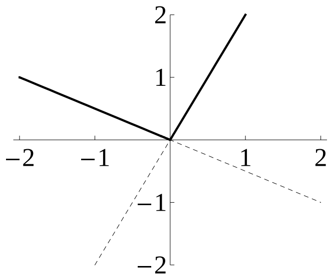


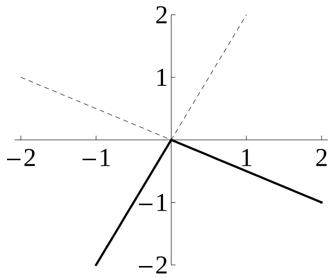
Можно взять просто линейные функции $f_1(x) = 2x$ и $f_2(x) = -\dfrac{x}{2}$, графиками которых и являются, соответственно, прямые $y = 2x$ и $y = -\dfrac{x}{2}$ (рисунок).





Возможен другой вариант, когда из четырех лучей, на которые начало координат разбивает объединение прямых, мы выбираем лучи, лежащие на разных прямых (рисунок).





На левом рисунке изображен график функции, заданной формулами

$$f_3(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}\,, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 2x, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

на правом — график функции, заданной формулами

$$f_4(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -\dfrac{x}{2}\,, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что каждую из двух последних функций можно задать, так сказать, «одной формулой». А именно,

$$f_3(x) = \frac{3x + 5|x|}{4} \text{ и } f_4(x) = \frac{3x - 5|x|}{4}\,,$$

однако, на наш взгляд, смысла в этом немного.

6. На рисунке (2) изображен график функции, областью определения которой является объединение отрезков $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ и $[1; 2]$. Поэтому на рисунках (2) и (4) изображены графики функций, тогда как множества, изображенные на рисунках (1) и (3), графиками функций не являются.

7. Если учащиеся скажут, что данные точки не лежат на одной параболе, поскольку парабола $y = x^2$ проходит через две первые из этих точек и не проходит через третью, то попросите их найти ошибку в этом рассуждении. А ошибка очень проста. Дело в том, что через две точки проходит *единственная* прямая, но бесконечно много парабол.

Решать задачу надо «честно». Пусть $y = ax^2 + bx + c$ — уравнение искомой параболы. Поскольку по условию точки лежат на ней, то

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 4, \\ 9a + 3b + c = 5. \end{cases}$$

Теперь наша задача — решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными. В результате мы получим уравнение искомой параболы: $y = -x^2 + 6x - 4$.

8. Ответ: $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

9. Надо доказать, что если $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \neq \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, то система

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

имеет решение. Рассмотрим разности второго и первого из этих уравнений, а также третьего и первого из них. Так как $x_2 - x_1 \neq 0$ и $x_3 - x_1 \neq 0$, то мы получим систему

$$\begin{cases} a(x_2 + x_1) + b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,, \\ a(x_3 + x_1) + b = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\,. \end{cases}$$

Поскольку по условию правые части полученных уравнений различны, то $a \neq 0$. Получив значение коэффициента a, мы затем сможем последовательно найти коэффициенты b и c.

10. То, что график $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = x$, означает, что неравенство $f(x) > x$ справедливо при всех x. Так как по условию данная функция — возрастающая, то $f(f(x)) > f(x) > x$. Это и значит, что график $y = f(f(x))$ лежит выше прямой $y = x$.

11. Пусть точка $M(x; y)$ лежит на графике функции f, а потому $y = f(x)$. Точка M', симметричная точке M относительно оси ординат, имеет своими координатами числа $(-x; y)$. Таким образом, $y = f(x) = f(-(-x)) = g(-x)$, следовательно, точка M' лежит на графике функции g. Обратно, если точка $M'(x; y)$ лежит на графике функции g, то $y = g(x) = f(-x)$, поэтому точка $M(x; y)$ (симметричная M' относительно оси ординат) лежит на графике функции f.

Тема 5. Множество значений функции

Мы начнем обсуждение основного понятия этой темы с решения следующей задачи.

Задача 28. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение: а) $x^2 - 2x - a = 0$; б) $\dfrac{2x + 1}{x - 1} = a$; в) $x + \dfrac{4}{x - 1} = a$.

Все решения вполне стандартны.

а) Дискриминант данного уравнения равен $4 + 4a$. Поскольку квадратное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, то получаем ответ: $a \geqslant -1$.

б) Избавившись от знаменателя, получим уравнение $2x+1 = ax-a$. Ясно, что $x = 1$ ни при каких значениях a не является решением этого уравнения, а потому никаких «лишних» корней нет. Преобразуем уравнение к виду $(a - 2)x = a + 1$, откуда и следует, что оно имеет решение при $a \neq 2$.

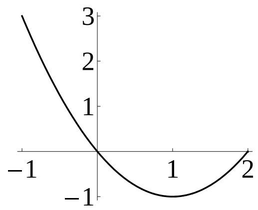
в) Аналогичным образом избавимся от знаменателя и после преобразований получим квадратное уравнение $x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$, дискриминант которого равен $(a+1)^2-4a-16=a^2-2a-15$. Написав условие его неотрицательности, получим, что данное уравнение имеет решение при $a \leqslant -3$ и при $a \geqslant 5$.

А теперь давайте слегка изменим формулировку.

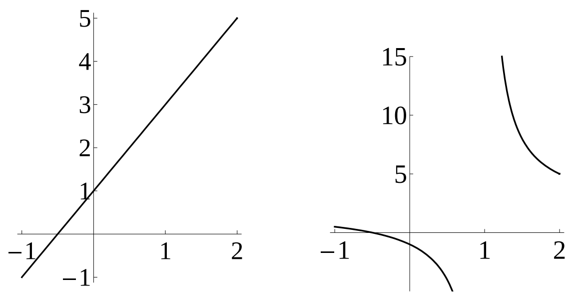
Задача 29. Найдите все значения a, при которых следующее уравнение имеет решение на отрезке $[-1;2]$:
а) $x^2-2x-a=0$; б) $2x+1=a$; в) $\dfrac{2x+1}{x-1}=a$.

а) Проведем вначале стандартное рассуждение. Корнями данного уравнения являются числа $x_{1,2}=1\pm\sqrt{a+1}$. Больший из них не меньше 1, поэтому он лежит на отрезке $[-1;2]$, если $1+\sqrt{a+1}\leqslant 2$, что имеет место, если $-1\leqslant a\leqslant 0$. Меньший из них не больше 1, потому он лежит на отрезке $[-1;2]$, если $1-\sqrt{a+1}\geqslant -1$, что имеет место, если $-1\leqslant a\leqslant 3$. Поэтому данное уравнение имеет решение на отрезке $[-1;2]$ при $a\in[-1;3]$.

Однако существенно проще рассуждать иначе. На следующем рисунке изображена дуга параболы $y=x^2-2x$ при $x\in[-1;2]$. Данное уравнение имеет решение, если прямая $y=a$ пересекает изображенную дугу, что и будет иметь место при $a\in[-1;3]$.



б) Будет хорошо, если при решении этого задания учащиеся сразу изобразили бы отрезок (левый рисунок), с которого «прочитали» ответ: $a\in[-1;5]$.



в) Мы намеренно включили это задание. В данный момент у учащихся нет техники, при помощи которой можно изобразить график $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ Наша цель — сформировать у них потребность к построению этого графика. А в настоящий момент придется производить преобразования.

Решением данного уравнения является число $x = \dfrac{a+1}{a-2}$, которое лежит на данном отрезке, если a является решением системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{a-2} \leqslant 2, \\ \dfrac{a+1}{a-2} \geqslant -1. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является объединение $(-\infty; 2) \cup [5; +\infty)$, решением второго — объединение $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\,\right] \cup (2; +\infty)$. Решением данной системы неравенств является общая часть найденных объединений, поэтому ответ: $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\,\right] \cup [5; +\infty)$.

А насколько было бы приятнее изобразить часть гиперболы (правый рисунок на предыдущей странице), и сразу получить ответ. Тем не менее, хотя график мы пока строить не будем, попробуем использовать известные подходы для *исследования* функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ на монотонность.

Задача 30. Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Поскольку $f(x) = \dfrac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1}$ и функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$, то и рассматриваемая функция убывает на каждом из этих промежутков.

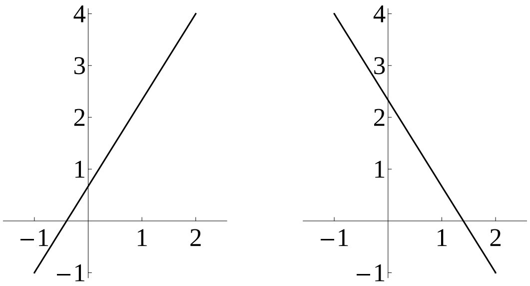
Поэтому при решении последнего задания задачи 29 можно было рассуждать следующим образом.

На промежутке $(1; 2]$ наименьшим значением является $f(2) = 5$. Если x близко к 1, то значение $f(x)$ велико, при этом оно может быть сколь угодно большим. Поэтому значениями на $(1; 2]$ являются числа из промежутка $[5; +\infty)$. Аналогичным образом, значение $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ является наибольшим значением этой функции на промежутке $[-1; 1)$, а все множество значений есть промежуток $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

Следующая задача полезна, но увлекаться подобными задачами не стоит, поскольку это — своего рода игра.

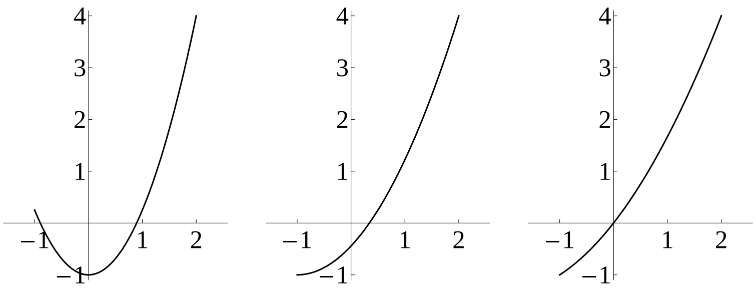
Задача 31. Найдите функции с областью определения $[-1; 2]$ и множеством значений $[-1; 4]$, которые являются: а) линейными; б) квадратичными; в) дробно–линейными.

а) Задача интересна тем, что ответов в ней два, графики — на рисунках.



Стоит ли требовать от учащихся, чтобы они написали и формулы для соответствующих линейных функций? Подчеркнем, что предъявленные графики — это верный и полный ответ. Впрочем, можно указать и формулы: $y = \dfrac{5x+2}{3}$ и $y = \dfrac{7-5x}{3}$.

б) В данном случае ответов — бесконечно много. При этом, если есть формулы, определяющие уравнение прямой, проходящей через две данные точки, то с квадратичными функциями все несколько сложнее. Поэтому стоит предложить учащимся вначале нарисовать несколько «картинок»,

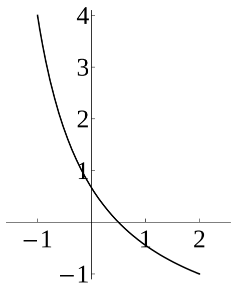


а затем написать для них соответствующие формулы. На этих рисунках изображены графики $y = \dfrac{5x^2-4}{4}$, $y = \dfrac{5x^2+10x-4}{9}$ и $y = \dfrac{x^2+4x}{3}$. Поясним, откуда взялись эти формулы. Парабола на первом рисунке задана формулой вида $y = ax^2 + b$ при $a > 0$. Поскольку соответствующая квадратичная функция принимает свое наименьшее значение в нуле, то $b = -1$. При $x = 2$ она принимает свое наибольшее значение на отрезке $[-1; 2]$, откуда следует, что $4a - 1 = 4$, значит, $a = \frac{5}{4}$.

На втором рисунке вершиной параболы является точка с координатами $(-1; -1)$, поэтому эта парабола задается уравнением $y = a(x+1)^2 - 1$. Осталось подобрать значение a так, чтобы парабола прошла через точку с координатами $(2; 4)$.

Парабола на третьем рисунке проходит через точки с координатами $(-1; -1)$, $(0; 0)$ и $(2; 4)$ (см. решение домашней задачи 7 по теме 4).

в) На следующем рисунке — график $y = \dfrac{4(1-2x)}{3(x+2)}$ (пусть учащиеся подумают, каким образом можно найти соответствующие коэффициенты).



Задача 32. Найдите множества значений функций:
1) $f_1(x) = |x+1| + |x-3|$; 2) $f_2(x) = |x+1| - |x-3|$;
3) $f_3(x) = |x+1| + |x| + |x-3|$; 4) $f_4(x) = |x+1| - |x| + |x-3|$;
5) $f_5(x) = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-3|$.

1) Задача стандартна, но стоит показать несколько разных решений. Начнем с того, в котором нет никаких преобразований. Рассмотрим точки $A(-1)$ и $B(3)$ числовой прямой. Для точки M этой прямой, абсцисса которой равна x, данная функция есть сумма $AM + BM$ расстояний от точки M до данных точек. Как известно, $AM + BM \geqslant AB = 4$, при этом равенство достигается для точек отрезка AB. Ясно, что данная функция может иметь сколь угодно большие значения. Поэтому множеством ее значений является промежуток $[4; +\infty)$.

Приведем теперь типичное решение, основанное на «раскрытии модуля». Если $x \geqslant 3$, то $f_1(x) = 2x - 2$. Таким образом, на промежутке

$[3;+\infty)$ мы получили линейную функцию, наименьшим значением которой является $f_1(3)=4$. Значит, множеством ее значений на $[3;+\infty)$ является промежуток $[4;+\infty)$. Если $x \leqslant -1$, то $f_1(x)=2-2x$. Так как $f_1(-1)=4$, то и на промежутке $(-\infty;-1]$ множеством значений данной функции является $[4;+\infty)$. Осталось заметить, что если $x\in[-1;3]$, то $f_1(x)=4$, а потому других новых значений мы не получим.

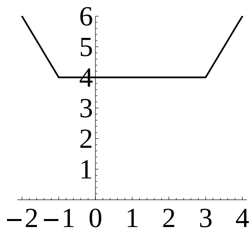
Наконец, дадим решение, находящееся, так сказать, «посредине» между приведенными выше. На каждом из промежутков $(-\infty;-1]$, $[-1;3]$ и $[3;+\infty)$ функция f_1 является линейной. Составим таблицу ее значений.

x	-2	-1	3	4
$f_1(x)$	6	4	4	6

Так как $f_1(4) > f_1(3)$, то на промежутке $[3;+\infty)$ функция f_1 возрастает, значит, ее множеством значений является $[4;+\infty)$. Так как $f_1(-1)=f_1(3)$ и функция f_1 линейна на отрезке $[-1;3]$, то она постоянна, и множество ее значений на нем состоит из одной точки. Так как $f_1(-2) > f_1(-1)$, то функция убывает на $(-\infty;-1]$.

Конечно, ничего не стоило записать явные формулы, задающие рассматриваемую функцию, и изобразить ее график.

$$f_1(x)=\begin{cases}2-2x, \text{ если } x\leqslant -1,\\ 4, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 3,\\ 2x-2, \text{ если } x\geqslant 3.\end{cases}$$



Но в более сложной ситуации формула может быть слишком «тяжеловесной», потому мы продемонстрировали и другие способы рассуждений.

2) Из таблицы значений данной функции

x	-2	-1	3	4
$f_2(x)$	-4	-4	4	4

ясно, что она постоянна на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[3; +\infty)$, а так как она линейна на отрезке $[-1; 3]$, то множеством ее значений является отрезок $[-4; 4]$.

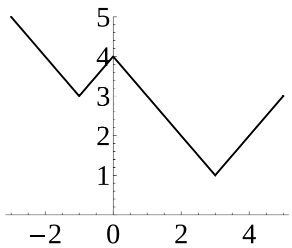
Полезно заметить, что постоянство функции f_2 на указанных промежутках следует из геометрической интерпретации, поскольку $f_2(x) = MA - MB$. Если точка M лежит правее точки B, то разность длин этих отрезков равна длине отрезка AB, если же M лежит левее точки A, то эта разность есть $-AB$.

3) Проще всего рассуждать следующим способом. Так как $f_3(x) \geqslant f_1(x)$, при этом $f_3(0) = f_1(0) = 4$, то промежуток $[4; +\infty)$ и является множеством значений функции f_3.

4) Данная функция является линейной на промежутках $(-\infty; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 3]$ и $[3; +\infty)$. Составим таблицу значений функции в точках $-2; -1; 0; 3; 4$.

x	-2	-1	0	3	4
$f_4(x)$	4	3	4	1	2

Так как $f_4(-2) > f_4(-1)$, то на промежутке $(-\infty; -1]$ данная функция является убывающей, а так как $f(3) < f(4)$, то она возрастает на промежутке $[3; +\infty)$. Поэтому множеством значений данной функции является промежуток $[1; +\infty)$. Заметим, что по найденным значениям легко изобразить и график этой функции (рисунок).



5) Ответ: промежуток $[5; +\infty)$. Решение аналогично решению предыдущего задания.

Последняя серия задач связана с исследованием одной интересной функции. Первую из них вполне можно предложить учащимся для самостоятельного решения.

Задача 33. Найдите множество значений функции $f(x) = x + \dfrac{k}{x}$ (при различных $k \neq 0$).

Преобразовав уравнение $x+\dfrac{k}{x}=a$, получим квадратное уравнение $x^2-ax+k=0$, которое имеет решение, если $a^2-4k\geqslant 0$. Поэтому при $k<0$ уравнение имеет решение при всех a. Таким образом, если $k<0$, то множеством значений данной функции является вся числовая прямая.

Если $k>0$, то решение уравнения существует при $|a|\geqslant 2\sqrt{k}$. Таким образом, в этом случае множеством значений данной функции является объединение промежутков $(-\infty;-2\sqrt{k}\,]$ и $[2\sqrt{k}\,;+\infty)$.

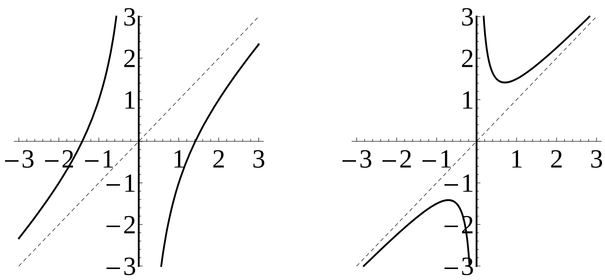
Полезно построить график этой функции, для чего решим следующую задачу.

Задача 34. Докажите, что:

а) при $k<0$ функция $f(x)=x+\dfrac{k}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$;

б) при $k>0$ эта функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-\sqrt{k}\,]$ и $[\sqrt{k}\,;+\infty)$, убывает на каждом из промежутков $[-\sqrt{k}\,;0)$ и $(0;\sqrt{k}\,]$.

Иллюстрация к утверждениям задачи — на следующих рисунках.



Утверждение пункта (а) очевидно, так как сумма возрастающих функций есть возрастающая функция.

б) Пусть $x_1<x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\frac{k}{x_2}-x_1-\frac{k}{x_1}=$$
$$=(x_2-x_1)\left(1-\frac{k}{x_1x_2}\right)=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-k)}{x_1x_2}.$$

Если $x_2\leqslant-\sqrt{k}$ или $x_1\geqslant\sqrt{k}$, то $x_1x_2>k>0$ и дробь положительна. Если $-\sqrt{k}\leqslant x_1<x_2<0$ или $0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{k}$, то $x_1x_2<k$ и дробь отрицательна.

Задачи для домашних заданий по теме 5

1. Пусть множеством значений функции f является отрезок $[-3;1]$. Найдите множество значений функции g, если:
1) $g(x)=2f(x)$; 2) $g(x)=2-f(x)$; 3) $g(x)=f(2x+1)$; 4) $g(x)=|f(x)|$.

2. Пусть $f(x)=x^2+2x+a$. Найдите те a, при которых множеством значений функции f будет промежуток $[-3;+\infty)$.

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2+2x+a=0$:
а) имеет решение на отрезке $[-2;1]$;
б) имеет единственное решение на этом отрезке.

4. Пусть $f(x)=ax+|x-2|$. Найдите, в зависимости от a, множество значений функции f.

5. Найдите множество значений функции:
а) $f_1(x)=2x+\sqrt{x-2}$; б) $f_2(x)=2x-\sqrt{x-2}$.

6. Найдите все значения a, при которых уравнение
а) $2x-\dfrac{5}{x}=a$; б) $2x^2-ax-5=0$ имеет решение на отрезке $[2;5]$.

7. Пусть $f(x)=|x|+a|x-2|$. а) Найдите те значения a, при которых множеством значений этой функции является отрезок. б) Постройте график данной функции при найденном значении a.

8. Найдите: а) множество значений функции $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$;
б) все значения a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет единственное решение.

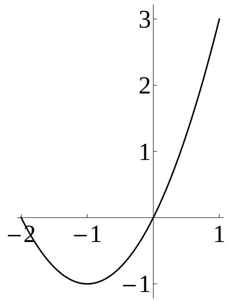
9. Найдите множество значений функции $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$.

Решения домашних задач по теме 5

1. 1) Поскольку число $f(x)$ есть произвольное число отрезка $[-3;1]$, то $2f(x)$ — вдвое большее число — есть произвольное число отрезка $[-6;2]$, который и является множеством значений функции g. 2) В этом случае множеством значений g является отрезок $[1;5]$. 3) Функция g имеет *то же самое* множество значений, что и функция f. 4) Ответ: отрезок $[0;3]$.

2. Наименьшим значением данной функции является $f(-1)=a-1$, поэтому множество ее значений есть промежуток $[a-1;+\infty)$, следовательно, $a-1=-3$, откуда $a=-2$.

3. Удобнее всего начать с построения дуги параболы $y=x^2+2x$ при $x\in[-2;1]$ (рисунок).



Таким образом, множеством значений квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2x$ на указанном отрезке является отрезок $[-1; 3]$.

а) Данное уравнение имеет решение, если число $-a$ входит в множество значений функции, т. е. если $-1 \leqslant -a \leqslant 3$, откуда $a \in [-3; 1]$.

б) Данное уравнение имеет единственное решение, если $-a = -1$ или $0 < -a \leqslant 3$, т. е. при $a \in \{1\} \cup [-3; 0)$.

4. Сравните предлагаемое решение с решением задачи 3 домашнего задания по теме 2.

Напишем, что

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 2 \text{ при } x \leqslant 2, \\ (a+1)x - 2 \text{ при } x \geqslant 2, \end{cases}$$

и рассмотрим несколько случаев. Если $a > 1$, то функция f возрастает на всей числовой прямой, при этом на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[2; +\infty)$ она линейна, а потому множеством ее значений будет вся числовая прямая. Если $a < -1$, то, наоборот, функция f убывает на всей прямой, но множеством ее значений также будет вся прямая.

Если же $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $a - 1 \leqslant 0$, а потому данная функция не возрастает на $(-\infty; 2]$, и $a + 1 \geqslant 0$, следовательно, эта функция не убывает на $[2; +\infty)$. Таким образом, значение $f(2) = 2a$ является наименьшим значением этой функции, поэтому ее множество значений есть промежуток $[2a; +\infty)$.

5. а) Поскольку функция f_1 возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ как сумма возрастающих функций и при этом очевидно принимает сколь угодно большие значения, то множеством ее значений являются все числа, не меньшие $f_1(2) = 4$, т. е. множеством значений данной функции является промежуток $[4; +\infty)$.

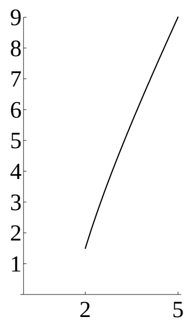
Конечно, возникает следующий вопрос. Хорошо, мы знаем, что все значения не меньше 4 и среди них есть сколь угодно большие числа.

Однако почему значениями являются *все* числа промежутка $[4;+\infty)$? Например, функция $[x]$ — целая часть числа — также имеет сколь угодно большие значения, но ясно, что множество ее значений не есть промежуток (поскольку состоит только из целых чисел). Ответ на поставленный вопрос связан с понятием *непрерывности функции*, которое будет введено в старших классах школы.

Есть и другой подход к решению данного пункта задачи, который как раз и придется применять при решении следующего ее пункта. Положим $t = \sqrt{x-2}$. Тогда $x = t^2 + 2$ и $2x + \sqrt{t-2} = 2t^2 + t + 4$. Если ввести функцию $g_1(t) = 2t^2 + t + 4$, то $f_1(x) = g_1(\sqrt{x-2}\,)$. Так как число $\sqrt{x-2}$ есть произвольное неотрицательное число, то множество значений функции f_1 есть множество значений функции g_1 на промежутке $[0;+\infty)$. Поскольку квадратичная функция g_1 возрастает на этом промежутке, то множеством ее значений и является промежуток $[4;+\infty)$.

б) Для функции $g_2(t) = 2t^2 - t + 4$ справедливо равенство $f_2(x) = g_2(\sqrt{x-2}\,)$. Поэтому множество значений функции f_2 совпадает с множеством значений функции g_2 на промежутке $[0;+\infty)$. Таким образом, ответ: промежуток $\left[\frac{31}{8}\,;+\infty\right)$.

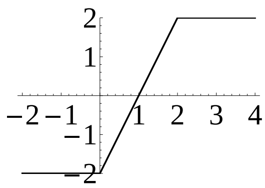
6. а) Как мы уже знаем, функция $f(x) = 2x - \frac{5}{x}$ возрастает на $[2;5]$, значит, множеством ее значений является промежуток $[f(2);f(5)] = \left[\frac{3}{2}\,;9\right]$. Значит, данное уравнение имеет решение при $a \in \left[\frac{3}{2}\,;9\right]$ (рисунок).



б) Ясно, что ответ тот же, что и для предыдущего пункта. Задание дано именно для того, чтобы учащиеся это осознали. Дело в том, что $x = 0$ ни при каком значении a не является решением уравнения пункта (б). Поэтому множества решений уравнений $2x^2 - ax - 5 = 0$ и $2x - \dfrac{5}{x} = a$ совпадают.

7. а) На промежутке $(-\infty; 0]$ данная функция задается формулой $f(x) = -(a+1)x + 2a$. Если коэффициент при x отличен от нуля, то множество ее значений на этом промежутке является неограниченным промежутком. Значит, a не может быть отличным от -1. Тогда, если $x \geqslant 2$, то $f(x) = (a+1)x - 2a = 2$. Таким образом, f постоянна на каждом из промежутков$(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$. Если же $0 \leqslant x \leqslant 2$, то $f(x) = 2x - 2$, поэтому множеством значений данной функции будет отрезок $[-2; 2]$.

б) График найденной функции хорошо известен (рисунок).



8. а) График данной функции учащиеся пока строить не умеют, поэтому действовать надо алгебраическим методом. Уравнение $\dfrac{2x}{x^2+1} = a$ имеет решение, если имеет решение уравнение $ax^2 - 2x + a = 0$. Если $a = 0$, то решением является $x = 0$. Если $a \neq 0$, то мы имеем квадратное уравнение, которое имеет решение, если $4 - 4a^2 \geqslant 0$, т. е. при $|a| \leqslant 1$. Таким образом, множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

б) При $a = 0$ уравнение также имеет единственное решение. Ответ: $a = -1; 0; 1$.

9. Областью определения этой функции является отрезок $[-1; 3]$. Однако она является суммой возрастающей и убывающей функции, поэтому трудно определить промежутки ее возрастания и убывания. Поскольку пока нет простой техники исследования подобных функций, эту задачу придется решать алгебраически.

Ясно, что уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = a$ имеет решение только при $a \geqslant 0$. Возведя в квадрат обе его части, получаем уравнение $2\sqrt{3 + 2x - x^2} = a^2 - 4$. Множеством неотрицательных значений квадратичной функции $f(x) = 3 + 2x - x^2$ является отрезок $[0; 4]$, поэтому уравнение имеет решение, если $0 \leqslant a^2 - 4 \leqslant 4$. Так как $a \geqslant 0$, то множество значений — отрезок $[2; 2\sqrt{2}\,]$.

Самостоятельная работа 3 (темы 4 и 5)

Вариант 1

1. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(7;8)$ и $B(8;6)$. б) Выясните, лежит ли точка $C(13;-3)$ на этой прямой, выше этой прямой или ниже нее.

2. Постройте график функции $f(x) = x+3|x+1|$ и найдите множество ее значений.

3. а) Постройте график функции $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ и найдите промежутки, на которых она возрастает или убывает. б) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет два решения.

4. Найдите множество значений функции:
а) $f_1(x) = \sqrt{x} - \dfrac{5}{x+1}$ на отрезке $[0;4]$; б) $f_2(x) = 2\sqrt{9 - |x+1|}$.

Вариант 2

1. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;5)$ и $B(5;3)$. б) Выясните, лежит ли точка $C(15;-18)$ на этой прямой, выше этой прямой или ниже нее.

2. Постройте график функции $f(x) = x+3|x-1|$ и найдите множество ее значений.

3. а) Постройте график функции $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ и найдите промежутки, на которых она возрастает или убывает. б) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет два решения.

4. Найдите множество значений функции:
а) $f_1(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{24}{x}$ на отрезке $[3;8]$; б) $f_2(x) = \sqrt{4 - 3|x-2|}$.

Вариант 3

1. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;1)$ и $B(3;3)$. б) Выясните, лежат ли точки $C(15;8)$ и $D(19;9)$ по одну или же по разные стороны от этой прямой.

2. а) Постройте график функции $f(x) = x + 3|x+1|$.
б) Найдите все a, при которых множеством значений функции $f(x) = ax + 3|x+1|$ не является вся числовая прямая.

3. Определите (в зависимости от a) число лежащих на отрезке $[-1;1]$ корней уравнения $2x - \dfrac{1}{x} = a$.

4. Найдите множество значений функции: а) $f_1(x) = 2\sqrt{8 - 2x - x^2}$;
б) $f_2(x) = 2\sqrt{x} - x$ на отрезке $[0;9]$.

Вариант 4

1. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;-1)$ и $B(3;3)$. б) Выясните, лежат ли точки $C(5;9)$ и $D(29;21)$ по одну или же по разные стороны от этой прямой.

2. а) Постройте график функции $f(x) = x + 3|x-1|$.
б) Найдите все a, при которых множеством значений функции $f(x) = ax + 3|x-1|$ является вся числовая прямая.

3. Определите (в зависимости от a) число лежащих на отрезке $[-2;2]$ корней уравнения $x - \frac{2}{x} = a$.

4. Найдите множество значений функции: а) $f_1(x) = \sqrt{6x - x^2 - 8}$;
б) $f_2(x) = 6\sqrt{x} - x$ на отрезке $[0;49]$.

Дополнительные упражнения по темам 4 и 5

3.1. Выясните, лежат ли на одной прямой точки с координатами: а) $(1;2)$, $(2;3)$ и $(0;0)$; б) $(1;2)$, $(2;3)$ и $(500;501)$.

3.2. Найдите значение a, при котором точки со следующими координатами лежат на одной прямой:
1) $(1;2)$, $(2;3)$ и $(0;a)$; 2) $(1;2)$, $(2;3)$ и $(a;0)$; 3) $(1;-1)$, $(3;3)$ и $(a;0)$; 4) $(1;-1)$, $(-1;5)$ и $(a;9)$.

3.3. Найдите все значения a, при которых следующее уравнение имеет ровно два решения:
1) $x^2 - 3x = a$; 2) $|x-1| + 1 = a$; 3) $|2x-3| = a$; 4) $|x^2 - x - 1| = a$; 5) $|x-2| - |x| = a$; 6) $|x-2| + |x-3| = a$.

3.4. Найдите множества значений функций:
1) $f_1(x) = x^2 + x$; 2) $f_2(x) = x^4 + x^2$; 3) $f_3(x) = x + \sqrt{x}$; 4) $f_4(x) = \frac{x+1}{x^2}$.

3.5. Известно, что множеством значений функции f является отрезок $[-1;2]$. Найдите множество значений функции g, если:
1) $g(x) = f(-x)$; 2) $g(x) = -f(x)$; 3) $g(x) = f(2x-3)$; 4) $g(x) = 2f(x) - 3$; 5) $g(x) = f^2(x)$; 6) $g(x) = f(x^2)$; 7) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

3.6. Найдите множества значений функций:
1) $f_1(x) = x^2 + 6x - 11$; 2) $f_2(x) = \sqrt{3x-1}$; 3) $f_3(x) = \frac{x+1}{x-2}$;
4) $f_4(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$; 5) $f_5(x) = \sqrt{6x - x^2 - 5}$.

Тема 6. Функциональный подход к решению уравнений

Основная цель этой темы состоит в том, чтобы подчеркнуть разницу между *алгебраическим* и *функциональным* подходами к решению уравнений.

Задача 35. Решите уравнения: а) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$; б) $x^5 + 5x - 6 = 0$.

а) Одним из общих методов решения уравнений является *разложение на множители*. В данном случае прежде всего стоит написать, что $x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^4 - 5x^2 + 4)$. Поскольку произведение чисел равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю, то $x = 0$ или $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. В полученном уравнении естественно сделать замену $t = x^2$, в результате чего мы получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$. Так как его корнями являются 1 и 4, то $t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$, поэтому

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2),$$

следовательно, решениями уравнения $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ являются числа ± 1 и ± 2. Поэтому данное уравнение имеет пять корней: $-2, -1, 0, 1, 2$.

б) Конечно, одним из корней этого уравнения является 1. Можно так же, как и при решении предыдущего уравнения, произвести разложение на множители. А именно,

$$\begin{aligned} x^5 + 5x - 6 &= x^5 - x + 6x - 6 = x(x^4 - 1) + 6(x-1) = \\ &= x(x-1)(x+1)(x^2+1) + 6(x-1) = (x-1)(x(x+1)(x^2+1) + 6) = \\ &= (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 6). \end{aligned}$$

Однако как найти решения уравнения $x^4 + x^3 + x^2 + x + 6 = 0$? И есть ли они вообще? (Конечно, нетрудно доказать, что их нет...)

Было бы естественнее с самого начала рассуждать иначе. Поскольку, как мы уже знаем, функции $y = x^5$ и $y = 5x - 6$ возрастают на всей числовой прямой, то и функция $f(x) = x^5 + 5x - 6$ является возрастающей. Следовательно, поскольку $f(1) = 0$, то $f(x) > f(1) = 0$ при всех $x > 1$ и $f(x) < 0$ при всех $x < 1$. Поэтому других корней, кроме $x = 1$, данное уравнение не имеет.

Следующая задача по формулировке почти не отличается от предыдущей, но имеет совсем другой характер. Подобные задачи необходимо предлагать учащимся, которые привыкли, что «любое уравнение можно решить».

Задача 36. Решите уравнения: а) $x^5+5x-5=0$; б) $x^5+5x-0{,}01=0$.

а) Никакие «стандартные школьные» методы не помогут решить данное уравнение. Более того, никакие методы «высшей математики» также не приведут к успеху. Дело в том, что решить это уравнение так, как это понимают в школе, просто невозможно. Подобная ситуация вполне типична для уравнений, возникающих, например, у инженеров или же экономистов при решении технических или же экономических задач.

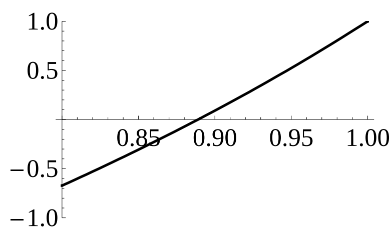
Поэтому сами задания следует формулировать иначе, например, следующим образом:

1) Докажите, что данное уравнение имеет не более одного решения.

2) Докажите, что решение этого уравнения существует и лежит в промежутке $(0{,}8\,;1)$.

1) Так как функция $f(x)=x^5+5x-5$ является возрастающей, то двух и более корней это уравнение иметь не может.

2) Рассмотрим многочлен $p(x)=x^5+5x-5$. Его значение при $x=1$ равно 1. С другой стороны, $p\left(\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^5-1<0$. Следовательно, на промежутке $(0{,}8\,;1)$ этот многочлен где-то обратится в нуль (рисунок).



А найти корень этого многочлена — это совсем другая задача. Никакой «формулы» для корня быть не может, и найти его можно только приближенно. Метод, при помощи которого можно достаточно быстро найти хорошее приближение, изучается в старших классах школы (или уже в курсе «высшей математики» в вузе). Его идея связана с решением второго задания, поэтому просто приведем ответ: $x\approx 0,888966$.

б) Значение левой части данного уравнения при $x=0$ отрицательно, ее значение при $x=0,002$ — положительно. Те же соображения, которые были применены при решении предыдущего уравнения, показывают, что рассматриваемое уравнение имеет единственный корень, лежащий на промежутке $(0;0,002)$. Кстати, можно было рассуждать чуть иначе. Если a — это корень уравнения, то из его положительности следует, что $5a<a^5+5a=0,01$, поэтому $a<0,002$. Однако если $a < 0,002$, то число $a^5 < 2^5 \cdot 10^{-15} < 10^{-13}$, поэтому искомый корень «очень близок» к числу $0,002$. Подчеркнем еще раз, что он задается *бесконечной десятичной дробью*, полностью выписать которую невозможно. Перед вами ее первые 42 знака после запятой:

`0.001999999999993600000000102399999997706240`

Задачи для домашних заданий по теме 6

1. Найдите все такие значения a, что при любом b уравнение $ax+b = |x|$ имеет решение.

2. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$: а) больше 1, а другой меньше 1; б) больше 3, а другой меньше 1.

3. Докажите, что если $a(a-b+c) < 0$, то уравнение $ax^2+bx+c = 0$ имеет два различных корня. Выясните, верно ли обратное утверждение.

4. Решите уравнение $x^5 + x + a^5 + a = 0$.

5. а) Определите (двумя способами) число решений уравнения

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = a$$

в зависимости от значения a.
б) Определите число решений уравнения

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} = a$$

в зависимости от значения a.

6. Решите уравнения:
а) $\sqrt{2x-1} + x^2 = 2$; б) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 19 - 6x - x^2$.

7. а) Докажите, что уравнение $x^3 - 2x + 2 = 0$ имеет отрицательное решение и не имеет положительных решений. б) Определите (в зависимости от значения параметра a) число решений уравнения $x^3 - ax + 2 = 0$.

Решения домашних задач по теме 6

1. Естественно переписать данное уравнение в виде $|x| - ax = b$ и ввести в рассмотрение функцию $f(x) = |x| - ax$. Теперь формулировка задачи выглядит другим, более естественным, образом: найдите все значения a, при которых множеством значений функции f является вся числовая прямая.

На каждом из лучей $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ данная функция является линейной, поэтому множество ее значений на каждом из них также является одним из двух этих же лучей (либо точкой). Если эта функция не является (строго) монотонной, то множеством ее значений будет либо луч $(-\infty; 0]$, либо луч $[0; +\infty)$. Поскольку

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)x, & x \geqslant 0, \\ -(1+a)x, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

то коэффициенты $(1-a)$ и $-(1+a)$ должны иметь одинаковые знаки. Таким образом, $-(1+a)(1-a) = a^2 - 1 > 0$, откуда и следует ответ: $|a| > 1$.

2. а) Положим $f(x) = x^2 + ax + 1$. Ясно, что если $f(1) < 0$, то парабола, являющаяся графиком данной функции, пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых лежит левее единицы, тогда как другая — правее ее. Ясно также, что условие $f(1) < 0$ является не только достаточным, но и необходимым. Действительно, если $x_1 < 1 < x_2$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то дуга параболы между точками ее пересечения с осью абсцисс лежит ниже этой оси, в частности, точка графика с абциссой 1 лежит ниже оси абсцисс. Это и означает, что $f(1) < 0$. Подставив $x = 1$, получим, что $a + 2 < 0$, т. е. $a < -2$.

б) Рассуждение аналогично предущему. Один из корней будет больше 3, а другой меньше 1, если являются отрицательными значения функции f в точках 1 и 3. Таким образом, число a должно быть решением системы неравенств $\begin{cases} a + 2 < 0, \\ 3a + 10 < 0, \end{cases}$ из которой получим, что $a < -\dfrac{10}{3}$.

3. Конечно, эту задачу можно решать алгебраически. Вычислив дискриминант и переписав данное условие на коэффициенты в виде $-ac > a^2 - ab$, получим, что

$$D = b^2 - 4ac > b^2 - 4ab + 4a^2 = (b - 2a)^2 \geqslant 0,$$

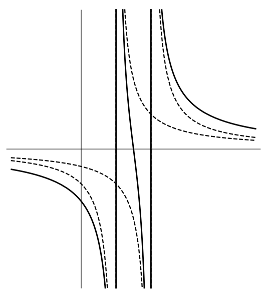
значит, уравнение имеет два различных корня. Однако при этом методе не вполне ясно, как отвечать на второй вопрос задачи.

Поэтому положим $f(x) = ax^2 + bx + c$. Данное условие имеет вид $af(-1) < 0$. Ясно, что это условие не является необходимым. Например, можно взять уравнение $x^2 - 2x = 0$.

4. Функция $f(x) = x^5 + x + a^5 + a$ — возрастающая, поэтому она имеет не более одного корня, которым, очевидно, является $x = -a$.

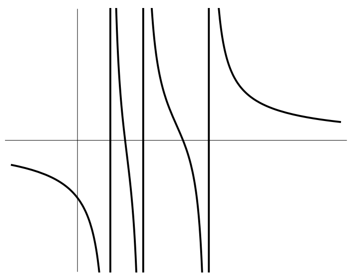
5. а) Избавившись от знаменателей, получим уравнение $2x - 3 = a(x^2 - 3x + 2)$. Заметим, что числа 1 и 2 не являются решениями полученного уравнения ни при каком значении числа a. Перепишем это уравнение в виде $ax^2 - (3a + 2)x + 2a + 3 = 0$. При $a = 0$ оно имеет единственное решение $x = \dfrac{3}{2}$. Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным, поэтому для определения числа его решений вычислим его дискриминант. Так как $D = (3a + 2)^2 - 4a(2a + 3) = a^2 + 4 > 0$, то это уравнение имеет два решения при любом $a \neq 0$.

Теперь будем рассуждать совсем иначе. Поскольку функция $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$, а функция $f_2(x) = \dfrac{1}{x-2}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$, то их сумма $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$. На первом из них значения $f(x)$ отрицательны, на последнем — положительны. При этом для достаточно больших по модулю x значение $f(x)$ самой данной функции является малым, а если аргумент x достаточно близок к 1 или 2, то значение $f(x)$ функции, наоборот, по модулю является очень большим. Таким образом, график функции f имеет следующий вид (пунктиром на этом рисунке изображены гиперболы $y = \dfrac{1}{x-1}$ и $y = \dfrac{1}{x-2}$).



Из этого графика ясно, что данное уравнение имеет один корень при $a = 0$ и два корня при всех $a \neq 0$.

б) В данном случае рассуждать «алгебраически» не удастся, хотя в принципе для кубических уравнений имеются алгебраические критерии определения числа его корней. Поэтому применим функциональный подход. Рассуждение вполне аналогично второму решению предыдущего задания. Положим $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-4}$. Поскольку выражение $\dfrac{1}{x-1}$ определяет функцию, убывающую на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$, и аналогичными свойствами обладают два других выражения, то функция f убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 4)$ и $(4; +\infty)$. Если число $|x|$ велико, то значение $f(x)$ самой данной функции является малым, а если x достаточно близко к 1, 2 или 4, то значение $f(x)$, наоборот, по модулю является очень большим. Таким образом, график функции f имеет следующий вид (рисунок). Из построенного графика очевиден ответ: данное уравнение имеет два корня при $a = 0$, при всех остальных значениях a оно имеет три корня.



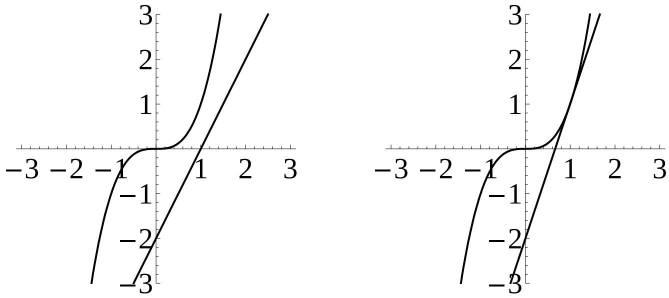
6. а) Областью определения данного уравнения является промежуток $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Поскольку выражение, стоящее в левой части этого уравнения, определяет функцию, возрастающую на своей области определения, то более одного решения данное уравнение не имеет. Осталось заметить, что число $x = 1$ является его решением.

б) Ответ: $x = 2$; рассуждение аналогично только что проведенному.

7. Первое задание будем решать алгебраически, с тем чтобы при решении второго из них увидеть, насколько проще было бы рассуждать, используя функциональный подход.

а) Пусть $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Так как $f(-2) = -2$, а $f(-1) = 3$, то на промежутке $(-2; -1)$ функция f обратится в нуль. Теперь предположим, что $x \geqslant 0$. Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $x^3 - 2x + 2 = x^3 + 2(1-x) > 0$, значит, на промежутке $[0; 1]$ данное уравнение корней не имеет. Если $1 < x \leqslant 2$, то $x^3 - 2x + 2 = x^3 - x + 2 - x > 0$, следовательно, и на этом промежутке корней нет. Наконец, если $x > 2$, то $x^3 - 2x + 2 > 4x - 2x + 2 = 2x + 2 > 0$.

Можно было построить также график кубической функции и прямую $y = 2x - 2$ (левый рисунок). Очевидно ли вам, что они имеют единственную точку пересечения? И как это *доказать*? Как любят говорить авторы этой книги: «Очевидно то, что очень легко доказать. Так давайте очень легко и докажите». А сможете ли вы определить по графикам число точек пересечения графика кубической функции и прямой $y = 3{,}01x - 2$ (правый рисунок)? Не говоря уже о том, что трудно изобразить эту прямую без использования компьютера. И трудно *доказать*, что корень — единственный. При этом найти его можно только приближенно, $x \approx -1{,}76929$ (естественно, он был найден с помощью компьютера).



б) Поскольку число $x = 0$ ни при каком a не является решением данного уравнения, то все, что надо сделать, — это переписать данное уравнение в виде $x^2 + \dfrac{2}{x} = a$ с тем, чтобы считать ответ с графика, построенного при решении задачи 27 темы 4. Ответ: данное уравнение имеет одно решение при $a < 3$, два решения при $a = 3$ и три решения при $a > 3$. Эта задача тем более интересна, что никаких формул для корней кубического уравнения у нас нет (и не будет).

Тема 7. «Сложные» функции

Мы начнем наше изложение со следующей задачи.

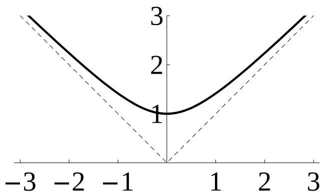
Задача 37. Изобразите графики функций:
1) $f_1(x) = \sqrt{x^2+1}$; 2) $f_2(x) = \sqrt{x^2-1}$; 3) $f_3(x) = \sqrt{9-x^2}$.

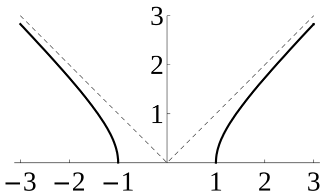
1) Областью определения функции f_1 является вся числовая прямая. Квадратичная функция $y = x^2 + 1$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Поэтому, если, например, $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$. Поскольку, как это было установлено, квадратный корень является возрастающей функцией, то и

$f_1(x_1) = \sqrt{x_1^2+1} > \sqrt{x_2^2+1} = f_1(x_2)$. Таким образом, и функция f_1 убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Аналогичным образом доказывается, что эта функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Для того чтобы точнее изобразить ее график, используем следующее дополнительное соображение. Ясно, что $f_1(x) > \sqrt{x^2} = |x|$. При этом

$$f_1(x) - |x| = \sqrt{x^2+1} - |x| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+|x|} < \frac{1}{2|x|}\,,$$

следовательно, разность $f_1(x) - |x|$ при больших по модулю значениях аргумента является малым числом. Поэтому при больших (по модулю) x график данной функции близок к графику модуля. Эскиз этого графика изображен на левом рисунке.

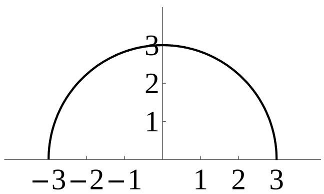




В действительности этот график представляет собой половину гиперболы $y = \dfrac{1}{2x}$, повернутую на угол 45°.

2) На правом рисунке изображен график функции f_2. В отличие от первой функции, областью определения функции f_2 является объединение промежутков $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$. А исследование ее поведения проводится в точности так же, как в первом пункте. Сам этот график состоит из дуг той же самой гиперболы.

3) Функция f_3 определена на отрезке $[-3; 3]$, возрастает на его левой половине и убывает на правой половине этого отрезка. Ее график изображен на следующем рисунке.



Как будет показано в теме 10, этот график есть полуокружность радиуса 3.

При больших значениях аргумента x графики функций f_1 и f_2 располагались вблизи прямых $y = x$ и $y = -x$. Эти прямые называются *асимптотами* этих графиков. Точное определение асимптоты будет дано в старших классах школы. Пока мы ограничимся следующим неформальным определением. Асимпто́той графика функции называется прямая, к которой приближается этот график при возрастании (по модулю) аргумента функции или значений этой функции. Например, асимптотами графика $y = \dfrac{k}{x}$ являются оси координат, асимптотами графика $y = ax + \dfrac{b}{x}$ являются прямая $y = ax$ и ось ординат.

Графики всех трех функций из задачи 37 обладали еще следующим свойством: для каждого из них ось ординат есть ось симметрии этого графика. В связи с этим наблюдением введем следующее определение.

Функция f называется *четной*, если для всякого значения x ее области определения число $-x$ также лежит в области определения этой функции и при этом справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Ясно, что функции f_1, f_2, f_3 задачи 37 являются четными.

Задача 38. Докажите, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Пусть точка $M(a; b)$ лежит на графике функции f, значит, $b = f(a)$. Координатами точки M', симметричной точке M относительно оси ординат, является пара $(-a, b)$. Поскольку $f(-a) = f(a) = b$, то и точка M' лежит на графике данной функции.

Уместно сейчас ввести еще одно определение. Функция f называется *нечетной*, если для всякого значения x ее области определения число $-x$ также лежит в области определения этой функции и при этом справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. О свойстве графиков нечетных функций пойдет речь в одной из домашних задач.

Задача 39. Приведите примеры нечетных функций.

Например, это линейная однородная функция $y = kx$, обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$, кубическая функция $y = ax^3$.

Задача 40. Пусть функция f является четной и возрастает (или убывает) на отрезке $[a; b]$. Тогда: а) числа a и b не могут иметь противоположные знаки; б) функция f убывает (соответственно, возрастает) на отрезке $[-b; -a]$.

а) Предположим, что $a < 0 < b$. Выберем число $c > 0$ так, чтобы $a < -c < c < b$. Поскольку функция f по условию является возрастающей, то $f(-c) < f(c)$, что противоречит четности этой функции.

б) Предположим, что на отрезке $[a;b]$ функция является возрастающей. Если $-b \leqslant x_1 < x_2 \leqslant -a$, то $a \leqslant -x_2 < -x_1 \leqslant b$, поэтому $f(x_2) = f(-x_2) < f(-x_1) = f(x_1)$. Это и означает, что на отрезке $[-b;-a]$ рассматриваемая функция является убывающей.

В который раз в этой главе появляются выражения вида $f(g(x))$. Пора ввести «правильную» терминологию. В школе подобные выражения называют «сложными функциями». В математике используется иная терминология. Если $h(x) = f(g(x))$, то функция h называется *композицией* функций g и f.

Конечно, *область определения композиции* не может быть больше, чем область определения ее внутренней функции g. Но она может быть меньше, так как для того, чтобы значение $f(g(x))$ было определено, нужно еще, чтобы значение $g(x)$ принадлежало области определения функции f. В задаче 37 $f(x) = \sqrt{x}$, $g_1(x) = x^2 + 1$, $g_2(x) = x^2 - 1$ и $g_3(x) = 9 - x^2$. Если областью определения функции $f_1(x) = f(g_1(x))$ является вся числовая прямая, то областью определения функции f_2 является объединение промежутков $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, а областью определения функции f_3 — отрезок $[-3;3]$. С другой стороны, если $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$, то, конечно, $f(g(x)) = x$, однако областью определения данной композиции является промежуток $[0;+\infty)$. Поэтому $f(g(x)) = x$ при $x \geqslant 0$.

Докажем первую теорему о свойствах композиций функций.

Теорема 7.1. Множеством значений композиции функций g и f является множество значений функции f на множестве значений функции g.

Замечание. Отметим, что в формулировке теоремы предполагается, что композиция функций g и f определена. Если, например, мы рассматриваем функцию $h(x) = \sqrt{4x - x^2}$, то она является композицией функции $g(x) = 4x - x^2$ с областью определения $[0;4]$ и функции $f(x) = \sqrt{x}$ с естественной областью определения — промежутком $[0;+\infty)$.

Собственно говоря, доказывать здесь нечего. Число a является значением функции h, где $h(x) = f(g(x))$, если найдется число x, такое что $f(g(x)) = a$. Таким образом, a есть значение функции f в точке $g(x)$, принадлежащей множеству значений функции g.

По сути дела, мы уже неоднократно использовали утверждение этой теоремы.

Задача 41. Найдите множество значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Вместо того чтобы исследовать сводящееся к квадратному уравнение $f(x) = a$, сведем задачу к известной. Действительно,

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 = g(x-1) + 1,$$

где $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Поскольку множество значений функции g хорошо известно, им является объединение промежутков $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$, то множеством значений данной функции является объединение промежутков $(-\infty; -1]$ и $[3; +\infty)$.

Для закрепления понятия композиции функций решим несколько упражнений.

Задача 42. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ и $g(x) = \sqrt{x}$. Задайте формулами композиции функций: а) f и g; б) g и f.

а) Имеем $h_1(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

б) Имеем $h_2(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}\,) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$.

Задача 43. Пусть $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ и $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Представьте в виде их композиций функции: а) $p(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; б) $q(x) = \bigl(\dfrac{2}{x} + 1\bigr)^2$.

а) Имеем $p(x) = h\bigl((2x+1)^2\bigr) = h\bigl(g(2x+1)\bigr) = h(g(f(x)))$.

б) Имеем $q(x) = g\bigl(\dfrac{2}{x} + 1\bigr) = g\bigl(2h(x) + 1\bigr) = g(f(h(x)))$.

Задача 44. Пусть

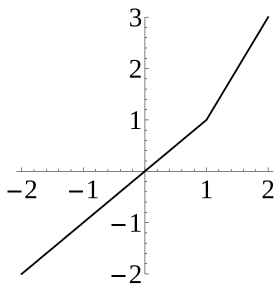
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ при } x \leqslant 2, \\ x - 1 \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$$

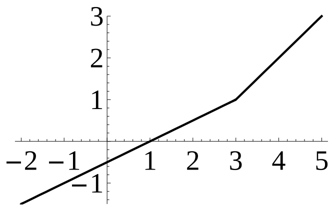
Задайте формулами и постройте графики функций:
а) $f(2x)$; б) $f(x-1)$; в) $f(f(x))$.

Заметим прежде всего, что при $x = 2$ оба выражения, $\dfrac{x}{2}$ и $x - 1$, равны 1, поэтому можно было в определении данной функции писать нестрогие неравенства.

а) Имеем $f(2x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{2} \text{ при } 2x \leqslant 2, \\ 2x - 1 \text{ при } 2x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} x \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2x - 1 \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$

График — на левом рисунке.





б) Имеем $f(x-1) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} \text{ при } x \leqslant 3, \\ x-2 \text{ при } x \geqslant 3. \end{cases}$ График — на правом рисунке.

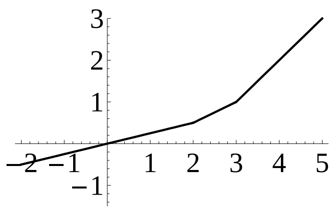
в) Имеем $f(f(x)) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{2} \text{ при } f(x) \leqslant 2, \\ f(x)-1 \text{ при } f(x) \geqslant 2. \end{cases}$ Решением неравенства $f(x) \leqslant 2$ является промежуток $(-\infty; 3]$, поэтому

$$\frac{f(x)}{2} = \begin{cases} \dfrac{x}{4} \text{ при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-1}{2} \text{ при } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

При $x \geqslant 3$ верно неравенство $f(x) \geqslant 2$, поэтому при этих значениях аргумента $f(f(x)) = x - 2$. В результате получаем, что

$$f(f(x)) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} \text{ при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-1}{2} \text{ при } 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ x-2 \text{ при } x \geqslant 3. \end{cases}$$

График — на рисунке.



Задачи для домашних заданий по теме 7

1. Пусть функция f является нечетной. Выясните, что можно утверждать о функции $g(x) = |f(x)|$.

2. Докажите, что: а) композиция двух нечетных функций является нечетной функцией; б) композиция четной и произвольной функций является четной функцией; в) композиция нечетной и четной функций является четной функцией.

3. Докажите, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

4. Известно, что $f(x) = |x - 1| - 1$ при всех $x \geqslant 0$. Изобразите график этой функции, если дополнительно известно, что она является: а) четной; б) нечетной.

5. Напишите явную формулу для функции, являющейся ответом к пункту (б) предыдущей задачи.

6. а) Докажите, что для произвольной функции f функция $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ является четной, а функция $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ — нечетной. б) Докажите, что всякая функция, область определения которой симметрична относительно нуля, может быть представлена как сумма четной и нечетной функций.

7. Предположим, что функция f является четной либо нечетной и уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень. а) Найдите сумму всех корней этого уравнения. б) Найдите произведение всех корней этого уравнения, если известно, что их число нечетно.

8. Пусть $f(x) = 2x + 1$. Найдите все линейные функции g, такие, что $f(g(x)) = g(f(x))$.

9. а) Найдите все линейные функции f, такие, что $f(f(x)) = f(x)$. б) Выясните, существует ли нелинейная функция f, такая, что $f(f(x)) = f(x)$.

10. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = |3x + 15| + a|x - 5|$ является четной.

11. Выясните, существует ли функция f, такая, что:
а) $f(\cos x) = \sin 10x$; б) $f(\sin x) = \sin 10x$.

Решения домашних задач по теме 7

1. Так как $g(-x) = |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)| = g(x)$, то g — четная функция.

2. Пусть $h(x) = f(g(x))$.
а) Если f и g — нечетные функции, то

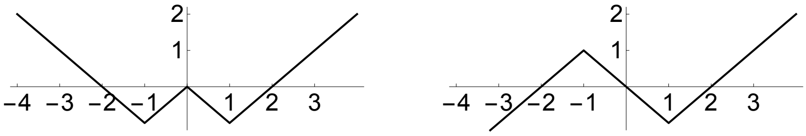
$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -h(x).$$

б) Если функция g четна, то $h(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = h(x)$.
в) Если функция g нечетна, а функция f четна, то

$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x).$$

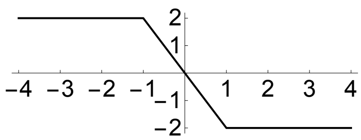
3. Координатами точки M', симметричной точке $M(a;b)$ относительно начала координат, является пара $(-a;-b)$. Если точка M лежит на графике нечетной функции f, то $b = f(a)$. Число $-a$ лежит в области определения функции f, и $f(-a) = -f(a) = -b$, откуда и следует, что точка M' лежит на графике функции f.

4. Ответы — на рисунках.



а) б)

5. Вспомним вначале график нечетной функции $g(x) = |x-1| - |x+1|$ (рисунок).



Тогда график функции $g(x) + x$ будет иметь искомый вид.

6. а) Утверждение следует из равенств:

$$f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x) \text{ и } f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x).$$

б) Ясно, что $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Осталось сослаться на утверждение предыдущего пункта.

7. а) Если число a есть корень этого уравнения, то и число $-a$ является его корнем. Поэтому множество всех корней разбивается на пары противоположных чисел и, возможно, содержит нуль. Следовательно, сумма всех корней данного уравнения равна нулю.

б) Если данное уравнение имеет нечетное число корней, то среди них есть нуль, поэтому произведение всех корней равно нулю.

8. Если $g(x) = ax + b$, то $f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(ax + b) + 1 = 2ax + 2b + 1$, а $g(f(x)) = a(2x + 1) + b = 2ax + a + b$. По условию $2ax + 2b + 1 = 2ax + a + b$, откуда $b = a - 1$. Таким образом, $g(x) = ax + a - 1 = a(x + 1) - 1$.

9. а) Пусть $f(x) = ax+b$. Тогда $f(f(x)) = a(ax+b)+b = a^2x+ab+b = ax + b$, если $a^2 = a$ и $ab = 0$. Таким образом, либо $a = 0$ и число b — произвольное, либо $a = 1$ и $b = 0$.

б) Изначально кажется, что ответ — отрицательный, поскольку из того, что $f(f(x)) = f(x)$, следует, что $f(a) = a$. Однако это равенство имеет место только для a, лежащих в множестве значений функции f. Поэтому искомая функция существует, например, это следующая функция.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x \leqslant -1, \\ x \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

10. По условию $|3x+15|+a|x-5| = |15-3x|+a|-x-5|$. Подставив в это равенство $x = 1$, получим, что $18 + 4a = 12 + 6a$, откуда $a = 3$. Действительно, если $a = 3$, то $f(-x) = |-3x + 15| + 3|-x - 5| = 3|x + 5| + 3|x - 5| = f(x)$, поэтому $f(x)$ — четная функция.

11. а) Нет, не существует, поскольку функция $f(\cos x)$ является четной, тогда как $\sin 10x$ — нечетная функция.

б) Нет, не существует. Сведем этот пункт к предыдущему, подставив в данное равенство $\frac{\pi}{2} - x$ вместо x: $f\big(\sin\big(\frac{\pi}{2} - x\big)\big) = f(\cos x)$, а $\sin 10\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \sin(5\pi - 10x) = \sin 10x$.

Тема 8. Исследование «сложных» функций и построение их графиков

Когда мы говорим об «исследовании функции», то, прежде всего, имеем в виду поиск промежутков, на которых изучаемая функция является монотонной (т. е. возрастающей или убывающей). Мы начнем с того, что проанализируем, каким же методом мы пользовались при исследовании функций из задачи 37 предыдущей темы на возрастание и убывание. Идея состояла в том, что, поскольку квадратный корень является возрастающей функцией, то из неравенства $g(x_1) > g(x_2)$ следует, что $\sqrt{g(x_1)} > \sqrt{g(x_2)}$. Таким образом, если функция g возрастает (или убывает) на некотором промежутке и при этом все ее значения на этом промежутке являются неотрицательными, то и функция $\sqrt{g}$ на этом промежутке является возрастающей (соответственно, убывающей).

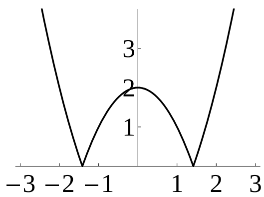
Конечно, аналогичным образом устанавливается и общее утверждение.

Теорема 8.1. Пусть $h(x) = f(g(x))$. Если функции f и g имеют одинаковый характер монотонности (т. е. обе являются возрастающими либо убывающими), то функция h является возрастающей. Если же из функций f и g одна является возрастающей, а другая — убывающей, то функция h является убывающей.

Предположим, что f и g возрастают. Тогда, если $x_1 > x_2$, то $g(x_1) > g(x_2)$, значит, и $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$, таким образом, h — возрастающая функция. Если f и g убывают, то из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $g(x_1) < g(x_2)$, из которого, в свою очередь, следует неравенство $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$. Таким образом, и в этом случае h — возрастающая функция.

Теперь пусть функция f возрастает, а функция g убывает. Тогда, если $x_1 > x_2$, то $g(x_1) < g(x_2)$, следовательно, $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$. Таким образом, функция h — убывающая. Аналогичное рассуждение показывает, что если f убывает, а g возрастает, то функция h также является убывающей.

Следствие. Если функция f является возрастающей или убывающей на всей своей области определения, то промежутки, на которых функция $h(x) = f(g(x))$ является монотонной, совпадают с промежутками, на которых монотонна функция g (конечно, при условии, что множество значений функции g на соответствующем промежутке лежит в области определения функции f).



В случае когда функция f не является монотонной, ситуация является более запутанной. На рисунке выше изображен график функции

$y = |x^2 - 2|$. Если $f(x) = |x-2|$ и $g(x) = x^2$, то $h(x) = f(g(x)) = |x^2-2|$. Функция f убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и возрастает на промежутке $[2; +\infty)$, функция g убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Промежутки возрастания и убывания функции h видны по графику этой функции, строить который мы уже умеем. Однако нетрудно установить и более общее утверждение.

Задача 45. Пусть функция f убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и возрастает на промежутке $[2; +\infty)$. Найдите промежутки возрастания и убывания функций: а) $h_1(x) = f(x-1)$; б) $h_2(x) = f(2-2x)$; в) $h_3(x) = f(x^2)$.

а) Функция h_1 убывает на промежутке $(-\infty; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; +\infty)$. Действительно, если $x_1 < x_2 \leqslant 3$, то $x_1 - 1 < x_2 - 1 \leqslant 2$, поэтому $h_1(x_1) = f(x_1-1) > f(x_2-1) = h_1(x_2)$. Если же $3 \leqslant x_1 < x_2$, то $2 \leqslant x_1 - 1 < x_2 - 1$, а потому $h_1(x_1) < h_1(x_2)$.

Поясним, откуда взялось число 3. Положим, например, $x = -5$. При увеличении числа x значение $h_1(x) = f(x-1)$ будет убывать, пока аргумент функции f — число $x-1$ — не станет равным 2; при дальнейшем увеличении x значение $h_1(x)$ уже будет возрастать.

б) Ответ: функция h_2 убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

в) Пусть $x_1 < x_2 \leqslant -\sqrt{2}$. Тогда $x_1^2 > x_2^2 \geqslant 2$, поэтому $h_3(x_1) = f(x_1^2) > f(x_2^2) = h_3(x_2)$. Таким образом, функция h_3 убывает на промежутке $(-\infty; -\sqrt{2}\,]$.

Если $-\sqrt{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $x_2^2 < x_1^2 \leqslant 2$, поэтому $h_3(x_2) = f(x_2^2) > f(x_1^2) = h_3(x_1)$, следовательно, функция h_3 возрастает на отрезке $[-\sqrt{2}\,; 0]$.

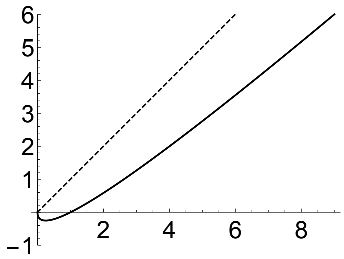
Аналогичным образом доказывается, что на отрезке $[0; \sqrt{2}\,]$ функция h_3 убывает, а на промежутке $[\sqrt{2}\,; +\infty)$ — возрастает. С другой стороны, это следует из того, что функция h_3 является четной.

Задача 46. Постройте график функции $f(x) = x - \sqrt{x}$.

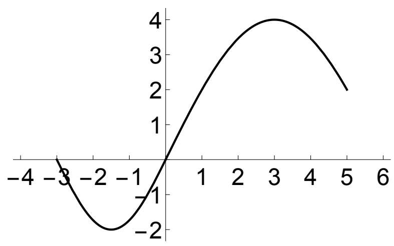
Областью определения данной функции является луч $[0; +\infty)$. Если через $g(x)$ обозначить квадратный трехчлен $x^2 - x$, то справедливо равенство $f(x) = g(\sqrt{x}\,)$. Мы представили данную функцию в виде композиции стандартных функций.

Поскольку квадратный корень является функцией, возрастающей на своей области определения, а квадратичная функция $g(x)$ убывает на луче $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ и возрастает на луче $\left[\frac{1}{2}\,; +\infty\right)$, то функция $f(x)$ убывает на множестве, заданном неравенством $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, и, соответственно, возрастает на луче $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. При этом $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$. Ясно, что $f(x) = 0$ при $x = 0; 1$, тем самым мы нашли точки пересечения графика с осью абсцисс.

Осталось заметить, что поскольку $x - \sqrt{x} < x$, то искомый график лежит ниже прямой $y = x$. Более того, расстояние по вертикали от точки графика до этой прямой неограниченно растет. С другой стороны, этот график пересекает всякую прямую $y = ax$, где $0 < a < 1$, при некотором $x > 0$. Ответ — на рисунке.

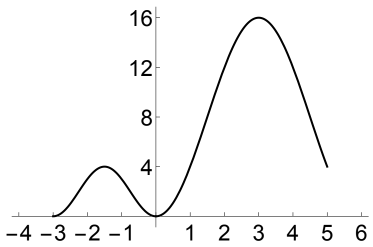


Задача 47. На следующем рисунке изображен график функции $f(x)$.

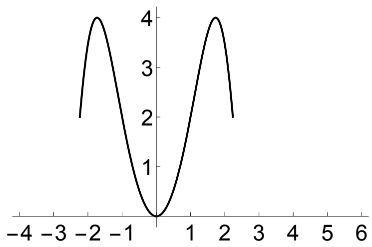


Нарисуйте графики функций: 1) $g_1(x) = f^2(x)$; 2) $g_2(x) = f(x^2)$; 3) $g_3(x) = f(\sqrt{x}\,)$; 4) $g_4(x) = \sqrt{f(x)}$; 5) $g_5(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

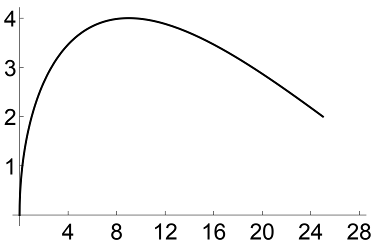
Ответы приведены на следующей странице. Для того чтобы графики «лучше читались», в каждом из них выбран свой масштаб на осях координат.



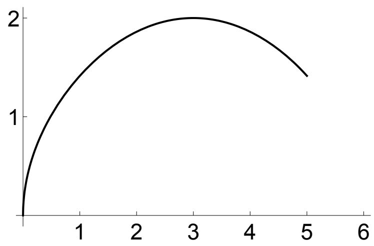
(1)



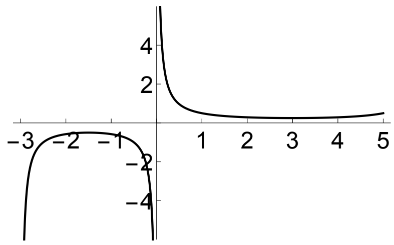
(2)



(3)



(4)



(5)

Рассмотрим теперь многочлен четвертой степени

$$p(x) = x(x-1)^2(x-2).$$

Задача 48. Найдите множество значений многочлена $p(x)$.

Поскольку $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, то, положив $g(x) = x^2 - 2x$, получим, что $p(x) = g(x)(g(x)+1)$. Поэтому, если $f(x) = x^2 + x$, то в результате получим, что $p(x) = f(g(x))$. Множество значений квадратичной функции g — промежуток $[-1; +\infty)$. Поскольку число $-\dfrac{1}{2}$ лежит на нем, то множество значений квадратичной функции f на

$[-1;+\infty)$ — это промежуток $\bigl[-\frac{1}{4}\,;+\infty\bigr)$, который, тем самым, и является множеством значений многочлена p.

Возможно, что более естественным было бы иное представление многочлена p как «сложной» функции.

Задача 49. Найдите многочлен $q(x)$, такой, что $p(x) = q(x-1)$.

Поскольку

$$p(x) = (x-1)^2(x^2-2x) = (x-1)^2\bigl((x-1)^2-1\bigr) = (x-1)^4-(x-1)^2,$$

то $q(x) = x^4 - x^2$.

Задача 50. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи для поиска множества значений многочлена $p(x)$.

Множества значений многочленов p и q совпадают. Положим $f(x) = x^2 - x$. Поскольку $q(x) = f(x^2)$, то множеством значений многочлена q является множество значений квадратичного многочлена f на промежутке $[0;+\infty)$, которым является промежуток $\bigl[-\frac{1}{4}\,;+\infty\bigr)$.

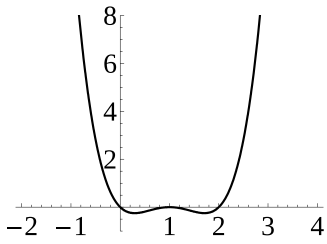
Задача 51. Постройте график многочлена $p(x)$.

Для построения графика данного многочлена прежде всего надо найти промежутки, на которых он является монотонной функцией.

На промежутке $[1;+\infty)$ функция $g(x) = x^2 - 2x$ возрастает, при этом $g(1) = -1$. Если мы будем увеличивать значение x, начиная с 1, то увеличивается и значение $g(x)$. Поскольку на отрезке $\bigl[-1;-\frac{1}{2}\bigr]$ функция f является убывающей, то, пока $g(x)$ не стало равным $-\frac{1}{2}$, значение $f(g(x))$ будет убывать. Решениями уравнения $g(x) = -\frac{1}{2}$ являются числа $1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, на отрезке $[1;1+1/\sqrt{2}\,]$ многочлен p убывает, а на промежутке $[1+1/\sqrt{2}\,;+\infty)$ — возрастает.

На промежутке $(-\infty;1]$ функция g убывает. При этом, если $x \in (-\infty;1-1/\sqrt{2}\,]$, то $g(x) \geqslant -\frac{1}{2}$. Поэтому при значениях x из указанного промежутка многочлен p является композицией убывающей и возрастающей функций, а потому он убывает. Если же $x \in [1-1/\sqrt{2}\,;1]$, то $g(x) \leqslant -\frac{1}{2}$, поэтому на данном отрезке p есть композиция двух убывающих функций, а потому он возрастает.

Таким образом, его график имеет следующий вид.



Для наглядности на приведенном рисунке выбран разный масштаб на осях координат.

Последняя из задач этой темы имеет теоретический характер.

Задача 52. Пусть функция f является возрастающей. Докажите, что множества решений уравнений $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ совпадают.

По сути дела, этот сюжет уже встречался при решении задачи 10 домашнего задания по теме 4. Для полноты приведем решение и данной задачи.

Очевидно, что всякое решение уравнения $f(x) = x$ является также решением уравнения $f(f(x)) = x$. Теперь пусть $f(f(x_0)) = x_0$, и предположим, что $f(x_0) < x_0$. Так как по условию функция f является возрастающей, то тогда $f(f(x_0)) < f(x_0)$, что по предположению меньше x_0. Таким образом, в этом случае число x_0 не может быть решением уравнения $f(f(x)) = x$. Если $f(x_0) > x_0$, то $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, следовательно, и в этом случае x_0 не есть решение исходного уравнения. Таким образом, остался единственный вариант: $f(x_0) = x_0$, что и требовалось доказать.

Характерным примером является применение результата этой задачи для решения уравнения $\sqrt{\sqrt{x+6}+6} = x$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+6}$. Данное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$. Поскольку эта функция возрастает на своей области определения, то, в силу результата предыдущей задачи, решениями данного уравнения являются решения уравнения $f(x) = x$, или $\sqrt{x+6} = x$. Единственным решением полученного уравнения является $x = 3$.

Для сравнения приведем также и алгебраическое решение уравнения $\sqrt{\sqrt{x+6}+6} = x$, идея которого основана на переходе к симметричной системе двух уравнений с двумя неизвестными. Положив

$y = \sqrt{x+6}$, мы получим систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+6}\,, \\ x = \sqrt{y+6}\,. \end{cases}$$

Ясно, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Возведя в квадрат обе части этих уравнений и взяв их разность, получим уравнение $(y-x)(y+x) = x - y$, или $(y-x)(y+x+1) = 0$. Поскольку вторая скобка в нуль не обращается, то $y = x$, таким образом, $\sqrt{x+6} = x$.

Задачи для домашних заданий по теме 8

1. а) Изобразите график функции $f(x) = (x^2-1)^2 - 1$.
б) Решите уравнение $f(x) = x$.

2. Найдите множества значений функций:
а) $h_1(x) = (x^2+2x)^2 + x^2 + 2x - 1$;
б) $h_2(x) = (x^2+2x)^3 + x^2 + 2x - 1$;
в) $h_3(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x^2+2x+1}$.

3. Известно, что функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. Найдите промежутки возрастания и убывания функций:
а) $g_1(x) = f\Big(\dfrac{1}{x^2-3x+4}\Big)$; б) $g_2(x) = f\Big(\dfrac{1}{x^2-4x+3}\Big)$.

4. Изобразите (в одной и той же системе координат) графики функций:
а) $g_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+4}}$ и $g_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+4}}$;
б) $g_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ и $g_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-4x+3}}$.

5. Пусть функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой, а множеством ее значений является отрезок $[-3;2]$. Найдите множество значений функции: 1) $g_1(x) = f(2x-1)$; 2) $g_2(x) = f^n(x)$, где n — натуральное число; 3) $g_3(x) = \dfrac{1}{f(x)}$; 4) $g_4(x) = f(\sqrt{x}\,)$ (если дополнительно известно, что функция $f(x)$ — четная).

6. Найдите множества значений функций: а) $f_1(x) = x^4 + 4x^2 - 1$; б) $f_2(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; в) $f_3(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

7. Найдите промежутки возрастания и убывания функций задачи 6.

8. Пусть $f(x) = x^2 + 2x$. Решите уравнение: а) $f(f(x)) = 0$;
б) $\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\ \text{раз}}(x)\ldots)) = 0$.

9. Найдите все значения a, при которых неравенство $\sqrt{x^2+3} \geqslant ax$ справедливо на всей числовой прямой.

Решения домашних задач по теме 8

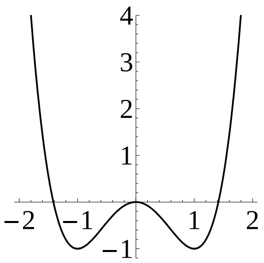
1. а) Конечно, можно преобразовать формулу для данной функции, написав, что $f(x) = x^4 - 2x^2$. Теперь положим $g(x) = x^2 - 2x$ и заметим, что $f(x) = g(x^2)$. Для построения графика нам важно знать, на каких промежутках данная функция является возрастающей, а на каких — убывающей.

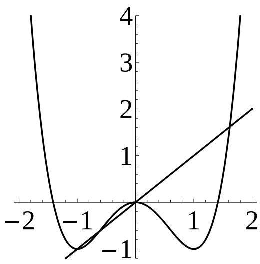
Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда $0 \leqslant x_1^2 < x_2^2$. Если $x_2^2 \leqslant 1$, то числа $t_1 = x_1^2$ и $t_2 = x_2^2$ лежат на отрезке $[0; 1]$, на котором квадратичная функция g убывает. Поскольку $t_1 < t_2$, то $g(t_1) > g(t_2)$, таким образом, $f(x_1) > f(x_2)$. Тем самым мы доказали, что функция f убывает на отрезке $[0; 1]$. Теперь предположим, что $1 \leqslant x_1 < x_2$. Так как функция g возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, то $g(x_1^2) < g(x_2^2)$, таким образом, функция f возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

Давайте теперь рассмотрим отрицательные значения аргумента. Если $x_1 < x_2 \leqslant -1$, то $x_1^2 > x_2^2 \geqslant 1$, поэтому $f(x_1) = g(x_1^2) > g(x_2^2) = f(x_2)$, таким образом, функция f убывает на промежутке $(-\infty; -1]$. Если же $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $x_2^2 < x_1^2 \leqslant 1$, следовательно, $f(x_1) = g(x_1^2) < g(x_2^2) = f(x_2)$, значит, функция f возрастает на $[-1; 0]$. Для построения эскиза графика полезно еще найти несколько значений этой функции:

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
$f(x)$	0	-1	0	-1	0

На левом рисунке изображен искомый график.





б) Из правого рисунка ясно, что данное уравнение имеет 4 корня. Решить его можно при помощи алгебраических преобразований, поскольку два из его корней «видны»: $x = 0$ и $x = -1$. Так как

$$x^4 - 2x^2 - x = x(x^3 - 2x - 1) = x(x^3 + x^2 - (x+1)^2) = x(x+1)(x^2 - x - 1),$$

то двумя другими корнями являются корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, т. е. числа $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Теперь получим эти корни, не проводя никаких преобразований. Положим $h(x) = x^2 - 1$. Данное уравнение имеет вид $h(h(x)) = x$. Если x_0 — это один из корней уравнения $h(x) = x$, то $h(h(x_0)) = h(x_0) = x_0$, таким образом, x_0 является и корнем данного уравнения. Итак, корни $x = -1$ и $x = 0$ очевидны, а поскольку всего корней не более четырех, то два остальных — это корни уравнения $h(x) = x$, т. е. корни квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

2. а) Если $f(x) = x^2 + x - 1$ и $g(x) = x^2 + 2x$, то $h_1(x) = f(g(x))$. Поэтому множеством значений данной функции является множество значений квадратичной функции f на множестве значений квадратичной функции g. Множеством значений функции g является промежуток $[-1; +\infty)$. Функция f принимает свое наименьшее значение $-\dfrac{5}{4}$ при значении аргумента $x = -\dfrac{1}{2}$, лежащем в промежутке $[-1; +\infty)$. Таким образом, множеством значений данной функции является промежуток $\left[-\dfrac{5}{4}\,; +\infty\right)$.

б) Рассмотрим в качестве первой функцию $f(x) = x^3 + x - 1$. Функция f — возрастающая, поэтому множеством ее значений на $[-1; +\infty)$ является промежуток $[-3; +\infty)$.

в) Вначале следует проделать алгебраическое преобразование:

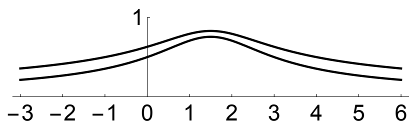
$$h_3(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}\,.$$

Можно и не представлять функцию h_3 в виде композиции других, следуя просто общей идее. Мы все же предлагаем проделать формальное преобразование. Если положить $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$, $p(x) = \dfrac{1}{x}$ и $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$, то $h_3(x) = f(p(g(x)))$. Множеством значений g является промежуток $\left[\dfrac{1}{2}\,; +\infty\right)$, множеством значений функции p на этом промежутке является промежуток $(0; 2]$, множеством значений линейной функции f на $(0; 2]$ является промежуток $\left(\dfrac{1}{2}\,; \dfrac{3}{2}\right]$.

3. Поскольку функция f возрастает на $\mathbb{R}$, то промежутками возрастания (убывания) функций g_1 и g_2 являются промежутки возрастания (убывания) функций, заданных формулами: а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$ и б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$. Поскольку квадратичный многочлен $x^2 - 3x + 4$ не обращается в нуль, убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, то функция $g_1(x)$ возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ и убывает на промежутке $\left[\frac{3}{2} + \infty\right)$.

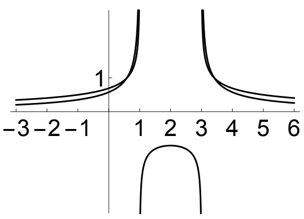
Поскольку решениями уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ являются $x = 1; 3$, то функция g_2 не определена в этих точках. Так как функция — обратная пропорциональность — убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, то функция g_2 возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; 2]$, убывает на каждом из промежутков $[2; 3)$ и $(3; +\infty)$.

4. а) Графики — на рисунке.

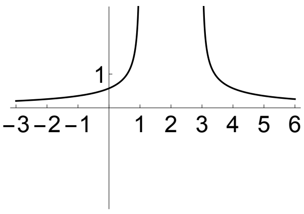


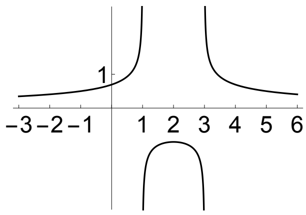
Поскольку наименьшим значением многочлена $x^2 - 3x + 4$ является $\frac{7}{4} > 1$, то все значения $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$ лежат между 0 и 1. Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 4}} > \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}$, поэтому график функции g_2 на рисунке лежит выше графика функции g_1.

б) Графики — на рисунке.



А теперь разгадаем загадку: где какой график? Функция g_3 определена только там, где $x^2 - 4x + 3 > 0$, т. е. на объединении промежутков $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, при этом она возрастает на первом из них и убывает на втором. Функция g_4 определена при всех $x \neq 1; 3$. Поскольку кубический корень возрастает на всей числовой прямой, то промежутки, на которых g_4 возрастает (убывает), указаны в решении предыдущей задачи. Графики эти функций по-отдельности изображены на следующих рисунках.





Осталось заметить, что эти графики имеют общие точки, которые можно найти, решив уравнение $x^2 - 4x + 3 = 1$.

5. Ответы: 1) $[-3; 2]$; 2) $[-3^n; 2^n]$ при нечетных n и $[0; 3^n]$ при четных n; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $[-3; 2]$.

6. а) Поскольку квадратичная функция $y = x^2 + 4x - 1$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, то множеством значений функции $f_1(x)$ является промежуток $[-1; +\infty)$. б) Квадратичная функция $y = x^2 - 4x + 1$ принимает наименьшее значение -3 при $x = 2$, поэтому множеством значений функции $f_2(x)$ является промежуток $[-3; +\infty)$. в) Вначале проведем преобразование формулы, задающей данную функцию.

$$f_3(x) = x(x+3)\cdot(x+1)(x+2) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) = (x^2+3x)^2+2(x^2+3x).$$

Множеством значений квадратичной функции $y = x^2 + 3x$ является промежуток $\left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$, а квадратичная функция $y = x^2+2x$ достигает наименьшего значения -1 при $x = -1$. Поэтому множеством значений функции $f_3(x)$ является промежуток $[-1; +\infty)$.

7. а) Так как квадратичная функция $y = x^2 + 4x - 1$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, то функция $f_1(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. б) При исследовании функции $f_2(x)$ полезно использовать то, что она является четной, чтобы не проделывать двойную работу. На отрезке $[0; \sqrt{2}\,]$ функция $y = x^2$ возрастает, а на множестве ее значений — отрезке $[0; 2]$ — квадратичная функция $y = x^2 - 4x + 1$ убывает, следовательно, на отрезке $[0; \sqrt{2}\,]$ функция $f_2(x)$ убывает. Соответственно, на промежутке $[\sqrt{2}; +\infty)$ функция $f_2(x)$ возрастает. В силу того, что она является четной, эта функция убывает на промежутке $(-\infty; -\sqrt{2}\,]$ и возрастает на промежутке $[-\sqrt{2}; 0]$. в) Данная функция четной не является, однако стоит проделать некоторое дополнительное преобразование с тем, чтобы получить четную функцию. Положим $t = x + \frac{3}{2}$ и введем функцию

$$g_3(t) = f_3(t - \tfrac{3}{2}) = \bigl(t^2 - \tfrac{9}{4}\bigr)\bigl(t^2 - \tfrac{1}{4}\bigr) = t^4 - \tfrac{5}{2}\, t^2 + \tfrac{9}{16}\,.$$

Функция g_3 возрастает на промежутках $\bigl[-\frac{\sqrt{5}}{2}\,; 0\bigr]$ и $\bigl[\frac{\sqrt{5}}{2}\,; +\infty\bigr)$, убывает на промежутках $\bigl(-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{2}\,\bigr]$ и $\bigl[0; \frac{\sqrt{5}}{2}\,\bigr]$. Так как $f_3(x) = g_3\bigl(x + \frac{3}{2}\,\bigr)$, то исходная функция f_3 возрастает на промежутках $\bigl[-\frac{\sqrt{5}+3}{2}\,; -\frac{3}{2}\,\bigr]$ и $\bigl[\frac{\sqrt{5}-3}{2}\,; +\infty\bigr)$, убывает на $\bigl(-\infty; -\frac{\sqrt{5}+3}{2}\,\bigr]$ и $\bigl[-\frac{3}{2}\,; \frac{\sqrt{5}-3}{2}\,\bigr]$.

8. а) Так как $f(x) = x^2 + 2x = 0$ при $x = -2; 0$, то $f(f(x)) = 0$, если $f(x) = 0$ либо $f(x) = -2$. Поскольку второе уравнение решений не имеет, то решениями данного уравнения являются $x = -2; 0$.

б) Ответ: $x = -2; 0$. Полезно отметить следующий момент рассуждения. Так как множеством значений функции f является промежуток $[-1; +\infty)$, на котором сама данная функция является возрастающей, то $f(f(x)) = 0$ только при $f(x) = 0$.

9. Неравенство $\sqrt{x^2+3} \geqslant ax$ очевидно верно при $a = 0$. Пусть $a > 0$. Это неравенство очевидно верно при $x \leqslant 0$, потому предположим, что $x > 0$. Поделив на x обе части данного неравенства, получим неравенство $a \leqslant \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}$, которое должно быть верно при всех $x > 0$. Конечно, это неравенство верно при $a \leqslant 1$. Поскольку выражение $1 + \frac{3}{x^2}$ может быть сколь угодно близким к 1, то при $a > 1$ неравенство не будет верным при всех $x > 0$. Теперь пусть $a < 0$. Ясно, что надо рассматривать лишь $x < 0$. Поделив на x обе части данного неравенства, получим неравенство $a \geqslant -\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}$. Оно очевидно верно при $a \geqslant -1$ и только при таких значениях параметра a. Таким образом, $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Урок одной задачи: кусочно-линейные функции

Идея этого урока состоит в том, чтобы применить и повторить введенные понятия и методы на примере решения всего одной задачи.

Задача 53. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 4 - 2x, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Определите, нет ли противоречия в задании этой функции.
2) Решите уравнение $f(x) = 1$.
3) Решите уравнение $f(x) = 3$.
4) Решите уравнение $f\bigl(f(x)\bigr) = 1$.
5) Постройте график $y = f(x)$.
6) Решите неравенство $f\bigl(f(x)\bigr) \leqslant 1$.
7) Постройте график $y = f\bigl(f(x)\bigr)$.
8) Найдите промежутки монотонности функции $f\bigl(f(x)\bigr)$.
9) Докажите, что $f(x) = \min\{x+1, 4-2x\}$.
10) Задайте рассматриваемую функцию формулой, в которой участвовали бы только так называемые «элементарные функции».

1) Речь идет о том, что в определении функции f ее значение при $x = 1$ задается двумя разными формулами. Но, так как $x + 1 = 2$ при $x = 1$, так же как и $4-2x = 2$ при $x = 1$, то противоречия не возникает.

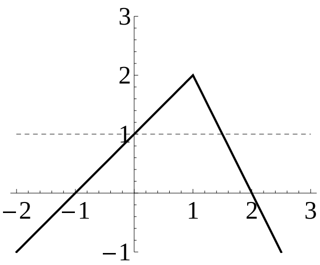
2) Идейно решение такое же, как и при «раскрытии модуля». Если $x \leqslant 1$, то мы получаем уравнение $x + 1 = 1$, откуда $x = 0$. Поскольку $0 \leqslant 1$, то найденное значение — решение уравнения. При $x \geqslant 1$ получаем уравнение $4 - 2x = 1$, откуда $x = \dfrac{3}{2} \geqslant 1$. Таким образом, $x = 0; \dfrac{3}{2}$.

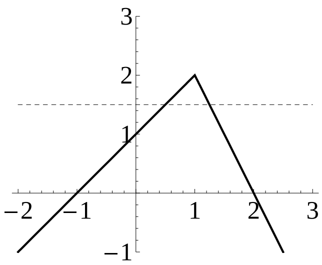
3) Если $x \leqslant 1$, то $x + 1 = 3$, $x = 2$, однако это число не удовлетворяет условию $x \leqslant 1$. При $x \geqslant 1$ получаем уравнение $4 - 2x = 3$, $x = \dfrac{1}{2}$, которое также не является решением, поскольку $\dfrac{1}{2} < 1$. Таким образом, данное уравнение решений не имеет.

4) Поскольку $f(t) = 1$, если $t = 0$ или $t = \dfrac{3}{2}$, то $f\bigl(f(x)\bigr) = 1$, если $f(x) = 0$ или $f(x) = \dfrac{3}{2}$. Очевидными решениями первого уравнения являются $x = -1; 2$. Решать второе уравнение можно так же, как и уравнение пункта 2. В результате получим, что $x = \dfrac{1}{2}\,; \dfrac{5}{4}$. Таким образом, ответ: $x = -1; \dfrac{1}{2}\,; \dfrac{5}{4}\,; 2$.

5) График — на рисунках на следующей странице. На левом из них изображена и горизонтальная прямая $y = 1$, тем самым он представляет графическую интерпретацию уравнения пункта 2. Кроме того, он дает и интерпретацию решения уравнения пункта 3. Действительно, поскольку график рассматриваемой функции располагается под прямой $y = 2$, то он не пересекается с прямой $y = 3$, а потому уравнение $f(x) = 3$ решений не имеет.

Правый рисунок есть графическая интерпретация решений уравнения пункта 4. Действительно, решениями этого уравнения являются точки пересечения графика $y = f(x)$ как с осью абсцисс, так и с прямой $y = \frac{3}{2}$.





6) Для решения этого неравенства воспользуемся его графической интерпретацией. Как видно из левого рисунка, решением неравенства $f(x) \leqslant 1$ является объединение лучей $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Таким образом, решением данного неравенства является объединение решений неравенств $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$. Из правого рисунка выше сразу следует, что решением первого неравенства является объединение $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, решением второго — отрезок $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right]$. Таким образом, ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.

7) Поскольку, как мы видели, уравнение $f\big(f(x)\big) = 1$ имеет четыре решения, то этот результат может уберечь от ошибок при построении искомого графика. Действительно, прямая $y = 1$ должна пересекать его в четырех точках. Если на вашей картинке так не получится, то, значит, график нарисован неверно.

Начнем рассуждать. По определению данной функции получим, что
$$f\big(f(x)\big) = \begin{cases} f(x) + 1, & \text{если } f(x) \leqslant 1, \\ 4 - 2f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 1. \end{cases}$$
Как мы знаем, решением неравенства $f(x) \leqslant 1$ является объединение $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. При этом, если $x \leqslant 0$, то $f(x) = x + 1$, а если $x \geqslant \frac{3}{2}$, то $f(x) = 4 - 2x$. Следовательно, если $x \leqslant 0$, то $f\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = x + 2$, если же $x \geqslant \frac{3}{2}$, то $f\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = 5 - 2x$.

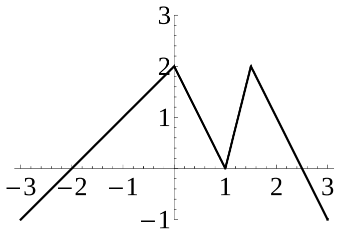
Теперь пусть $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, так что $f(x) \geqslant 1$. Если $x \in [0; 1]$, то $f(x) = x + 1$, поэтому в этом случае $f\big(f(x)\big) = 4 - 2f(x) = 2 - 2x$. Если же

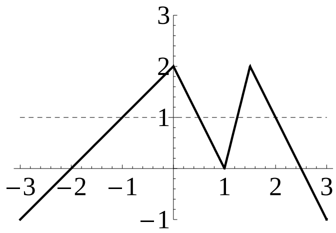
$x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$, то $f\big(f(x)\big) = 4 - 2f(x) = 4 - 2(4 - 2x) = 4x - 4$.

Следовательно,

$$f\big(f(x)\big) = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2 - 2x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4x - 4, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}, \\ 5 - 2x, \text{ если } x \geqslant \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, искомый график является изображенной на левом рисунке четырехзвенной ломаной.





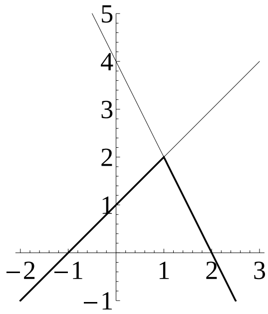
Для контроля можно посмотреть на правый рисунок (на котором видны точки его пересечения с горизонтальной прямой $y = 1$), чтобы убедиться, что, действительно, прямая $y = 1$ пересекает этот график в четырех точках. Более того, из этого рисунка можно извлечь и решение неравенства $f\big(f(x)\big) \leqslant 1$.

8) Ответ на данный вопрос следует «прочитать» по построенному графику. Функция $f\big(f(x)\big)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, убывает — на промежутках $[0; 1]$ и $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Конечно, ответ на поставленный в этом пункте вопрос полезно получить и из других соображений. Нам известно, что данная функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ и убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Поэтому, если $f(a) \leqslant f(b) \leqslant 1$, то $f\big(f(a)\big) \leqslant f\big(f(b)\big)$. Как известно, если $f(b) \leqslant 1$, то $b \leqslant 0$ либо $b \geqslant \frac{3}{2}$. Поскольку функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$, то из неравенства $a \leqslant b \leqslant 0$ следует, что $f(a) \leqslant f(b) \leqslant 1$, поэтому $f\big(f(a)\big) \leqslant f\big(f(b)\big)$. Следовательно, на промежутке $(-\infty; 0]$ функция $f\big(f(x)\big)$ является возрастающей. Если $a \geqslant b \geqslant \frac{3}{2}$, то, так как функция f убывает на промежутке $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, снова получаем, что $f(a) \leqslant f(b) \leqslant 1$, значит, $f\big(f(a)\big) \leqslant f\big(f(b)\big)$. Таким образом, на промежутке $\left[\frac{3}{2}\,; +\infty\right)$ функция $f\big(f(x)\big)$ является убывающей.

Аналогичным образом промежуток $\left[0; \frac{3}{2}\,\right]$ надо разбить на два: $[0; 1]$ и $\left[1; \frac{3}{2}\,\right]$. На первом из них функция $f\big(f(x)\big)$ убывает, на втором она возрастает.

9) Достаточно посмотреть на следующий рисунок, на котором, кроме графика данной функции, изображены также прямые $y = x + 1$ и $y = 4 - 2x$ — графики соответствующих линейных функций.



Поскольку при $x \leqslant 1$ первая прямая лежит ниже второй, тогда как при $x \geqslant 1$ вторая прямая лежит ниже первой, мы и получаем, что $f(x) = \min\{x + 1, 4 - 2x\}$.

10) График данной функции является двухзвенной ломаной, «точкой излома» которой является точка с абсциссой, равной 1. Таким же свойством обладает график функции вида $g(x) = ax + b|x - 1| + c$. Таким образом, достаточно подобрать коэффициенты a, b и c так, чтобы график $y = g(x)$ проходил через точки $A(0; 1)$, $B(1; 2)$ и $C(2; 0)$, что имеет место в том случае, если

$$1 = g(0) = b + c, \quad 2 = g(1) = a + c \text{ и } 0 = g(2) = 2a + b + c.$$

Поскольку решением системы

$$\begin{cases} b + c = 1, \\ a + c = 2, \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

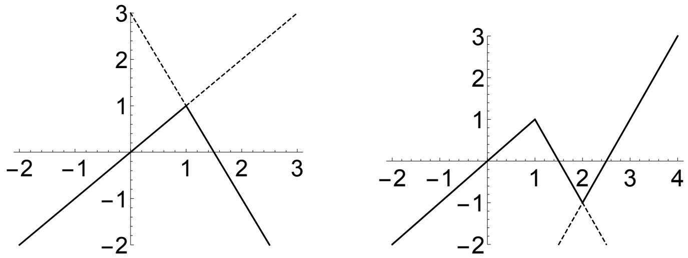
являются числа $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ и $c = \frac{5}{2}$, то для данной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2}\,|x - 1| + \frac{5}{2}\,.$$

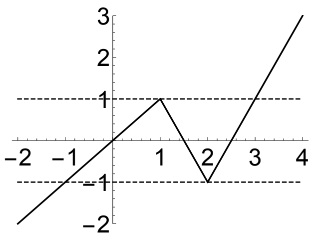
Мы хотели бы предложить следующую домашнюю задачу к этому уроку.

Задача на дом. Определите, сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $\max\bigl\{2x-5, \min\{x, 3-2x\}\bigr\} = a$. Здесь $\max\{a, b\}$ — наибольшее ($\min\{a, b\}$, соответственно, наименьшее) из чисел a и b.

Смысл задания состоит в следующем: не надо решать неравенства и стремиться получить явные формулы для кусочно-линейной функции — левой части данного уравнения. Если перед вами графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$, то как найти график функции $\min\{f(x), g(x)\}$? Надо просто брать нижние части объединения графиков этих функций. Например, на левом рисунке из пары прямых, заданных уравнениями $y = x$ и $y = 3-2x$, взяты нижние лучи, исходящие из точки пересечения этих прямых. Это и будет график функции $f(x) = \min\{x, 3-2x\}$.



Аналогичным образом строится график функции $\max\{2x-5, f(x)\}$ (правый рисунок). Вся разница в том, что теперь мы берем верхние части графиков. В результате мы получаем график функции, заданной левой частью данного уравнения, с которого с легкостью считывается ответ: уравнение имеет три решения при $|a| < 1$, два решения при $a = \pm 1$, одно решение при $|a| > 1$.



Самостоятельная работа 4 (темы 6–8)

Вариант 1

1. Даны функции $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ и $g(x) = \sqrt{x+3}$.
а) Задайте формулами функции $h(x) = f(g(x))$ и $\varphi(x) = g(f(x))$ (обязательно укажите области определения этих функций).
б) Найдите промежутки монотонности функции h.

2. Известно, что функция f возрастает на всей числовой прямой. Найдите промежутки монотонности функции $g(x) = f\left((x-1)^2\right)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{5x-1} + x^3 = 11$.

4. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$. Найдите ее:
а) множество значений; б) промежутки монотонности.

Вариант 2

1. Даны функции $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ и $g(x) = \sqrt{x-2}$.
а) Задайте формулами функции $h(x) = f(g(x))$ и $\varphi(x) = g(f(x))$ (обязательно укажите области определения этих функций).
б) Найдите промежутки монотонности функции h.

2. Известно, что функция g убывает на всей числовой прямой. Найдите промежутки монотонности функции $h(x) = g(|x+2|)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{2x+3} + x^3 = 30$.

4. Дана функция $f(x) = \dfrac{4x^4+2x^2+1}{2x^2+1}$. Найдите ее:
а) множество значений; б) промежутки монотонности.

Вариант 3

1. Дана функция $f(x) = \sqrt{4-x}$. Задайте формулами и постройте графики функций: а) $g(x) = f(x+2)$; б) $h(x) = f(x^2+3x)$.

2. Известно, что функция f возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функции $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

3. Решите уравнение $(x^2-2x)^5 + (x-1)^2 = 247$.

4. Найдите (двумя способами) в зависимости от значения параметра a число решений уравнения $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = a$.

Вариант 4

1. Дана функция $f(x) = \sqrt{x+4}$. Задайте формулами и постройте графики функций: а) $g(x) = f(1-x)$; б) $h(x) = f(3x - x^2)$.
2. Известно, что функция f убывает на $(-\infty; 2]$ и возрастает на $[2; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функции $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.
3. Решите уравнение $(x^2 + 4x)^5 + (x+2)^2 + 242 = 0$.
4. Найдите (двумя способами) в зависимости от значения параметра a число решений уравнения $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{x+1} = a$.

Дополнительные упражнения по темам 6–8

4.1. Решите уравнения: а) $x^3 - 4x - 48 = 0$; б) $2^x + x = 1034$. в) А сможете ли вы решить уравнение $2^x + x = 1024$?

4.2. Известно, что функция $f(x)$ убывает на всей числовой прямой и $f(9) = 2$. а) Решите уравнение $f(2x-5) = 2$. б) Решите уравнение $f(x^2) = 2$. в) Решите неравенство $f(x^2) \leqslant 2$.

4.3. Пусть $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-5}$. а) Решите уравнение $f(x^2 + 3x) = 1$. б) Решите уравнение $f\left(\dfrac{3x+1}{2x-1}\right) = 1$.

4.4. Пусть функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. Выясните, являются ли монотонными функции: 1) $g_1(x) = f(3x-1)$; 2) $g_2(x) = f(3-x)$; 3) $g_3(x) = f(|x|)$; 4) $g_4(x) = f(x^3 + x - 2)$; 5) $g_5(x) = f(x^3 - 9x)$.

4.5. Определите, при каких дополнительных условиях на возрастающую на всей прямой функцию $f(x)$ будут монотонными на всей прямой и функции: 1) $g_1(x) = f^2(x)$; 2) $g_2(x) = \dfrac{2f(x)-1}{f(x)-1}$;
3) $g_3(x) = f^3(x) + 3f(x) - 1$; 4) $g_4(x) = f^2(x) - 2f(x)$.

4.6. Известно, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 4]$ и убывает на промежутке $[4; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функций: а) $g_1(x) = f(3x+1)$; б) $g_2(x) = f(x^2)$; в) $g_3(x) = f\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)$.

4.7. Найдите формулу для функции $g(x)$, если: а) $f(x) = 2x - 3$ и $f(g(x)) = 3x - 4$; б) $f(x) = 2x - 3$ и $g(f(x)) = 3x - 4$.

4.8. Дана функция $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. а) Найдите множество ее значений. б) Выясните, сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $f(x) = a$.

4.9. Решите неравенство $f(g(x)) > f(x)$, если известно, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются убывающими, а $g(5) = 5$.

4.10. Найдите промежутки монотонности и множество значений функций: 1) $f_1(x) = \dfrac{2|x|+3}{|x|+1}$; 2) $f_2(x) = \left|\dfrac{2x+3}{x+1}\right|$; 3) $f_3(x) = \dfrac{2|x|+3}{|x|-1}$; 4) $f_4(x) = \left|\dfrac{2x+3}{x-1}\right|$.

4.11. Найдите промежутки монотонности и изобразите графики функций: 1) $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$; 2) $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; 3) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$; 4) $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Тема 9. Обратимые функции. Функция, обратная данной

Дадим определение. Функция $f(x)$, заданная на множестве D, называется *обратимой*, если ни в каких двух точках этого множества она не принимает равных значений, т. е. если из того, что $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Очевидными примерами обратимых на $\mathbb{R}$ функций являются непостоянные линейные функции. Действительно, если $f(x) = ax + b$, где $a \neq 0$, и $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) = ax_1 + b \neq ax_2 + b = f(x_2)$. С другой стороны, квадратичные функции не являются обратимыми на $\mathbb{R}$. Действительно, если $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, и $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, то, как хорошо известно, $f(x_1) = f(x_2)$.

Задача 54. Функция $f(x)$ задана равенствами

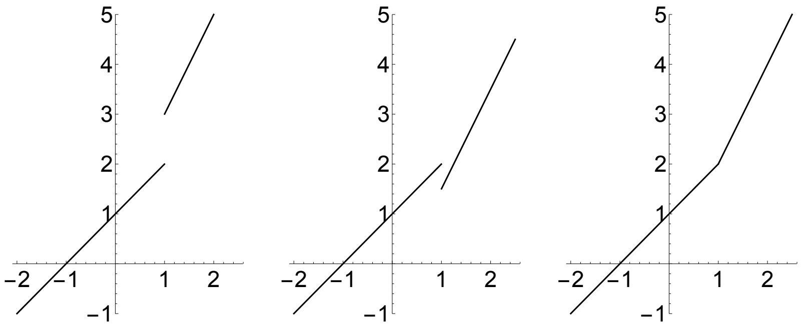
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x + a, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Найдите все значения a, при которых: а) эта функция обратима; б) множеством значений этой функции является все множество действительных чисел.

а) На каждом из промежутков $(-\infty; 1]$ и $(1; +\infty)$ функция является линейной и непостоянной, значит, обратимой. Она будет обратимой на всей прямой, если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \leqslant 1$, $x_2 > 1$. Другими словами, она будет обратимой, если множества ее значений на каждом из указанных промежутков не имеют общих точек. Множеством значений данной функции на $(-\infty; 1]$ является промежуток $(-\infty; 2]$, множеством ее значений на $(1; +\infty)$ является промежуток $(a+2; +\infty)$. Следовательно, данная функция обратима на всей прямой тогда и только тогда, когда $a + 2 \geqslant 2$, т. е. при $a \geqslant 0$.

б) Множеством значений данной функции является объединение множеств ее значений на каждом из промежутков $(-\infty; 1]$ и $(1; +\infty)$, т. е. объединение промежутков $(-\infty; 2]$ и $(a+2; +\infty)$. Их объединение совпадает со всей прямой, если $a + 2 \leqslant 2$, т. е. при $a \leqslant 0$.

Геометрическая интерпретация — на рисунках.



$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$ $\qquad$ $a = 0$

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 9.1. Всякая возрастающая (убывающая) на всей своей области определения функция является обратимой.

Однако не всякая обратимая функция обязательно является возрастающей или убывающей.

Задача 55. Приведите пример обратимой функции, заданной: а) на произвольном множестве; б) на отрезке $[0; 2]$; в) на всей числовой прямой, не являющейся монотонной на своей области определения.

а) Положим $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Тогда $0 < 1 < 2$, однако $f(0) > f(1)$, а $f(1) < f(2)$.

б) Например, функция, заданная формулами

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in [0; 1), \\ 3 - x, \text{ если } x \in [1; 2]. \end{cases}$$

в) Например, функция, заданная формулами

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

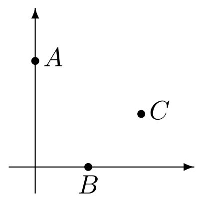
Можно устроить конкурс на «лучшие» примеры функций с требуемым свойством. Предлагаем дать *суперприз* тому, кто предложит следующий пример:

$$\chi(x) = \begin{cases} x, & \text{если число } x \text{ иррационально,} \\ -x, & \text{если число } x \text{ рационально.} \end{cases}$$

Если никто не предложит, то этот пример стоит ребятам показать.

Замечание. Некоторые особо пытливые умы могут спросить: «Почему все примеры такие странные, почему не удается задать искомую функцию более естественным образом?» Ответить на этот вопрос так, чтобы ответ был понятен 9-класснику, не слишком просто. Как известно из материала первого семестра курса математического анализа, всякая непрерывная и обратимая на некотором промежутке функция является строго монотонной на этом промежутке. Ясно, что понятие непрерывной функции в 9 классе не ввести, да и вводить не надо. Давайте проведем такое рассуждение.

На следующем рисунке изображен график функции, построенной в решении пункта (а) предыдущей задачи, который состоит просто из трех точек $A(0;2)$, $B(1;0)$ и $C(2;1)$.



Предположим, что эти точки лежат на графике функции, заданной на отрезке $[0;2]$ некоторой формулой. Этот график представляет собой *непрерывную линию*, проходящую через точки A, B и C. Тогда множество значений этой функции на отрезке $[0;1]$ должно содержать отрезок $[0;2]$, а множество ее значений на отрезке $[1;2]$ должно содержать отрезок $[0;1]$. Поэтому найдутся числа $x_1 \in (0;1)$ и $x_2 \in (1;2)$, такие, что $f(x_1) = \dfrac{1}{2} = f(x_2)$. Значит, эта функция не обратима. Это рассуждение строгим не является, поскольку понятие непрерывной линии мы понимаем только на интуитивном уровне. Далее в старших классах соответствующее понятие будет введено.

Предположим, что функция f обратима на множестве D. Обозначим через E множество значений функции f на D. Таким образом, для каждого числа $a \in E$ найдется число $b \in D$, такое, что $f(b) = a$. При этом, в силу обратимости функции f, такое число b является единственным. Поэтому мы можем ввести функцию g с областью определения E и множеством значений D, сопоставив числу $a \in E$ число $b \in D$, такое, что $f(b) = a$. Определенная таким образом функция называется функцией, *обратной к функции f*.

Таким образом, если функция g обратна функции f с областью определения D и множеством значений E, то для каждого числа $a \in E$ равенство $g(a) = b$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(b) = a$. Следовательно, и функция f будет обратной функции g, в силу чего естественно говорить о парах взаимно обратных функций.

Задача 56. Приведите известные вам примеры пар взаимно обратных функций.

Прежде всего вспомним определение «квадратного корня». Квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число b, такое, что $b^2 = a$. Таким образом, по этому определению функция, называемая квадратным корнем, обратна к функции $f(x) = x^2$, рассматриваемой на луче $[0; +\infty)$. Аналогичным образом, кубический корень $\sqrt[3]{x}$ есть функция, обратная функции x^3. Вообще, многие так называемые *элементарные функции* по самому определению являются обратными к более просто заданным функциям.

Задача 57. Задайте формулами функции, обратные функциям: 1) $f_1(x) = 2x - 1$; 2) $f_2(x) = \dfrac{x}{x+1}$; 3) $f_3(x) = x^2 - 2x$ и $x \geqslant 1$; 4) $f_4(x) = x^2 - 2x$ и $x \leqslant 1$.

1) Если $2b - 1 = a$, то $b = \dfrac{a+1}{2}$. Таким образом, функция, обратная f_1, задается формулой $g_1(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

2) Если $\dfrac{b}{b+1} = a$, то $ab + a = b$, откуда $b = \dfrac{a}{1-a}$. Поэтому функция, обратная f_2, задается формулой $g_2(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

3) Если $b^2 - 2b = a$, то $b = 1 \pm \sqrt{1+a}$. Поскольку точка b должна лежать в области определения функции f_3, то $b = 1 + \sqrt{1+a}$. Таким образом, обратная функция задается формулой $g_3(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.

4) Ответ: $g_4(x) = 1 - \sqrt{x+1}$.

Задача 58. Задайте формулой функцию g, обратную функции, заданной равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Обратной к функции $f_1(x) = x+1$ является функция $g_1(x) = x-1$, а обратной к функции $f_2(x) = 2x$ является функция $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Все, что осталось сделать, — это определить множества значений аргумента, при которых $g(x) = g_1(x)$, и тех, при которых $g(x) = g_2(x)$. Поскольку $f(x) = f_1(x)$ при $x \leqslant 1$, то множеством значений этой функции является луч $(-\infty; 2]$. Следовательно, $g(x) = g_1(x)$ при $x \leqslant 2$. Соответственно, если $x > 2$, то $g(x) = g_2(x)$. Таким образом,

$$g(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } x \leqslant 2, \\ \frac{x}{2}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Задача 59. Предположим, что равенство $f(g(x)) = x$ справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что тогда: а) функция g обратима; б) множеством значений функции f является вся числовая прямая.

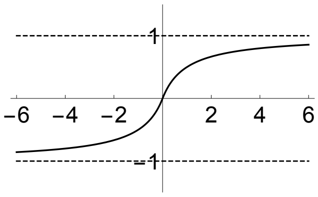
а) Предположим, что функция g не обратима. Тогда существуют два различных числа x_1 и x_2, такие, что $g(x_1) = g(x_2) = y_0$. Поэтому $f(y_0) = x_1$ и $f(y_0) = x_2$, чего быть не может по определению функции.

б) Из данного равенства следует, что для любого действительного числа a найдется число b, такое, что $a = f(b)$, для чего достаточно положить $b = g(a)$.

Задача 60. Предположим, что равенство $f(g(x)) = x$ справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$. а) Докажите, что если множеством значений функции g является вся числовая прямая, то функции f и g являются взаимно обратными. б) Приведите примеры двух функций, не являющихся взаимно обратными, для которых справедливо это равенство.

а) Рассмотрим два произвольных различных числа x_1 и x_2. Поскольку множество значений функции g — вся прямая, то найдутся (конечно, различные) числа a_1 и a_2, такие, что $g(a_1) = x_1$ и $g(a_2) = x_2$. Поэтому $f(x_1) = f(g(a_1)) = a_1$ и $f(x_2) = f(g(a_2)) = a_2$. Так как $a_1 \neq a_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тем самым функция f является обратимой. Областью определения функции g также является вся числовая прямая. Равенство $f(g(x)) = x$ и означает тогда, что f и g — это взаимно обратные функции. Поясним последнюю фразу более детально. Пусть $f(b) = a$. Так как $f(g(a)) = a$ и, как мы доказали, функция f обратима, то $b = g(a)$. Поэтому, если a есть значение функции f в точке b, то b есть значение функции g в точке a, что и означает по определению, что это есть пара взаимно обратных функций.

б) Рассмотрим функцию g с таким графиком, какой изображен на рисунке (формулу для этой функции мы приведем далее в теме 11).



Ее областью определения является вся прямая, а множеством значений — промежуток $(-1; 1)$. Функция g является возрастающей, следовательно, обратимой. Обозначим через f_0 обратную ей функцию, областью определения которой является промежуток $(-1; 1)$, а множеством значений — вся числовая прямая. Теперь положим

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), \text{ если } x \in (-1; 1), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Так как значения функции g лежат в $(-1; 1)$, то $f(g(x)) = f_0(g(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, однако функция f обратимой не является.

Теорема 9.2. Пусть D и E — два множества. Предположим, что f — функция с областью определения D, все значения которой лежат в множестве E, а g — функция с областью определения E, все значения которой лежат в множестве D. Если для каждого $x \in D$ справедливо равенство $g(f(x)) = x$, и для каждого $x \in E$ справедливо равенство $f(g(x)) = x$, то функции f и g являются взаимно обратными. При этом E есть множество значений функции f, а D есть множество значений функции g.

Пусть $a \in E$. Так как $f(g(a)) = a$, то число a является значением функции f, значит, множество E есть множество значений этой функции. Если $b \in D$, то, поскольку $g(f(b)) = b$, число b есть значение функции g, значит, множество D есть множество значений этой функции.

Теперь уже из равенства $f(g(x)) = x$ для всех $x \in D$ следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными.

Для того чтобы дать графическую интерпретацию понятию взаимно обратных функций, нам потребуется следующая лемма.

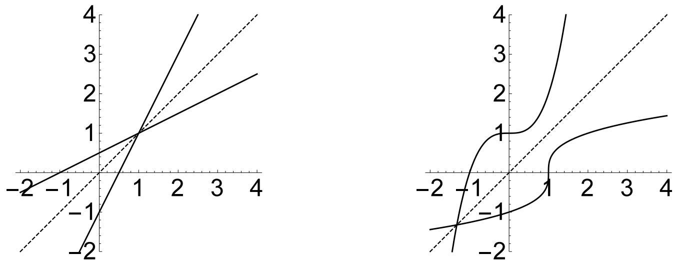
Лемма 9.3. Точки $A(a; b)$ и $B(b; a)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Пусть точка M имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}\,;\frac{a+b}{2}\right)$. Заметим прежде всего, что эта точка является серединой отрезка AB. Осталось доказать, что отрезок AB перпендикулярен прямой $y = x$, что очевидно, поскольку угловой коэффициент прямой AB равен -1. Таким образом, прямая $y = x$ (биссектриса первого и третьего координатных углов) является серединным перпендикуляром к отрезку AB.

Из этой леммы следует важное и полезное утверждение.

Теорема 9.4. Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

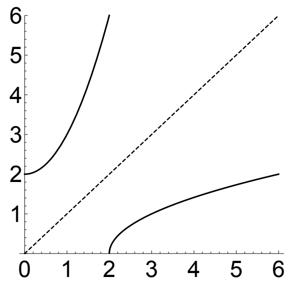
Следующие рисунки являются примерами к этой теореме. На левом рисунке изображены прямые $y = 2x - 1$ и $y = \dfrac{x+1}{2}$, являющиеся графиками взаимно обратных линейных функций; на правом — графики $y = x^3 + 1$ и $y = \sqrt[3]{x-1}$.



Пусть функции f и g являются взаимно обратными. Рассмотрим точку $A(a; b)$ на графике функции f и докажем, что симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка B лежит на графике функции g. По определению графика функции справедливо равенство $b = f(a)$. По определению функции, обратной данной, тогда $a = g(b)$, следовательно, точка с координатами $(b; a)$ лежит на графике функции g. Осталось заметить, что, в силу леммы, точки с координатами $(a; b)$ и $(b; a)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$. Аналогичным образом доказывается, что точка, симметричная точке графика функции g, лежит на графике функции f.

Задача 61. Покажите, что график функции $f(x) = \sqrt{x-2}$ есть «половина параболы».

Если $a = \sqrt{b-2}$, то $a \geqslant 0$ и $b = a^2 + 2$. Таким образом, обратной к функции $f(x)$ является функция $g(x) = x^2 + 2$, область определения которой есть луч $[0; +\infty)$. Графиком функции $g(x)$ является часть параболы — графика квадратичной функции $y = x^2 + 2$, лежащая в правой полуплоскости относительно оси ординат (рисунок). Поскольку график функции $f(x)$ симметричен этой части параболы (ее «половине»), то он и сам есть «половина» параболы.



Задачи для домашних заданий по теме 9

1. Найдите функцию, обратную функции $f(x) = x + 1 + 2|x - 1|$, если областью определения функции f является промежуток: а) $[1; +\infty)$; б) $(-\infty; 1]$.

2. Задайте формулой функцию, обратную функции: а) $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$; б) $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$.

3. Найдите все линейные функции, совпадающие с обратными им.

4. Известно, что функции f и g взаимно обратны. Выясните, будут ли взаимно обратными функции: 1) $f(-x)$ и $g(-x)$; 2) $-f(x)$ и $-g(x)$; 3) $f(x+1)$ и $g(x+1)$; 4) $f(x-1)$ и $g(x)+1$.
В случае отрицательного ответа укажите функцию, являющуюся обратной к первой из указанных функций.

5. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$ и $g(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$, при этом областью определения второй функции является промежуток $(-1; 1)$. Докажите, что эти функции являются взаимно обратными.

6. Докажите, что если функция f нечетна и обратима, то обратная ей функция также является нечетной.

7. Пусть функция f_1 задана и обратима на всей числовой прямой, g_1 — обратная ей функция. Пусть функция f_2 обратима на своей области определения, g_2 — обратная ей функция. Найдите функцию, обратную функции $f(x) = f_1(f_2(x))$.

8. а) Решите уравнение $\sqrt[3]{x+6} = x^3 - 6$. б) Докажите, что если f — возрастающая функция и функция g является обратной ей, то уравнения $f(x) = g(x)$, $f(x) = x$ и $g(x) = x$ равносильны, т. е. имеют одинаковые множества решений.

9. Докажите, что если возрастающая на некотором промежутке функция совпадает со своей обратной, то $f(x) = x$ на этом промежутке.

Решения домашних задач по теме 9

1. а) Если $x \geqslant 1$, то $f(x) = 3x - 1$, поэтому обратная ей функция задается формулой $g(x) = \dfrac{x+1}{3}$, где $x \geqslant 2$. б) Если $x \leqslant 1$, то $f(x) = 3 - x$, значит, $g(x) = 3 - x$, где $x \geqslant 2$.

2. а) Если $\dfrac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+2} = x$, то $\sqrt{y} = \dfrac{2x+1}{1-x}$, поэтому $y = \left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)^2$. Однако функция, заданная полученной формулой, не является обратимой на своей области определения. Областью определения функции, обратной данной функции, является множество значений функции f. Другими словами, это множество значений дробно-линейной функции $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ на промежутке $[0; +\infty)$, т. е. промежуток $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$. Ответ: $g(x) = \left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)^2$ при $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

б) Ответ: $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{1-x^2}$ при $x \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Линейная функция $f(x) = ax + b$ совпадает с обратной к ней функцией, если $f(f(x)) = x$, т. е. $a^2x + ab + b = x$, что имеет место, если $a^2 = 1$ и $b(a+1) = 0$. Таким образом, либо $a = 1$ и $b = 0$, либо $a = -1$, а число b — произвольное.

4. 1) Нет, не будут. Пусть $f(x) = x + 1$. Обратной к ней является функция $g(x) = x - 1$. Пусть $f_1(x) = f(-x) = 1 - x$. Обратной ей является функция $g_1(x) = 1 - x$, тогда как $g(-x) = -x - 1$. В действительности обратной к функции $f(-x)$ будет функция $-g(x)$. Покажем это. Пусть $f(-x) = y$. Так как функция g обратна функции f, то $-x = g(y)$, поэтому $x = -g(y)$ — формула для обратной функции. Можно было рассуждать и иначе. Положим $h(x) = -g(x)$. Тогда $f_1(h(x)) = f(-h(x)) = f(g(x)) = x$. 2) Нет, не будут. Рассуждение, аналогичное только что проведенному, показывает, что обратной к функции $-f(x)$ является функция $g(-x)$. 3) Нет, обратной к функции $f(x+1)$ является функция $g(x) - 1$. 4) Да, являются.

5. Так как $|f(x)| = \dfrac{|x|}{|x|+1} < 1$, то все значения функции f лежат в области определения функции g. Осталось проверить, что $f(g(x)) = x$ при всех $x \in (-1;1)$ и $g(f(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Имеем

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{|g(x)|+1} = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{\frac{|x|}{1-|x|}+1} = \frac{x}{1-|x|} \cdot \frac{1-|x|}{1} = x.$$

Аналогично,

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{1-|f(x)|} = \frac{\frac{x}{|x|+1}}{1-\frac{|x|}{|x|+1}} = \frac{x}{|x|+1} \cdot \frac{|x|+1}{1} = x.$$

Следовательно, в силу доказанной теоремы, данные функции являются взаимно обратными. Обратите внимание, что нам не потребовалась проверка обратимости каждой из этих функций.

6. Приведем два рассуждения: геометрическое и формальное. Поскольку функция f нечетна, то ее график симметричен относительно начала координат. График функции g, обратной f, симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$, а потому он также симметричен относительно начала координат, откуда и следует, что функция g является нечетной.

А теперь формальное рассуждение. Так как функция f нечетна, то множество ее значений симметрично относительно нуля. Пусть t — одно из значений этой функции, $t = f(x)$. Тогда $g(-t) = g(-f(x)) = g(f(-x)) = -x = -g(f(x)) = -g(t)$, поэтому функция g нечетна.

7. Ответ: это $g_2(g_1(x))$. Действительно, если $f_1(f_2(y)) = x$, то $f_2(y) = g_1(x)$, а $y = g_2(g_1(x))$.

8. а) Функция $f(x) = x^3 - 6$ возрастает на всей числовой прямой, поэтому уравнение $a = b$ равносильно уравнению $f(a) = f(b)$. Данное уравнение равносильно уравнению $f(\sqrt[3]{x+6}\,) = f(f(x))$. Заметим, что $f(\sqrt[3]{x+6}\,) = x$, таким образом, данное уравнение равносильно уравнению $f(f(x)) = x$. Из результата задачи 52 темы 8 следует, что это уравнение равносильно и уравнению $f(x) = x$, или $x^3 - x - 6 = 0$, решением которого является $x = 2$. б) Собственно говоря, это есть переформулировка утверждения задачи 52 темы 8.

9. Будем доказывать «от противного». Пусть $f(x) \neq x$ для некоторого x из данного промежутка. Предположим, что $x < f(x)$. Поскольку функция f — возрастающая, то $f(x) < f(f(x)) = x$ — противоречие. Аналогичным образом разбирается случай $x > f(x)$.

Самостоятельная работа 5 (тема 9)

Вариант 1

1. Известно, что функции f и g являются взаимно обратными. Найдите $g(5)$, если а) $f(3) = 5$; б) $f(x) = 2x + 1$; в) $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{если } x \leqslant 1, \\ a - 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ Найдите все значения a, при которых функция f обратима.

3. Пусть функции f и g являются взаимно обратными. Найдите функцию, обратную функции: а) $2f(x)$; б) $2 - f(x)$.

4. Дана функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. Найдите формулу для функции, обратной функции f.

Вариант 2

1. Известно, что функции f и g являются взаимно обратными. Найдите $g(3)$, если а) $f(5) = 3$; б) $f(x) = 5x - 2$; в) $f(x) = \sqrt{5x-1}$.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{если } x > -1, \\ a - 2x, & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$ Найдите все значения a, при которых функция f обратима.

3. Пусть функции f и g являются взаимно обратными. Найдите функцию, обратную функции: а) $\frac{1}{2} f(x)$; б) $f(x) - 2$.

4. Дана функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Найдите формулу для функции, обратной функции f.

Вариант 3

1. Найдите формулу для функции, являющейся обратной функции: а) $f_1(x) = \sqrt{1-2x}$; б) $f_2(x) = x^2 + 4x - 1$ при $x \leqslant -2$.

2. Найдите все значения a, при которых является обратимой функция $f(x) = 2x + a|x-1|$.

3. а) Найдите формулу для функции, обратной функции $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$.
б) Найдите условие на числа a, b и c, при которых функция $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ является обратной самой себе.

4. Выясните, является ли обратимой функция, заданная соотношениями $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2}, & \text{если число } x \text{ рационально}, \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}, & \text{если число } x \text{ иррационально}. \end{cases}$

Вариант 4

1. Найдите формулу для функции, являющейся обратной функции: а) $f_1(x) = \sqrt[3]{1-x}$; б) $f_2(x) = 2x - x^2 + 1$ при $x \leqslant 1$.

2. Найдите все значения a, при которых является обратимой функция $f(x) = ax + 2|x+1|$.

3. а) Найдите формулу для функции, обратной функции $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$.
б) Найдите условие на числа a, b и c, при которых функция $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}$ является обратной самой себе.

4. Выясните, является ли обратимой функция, заданная соотношениями $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}}, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ x\sqrt{3}, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

Дополнительные упражнения по теме 9

5.1. Выясните, является ли обратимой функция, заданная следующими соотношениями: $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2}, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}}, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

5.2. а) Докажите, что функция $f(x) = a|x| + b|x-2|$ ни при каких a и b не является обратимой на всей числовой прямой. б) Найдите все значения a и b, при которых эта функция обратима на промежутке $[0; +\infty)$.

5.3. Докажите, что функция, обратная возрастающей (убывающей) функции, сама является возрастающей (соответственно, убывающей).

5.4. Покажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{2} + 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$ является обратимой и найдите обратную ей функцию.

5.5. Найдите все значения a, при которых обратима функция:
1) $f_1(x) = x^3 + ax$; 2) $f_2(x) = x^3 + ax^2$; 3) $f_3(x) = x^3 + \dfrac{a}{x}$;
4) $f_4(x) = x^3 + \dfrac{a}{x}$, где $x > 0$.

5.6. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 1 - 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ Найдите формулу для функции, обратной функции f.

5.7. Известно, что функция f, заданная на всей прямой, совпадает со своей обратной. а) Может ли функция f быть возрастающей и отличной от $g(x) = x$? б) Приведите пример нелинейной функции, заданной на всей прямой и совпадающей со своей обратной. в) Может ли такая функция f, отличная от функции $g(x) = x$, иметь промежутки возрастания?

5.8. Пусть g — функция, обратная функции $f(x) = x^3 + x$. 1) Найдите $g(10)$. 2) Найдите множество значений функции $g(x)$ на отрезке $[2; 10]$. 3) Решите уравнение $f(x) = g(x)$. 4) Решите неравенство $f(x) \geqslant g(x)$.

Тема 10. Множества, заданные уравнениями и неравенствами

С одной стороны, материал данной темы носит вспомогательный характер, не имеющий непосредственного отношения к содержанию этой главы. С другой стороны, очень важно ввести основную идею *аналитической геометрии* — взаимосвязь между множествами и их уравнениями. Ведь использование графиков функций для исследования уравнений — это и есть применение этой идеи. Далее, важно показать, что «x» и «y» — координаты точек плоскости — совершенно равноправны. Слишком усердное внимание именно к графикам функций может исказить понимание. Например, если учащиеся получили прямую, заданную уравнением $2x + 3y + 1 = 0$, то подчеркните, что нет особого смысла записывать это уравнение в виде $y = -\dfrac{2x+1}{3}$.

Конечно, эта тема сложна для учащихся, поскольку в ней, по сравнению с другими темами книги, существенно больше теоретических утверждений. Возможно, что доказывать их все не стоит. Тем не менее мы хотим подчеркнуть, что их формулировки весьма поучительны.

Начнем с того, что докажем одно вспомогательное утверждение, важное для дальнейшего изложения.

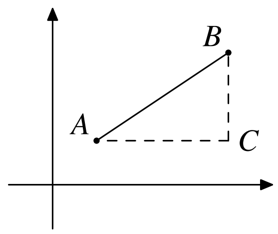
Теорема 10.1. Рассмотрим точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости. Тогда:

1) длина отрезка AB равна $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

2) середина отрезка AB имеет координаты $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$;

3) отрезки OA и OB перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

1) Предположим, что отрезок AB не параллелен ни одной из осей координат. Рассмотрим точку $C(x_2; y_1)$. Тогда $|AC| = |x_2 - x_1|$ и $|BC| = |y_2 - y_1|$. Точка C является вершиной прямого угла треугольника ABC (рисунок),

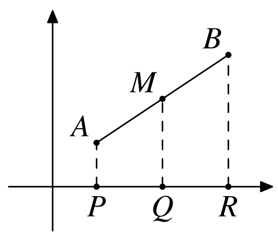


поэтому по теореме Пифагора

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда и следует искомая формула. Случай, когда отрезок AB параллелен одной из осей координат, рассмотрите самостоятельно.

2) Обозначим через P, Q и R проекции, соответственно, точек A, M и B на ось абсцисс (рисунок).



Поскольку $|AM| = |MB|$, то, в силу теоремы Фалеса, $|PQ| = |QR|$, значит, координата точки Q равна $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Тем самым и абсцисса точки M равна $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогично, ордината этой точки равна $\dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

3) В силу теоремы Пифагора и обратной ей теоремы OA и OB перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда $|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2$. Из формулы пункта 1 следует, что это равенство равносильно равенству

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

упростив которое, мы и получим, что $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Задача 62. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(-1;4)$ относительно: а) точки $M(2;3)$; б) прямой $x=2$; в) прямой $y=3$.

а) Обозначим через $(x;y)$ координаты точки B. Поскольку точка M является серединой отрезка AB, то $\dfrac{x-1}{2}=2$ и $\dfrac{y+4}{2}=3$, откуда $x=5$ и $y=2$.

б) В данном случае ордината точки B совпадает с ординатой точки A, а абсцисса является решением уравнения $\dfrac{x-1}{2}=2$. Ответ: $B(5;4)$.

в) Ответ: $B(-1;2)$.

Задача 63. Точка $A(3;2)$ является одной из вершин квадрата, центр которого совпадает с началом координат. Найдите координаты остальных вершин этого квадрата.

Вершина C этого квадрата симметрична вершине A относительно начала координат, а потому ее координатами являются $(-3;-2)$. Пусть $(a;b)$ — координаты вершины B. Поскольку отрезки OA и OB перпендикулярны, то $3a+2b=0$, значит, $a=2k$ и $b=-3k$. Так как $|OB|=|OA|$, то $k=\pm 1$. Следовательно, координатами точек B и D являются $(2;-3)$ и $(-2;3)$.

Теперь дадим основное определение этой темы. Пусть $F(x,y)$ некоторое выражение от двух переменных. Говорят, что множество $\mathcal{M}$ *задано уравнением* $F(x,y)=0$, если это множество состоит из всех тех и только тех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Например, если уравнение имеет вид $y-f(x)=0$, где f — это некоторая функция, то заданное им множество является графиком этой функции.

Задача 64. Опишите и изобразите множества, заданные уравнениями: 1) $|y|=1$; 2) $|x-1|=2$; 3) $|xy|=1$; 4) $xy+x+y+1=0$; 5) $|y|=x^2-2x$.

Казалось бы, первые два задания чрезвычайно просты, однако их разбор может предостеречь учащихся от следующей ошибки. Иногда они считают, что уравнение $y=1$ задает точку $(0;1)$ оси ординат, а уравнение $x=-1$ — точку $(-1;0)$ оси абсцисс. Подчеркните, что правильные ответы на эти задания: 1) две горизонтальные прямые $y=1$ и $y=-1$; 2) две вертикальные прямые $x=-1$ и $x=3$.

3) Поскольку

$$|xy|=1 \iff xy=1 \text{ или } xy=-1 \iff y=\frac{1}{x} \text{ или } y=-\frac{1}{x}\,,$$

то ответом являются две гиперболы.

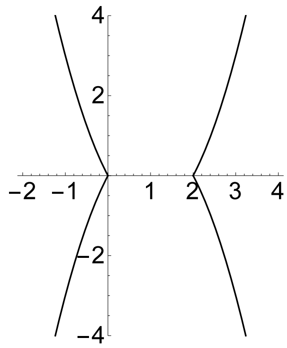
4) Первый шаг решения — алгебраический, а именно — разложение на множители. Так как $xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$, то $xy+x+y+1 = 0$ тогда и только тогда, когда $x = -1$ или $y = -1$. Поэтому ответ к этому заданию: объединение перпендикулярных прямых $x = -1$ и $y = -1$.

5) При решении данного задания «есть где ошибиться». Оно является хорошей проверкой того, насколько ваши учащиеся уверенно «работают с модулями».

Естественных подходов два. Покажем один из них. По определению модуля получаем, что

$$|y| = x^2 - 2x \iff \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, надо взять часть параболы $y = x^2 - 2x$, лежащую выше оси абсцисс, и добавить к ней часть параболы $y = 2x - x^2$, лежащую ниже оси абсцисс. Ответ — на рисунке.



Можно было ввести условие $x^2 - 2x \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 2$. А далее выделить части парабол $y = x^2 - 2x$ и $y = 2x - x^2$, лежащих в полуплоскостях, заданных указанными неравенствами.

Задача 65. Докажите, что точки прямой $y = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{5}{4}$ равноудалены от точек $A(3;0)$ и $B(0;2)$ (таким образом, эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AB).

Разумнее всего искать уравнение множества точек, равноудаленных от данных точек A и B. Записав в координатах равенство $|MA| = |MB|$, или $|MA|^2 = |MB|^2$, получим равенство

$$(x-3)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2, \text{ или } -6x + 9 = -4y + 4, \text{ или } y = \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}.$$

Таким образом, мы получили, что точка M равноудалена от A и B тогда и только тогда, когда она лежит на данной прямой, что и требовалось доказать.

Приведем, наконец, давно обещанный вывод уравнения прямой на плоскости. А идея доказательства та же, что была использована при решении предыдущей задачи. Возможно, что вторую часть этой теоремы даже формулировать не стоит, дабы не смущать (математически) незрелые умы.

Теорема 10.2. 1) Всякая прямая на плоскости задается линейным уравнением $ax+by+c=0$, где числа a и b одновременно не равны нулю и являются координатами вектора, перпендикулярного этой прямой. 2) Всякое линейное уравнение $ax+by+c=0$, где числа a и b одновременно не равны нулю, задает прямую на плоскости.

1) Пусть ℓ — это данная прямая. Выберем две произвольные точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, симметричные друг другу относительно этой прямой. Таким образом, прямая ℓ является серединным перпендикуляром к отрезку AB.

Как известно из курса геометрии, в этом случае прямая ℓ состоит из всех тех и только тех точек M, для которых $|MA|=|MB|$, или $|MA|^2=|MB|^2$, или

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2, \text{ или}$$
$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2=x^2-2x_2x+x_2^2+y^2-2y_2y+y_2^2,$$
$$\text{или} \quad (x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+\frac{x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2}{2}=0.$$

Таким образом, мы и получили искомое линейное уравнение, в котором $(a;b)=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ и есть координаты вектора $\overline{AB}$, перпендикулярного данной прямой ℓ.

2) Рассмотрим множество, заданное уравнением $ax+by+c=0$. Если $b=0$, то оно задает вертикальную прямую $x=-\dfrac{c}{a}$. Будем теперь считать, что $b\neq 0$. Точка $P(x_0;y_0)$, где $(x_0;y_0)=\left(0;-\dfrac{c}{b}\right)$ удовлетворяет данному уравнению, поэтому лежит в этом множестве. Рассмотрим точки $A(x_0+a;y_0+b)$ и $B(x_0-a;y_0-b)$. Заметим, что точка P является серединой отрезка AB. Если мы докажем, что уравнение $ax+by+c=0$ равносильно уравнению $|MA|=|MB|$, то отсюда и будет следовать, что данное уравнение задает прямую (состоящую из точек, равноудаленных от A и B).

Все, что осталось сделать — это провести алгебраические преобразования. Имеем

$$(x - x_0 - a)^2 + (y - y_0 - b)^2 - (x - x_0 + a)^2 - (y - y_0 + b)^2 = 0,$$
$$(x - x_0)^2 - 2a(x - x_0) + a^2 + (y - y_0)^2 - 2b(y - y_0) + b^2 -$$
$$- (x - x_0)^2 - 2a(x - x_0) - a^2 - (y - y_0)^2 - 2b(y - y_0) - b^2 = 0,$$
$$4a(x - x_0) + 4b(y - y_0) = 0,\ ax + by - ax_0 - by_0 = 0,\ ax + by + c = 0,$$

поскольку $-ax_0 - by_0 = c$.

Уравнение окружности на плоскости получить еще проще.

Теорема 10.3. Окружность радиуса R с центром в точке с координатами $(a; b)$ задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

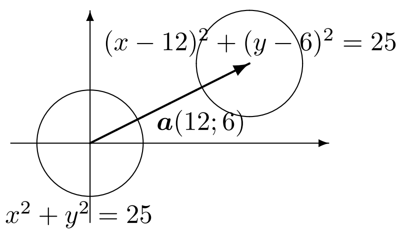
Окружностью с центром в точке P радиуса R называется множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии R от точки P. Следовательно, это те и только те точки M, для которых $|MP| = R$. В силу формулы для расстояния между точками плоскости, это те и только те точки, для координат $(x; y)$ которых имеет место равенство $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$. Возведя в квадрат обе его части, мы и получим уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Задача 66. Докажите, что графиком функции $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, где $a > 0$, является полуокружность радиуса a.

График функции f задается уравнением $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, равносильным системе

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Уравнение этой системы задает окружность радиуса a с центром в начале координат. Неравенство $y \geqslant 0$ означает, что мы должны взять только те точки этой окружности, которые лежат не ниже оси абсцисс. В результате мы и получаем «верхнюю» полуокружность.



На рисунке на предыдущей странице изображены две окружности одинакового радиуса, центром одной является начало координат, центром второй — точка $P(12;6)$. Как показывает следующая теорема, то, как связаны друг с другом уравнения этих окружностей, не случайно.

Теорема 10.4. Пусть множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $F(x,y)=0$. Тогда уравнение $F(x-a,y-b)=0$ задает образ множества $\mathcal{M}$ при параллельном переносе на вектор $\boldsymbol{c}(a;b)$.

Обозначим через $\mathcal{M}'$ образ множества $\mathcal{M}$ при параллельном переносе на вектор $\boldsymbol{c}(a;b)$. Рассмотрим точку $B(x_1;y_1)\in\mathcal{M}'$. По определению эта точка является образом точки $A(x_0;y_0)$ множества $\mathcal{M}$ при параллельном переносе. Значит, $(x_1;y_1)=(x_0+a;y_0+b)$. При подстановке координат точки B в уравнение $F(x-a,y-b)=0$ получаем, что

$$F(x_1-a,y_1-b)=F(x_0+a-a,y_0+b-b)=F(x_0,y_0)=0,$$

поскольку точка A лежит в множестве $\mathcal{M}$. Следовательно, координаты точки B удовлетворяют уравнению $F(x-a,y-b)=0$. Теперь рассмотрим точку $B(x_1;y_1)$, такую, что $F(x_1-a,y_1-b)=0$. Пусть $(x_0;y_0)=(x_1-a;y_1-b)$. Так как по предположению $F(x_0,y_0)=F(x_1-a,y_1-b)=0$, то точка $A(x_0;y_0)$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$. Поскольку $x_1=x_0+a$ и $y_1=y_0+b$, то точка B получена из точки A при ее параллельном переносе на заданный вектор, следовательно, $B\in\mathcal{M}'$.

Таким образом, мы доказали, что множество $\mathcal{M}'$ состоит из всех тех и только тех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x-a,y-b)=0$, что, в соответствии с определением, и означает, что это уравнение задает множество $\mathcal{M}'$.

Почти все утверждения следующей теоремы обобщают утверждения, уже известные нам по свойствам графиков функций.

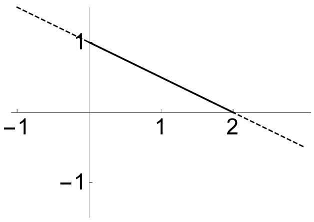
Теорема 10.5. Пусть множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $F(x,y)=0$. Тогда:
1) уравнение $F(-x,y)=0$ задает множество, симметричное множеству $\mathcal{M}$ относительно оси ординат;
2) уравнение $F(x,-y)=0$ задает множество, симметричное множеству $\mathcal{M}$ относительно оси абсцисс;
3) уравнение $F(-x,-y)=0$ задает множество, симметричное множеству $\mathcal{M}$ относительно начала координат;
4) уравнение $F(2x_0-x,2y_0-y)=0$ задает множество, симметричное

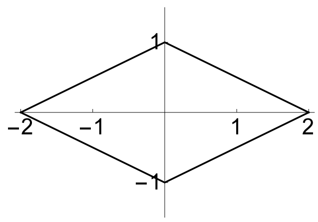
множеству $\mathcal{M}$ относительно точки с координатами $(x_0; y_0)$;
5) уравнение $F(y, x) = 0$ задает множество, симметричное множеству $\mathcal{M}$ относительно прямой $y = x$.

Все доказательства следуют одной и той же схеме, поэтому ограничимся доказательством утверждения 1. Было доказано, что точки с координатами $(x; y)$ и $(-x; y)$ симметричны друг другу относительно оси ординат. Обозначим через $\mathcal{M}'$ множество, симметричное множеству $\mathcal{M}$ относительно оси ординат. Точка $A(x; y)$ принадлежит множеству $\mathcal{M}'$ тогда и только тогда, когда точка $B(-x; y)$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$, что имеет место тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют данному уравнению, т. е. тогда и только тогда, когда $F(-x, y) = 0$. Доказательство закончено.

Следствие. Пусть множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $F(x, y) = 0$. Тогда, если:
1) $F(-x, y) = F(x, y)$, то множество $\mathcal{M}$ симметрично относительно оси ординат;
2) $F(x, -y) = F(x, y)$, то множество $\mathcal{M}$ симметрично относительно оси абсцисс;
3) $F(-x, -y) = F(x, y)$ или $F(-x, -y) = -F(x, y)$, то множество $\mathcal{M}$ симметрично относительно начала координат;
4) $F(y, x) = F(x, y)$, то множество $\mathcal{M}$ симметрично относительно прямой $y = x$.

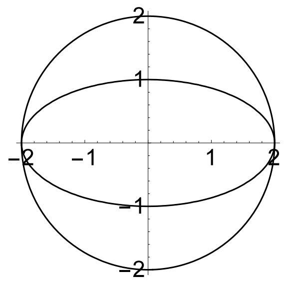
Задача 67. Изобразите множество, заданное уравнением $|x| + 2|y| = 2$.





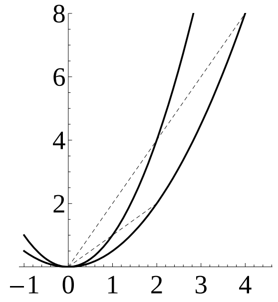
Если $F(x, y) = |x| + 2|y|$, то ясно, что $F(-x, y) = F(x, y)$ и $F(x, -y) = F(x, y)$, значит, в силу следствия к предыдущей теореме, искомое множество симметрично относительно осей координат. Поэтому достаточно нарисовать его часть, лежащую в одном из координатных углов, а затем отразить ее относительно осей координат. Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то мы получаем уравнение $x + 2y = 2$, или $y = 1 - \dfrac{x}{2}$, задающее прямую, проходящую через точки $A(2; 0)$ и $B(0; 1)$. На левом рисунке пунктиром изображена эта прямая и выделен тот ее отрезок, который лежит в первом координатном угле. На правом рисунке изображено искомое множество — ромб (с вершинами на осях координат).

На следующем рисунке изображена окружность $x^2 + y^2 = 4$ и кривая, заданная уравнением $x^2 + 4y^2 = 4$ (называемая *эллипсом*).



Второе уравнение получается из первого подстановкой в первое уравнение $2y$ вместо y. Более формально, если $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, то $F(x, y) = 0$ — это первое уравнение, а $F(x, 2y) = 0$ — второе.

Покажем еще одну картинку. На следующем рисунке изображены графики $y = x^2$ и $y = \dfrac{x^2}{2}$. Рассмотрим точки $A(1; 1)$ и $B(2; 4)$, лежащие на первом графике, и точки $C(2; 2)$ и $D(4; 8)$, лежащие на втором графике. Точки A и C лежат на прямой $y = x$, точки B и D — на прямой $y = 2x$.



При этом

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = 2,$$

следовательно, треугольники OAB и OCD подобны друг другу с коэффициентом подобия 2.

Задача 68. а) Докажите, что при сжатии окружности в 2 раза к оси абсцисс вдоль оси ординат получится эллипс, заданный уравнением $x^2 + 4y^2 = 4$. б) Докажите, что параболы $y = x^2$ и $y = \dfrac{x^2}{2}$ подобны с коэффициентом подобия 2.

а) Рассмотрим точку $M(a; b)$, лежащую на данной окружности. Ее образом при сжатии в 2 раза к оси ординат является точка M' с координатами $(x; y)$, где $x = a$ и $y = \dfrac{b}{2}$. Поскольку $a^2 + b^2 = 4$, $a = x$ и $b = 2y$, то $x^2 + 4y^2 = 4$. Таким образом, точка M' лежит на указанном эллипсе. Обратно, если точка $M'(x; y)$ лежит на эллипсе, то точка $M(x; 2y)$ будет лежать на окружности.

Заметим, что при помощи указанного соображения мы можем найти площадь области, ограниченной эллипсом $x^2+4y^2 = 4$. Рассмотрим правильный $2n$-угольник, вписанный в окружность радиуса 2, две вершины которого лежат на оси абсцисс. Разобъем этот многоугольник на два треугольника и $n-2$ трапеции вертикальными прямыми, проходящими через не лежащие на оси абсцисс вершины данного многоугольника. При сжатии в 2 раза к оси абсцисс площади всех треугольников и трапеций уменьшатся в 2 раза. В результате мы получим $2n$-угольник, вписанный в эллипс, площадь которого вдвое меньше площади исходного многоугольника. При увеличении числа n площадь исходного многоугольника приближается к площади круга, а площадь «сжатого» многоугольника — к площади, ограниченной эллипсом. Следовательно, площадь этой области в 2 раза меньше площади исходного круга, значит, она равна 2π.

б) Рассмотрим преобразование плоскости, сопоставляющее точке $M(a; b)$ точку $M'(2a; 2b)$. Если точка $A(x_1; y_1)$ перешла в точку A', а точка $B(x_2; y_2)$ — в точку B', то

$$|A'B'| = \sqrt{(2x_2 - 2x_1)^2 + (2y_2 - 2y_1)^2} = \\ = 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2|AB|,$$

таким образом, указанное соответствие является преобразованием подобия с коэффициентом 2. Конечно, можно было рассуждать геометрически, поскольку отрезок AB является средней линией треугольника $OA'B'$.

Рассмотрим точку $M(a; b)$, лежащую на параболе $y = x^2$, значит, $b = a^2$. Ее образом при указанном преобразовании является точка $M'(x; y)$, где $x = 2a$ и $y = 2b$. Так как $x^2 = 4a^2 = 4b = 2y$, то точка

M' лежит на параболе $y = \dfrac{x^2}{2}$. Обратно, если точка $M'(x; y)$ лежит на параболе $y = \dfrac{x^2}{2}$, то точка $M(x/2; y/2)$ будет лежать на параболе $y = x^2$.

Конечно, утверждения, доказанные в предыдущей задаче, являются частными случаями общей теоремы.

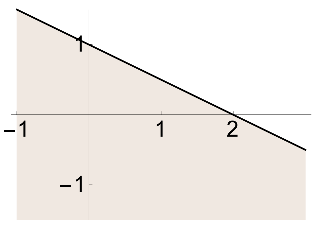
Теорема 10.6. Пусть множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $F(x, y) = 0$. Тогда уравнение 1) $F(kx, ky) = 0$; 2) $F(kx, y) = 0$; 3) $F(x, ky) = 0$ задает множество, получающееся из множества $\mathcal{M}$ при $k > 1$ сжатием в k раз, а при $0 < k < 1$ растяжением в $\dfrac{1}{k}$ раз:
1) относительно начала координат;
2) к (от) оси ординат вдоль оси абсцисс;
3) к (от) оси абсцисс вдоль оси ординат.

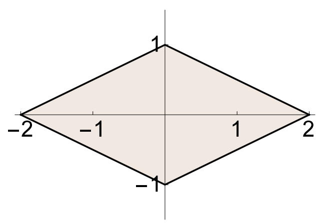
Доказательства приводить не будем, поскольку рассуждения в точности повторяют рассуждения, использованные при решении предыдущей задачи.

Определение *множества, заданного неравенством*, аналогично определению множества, заданного уравнением. Под таковым мы понимаем множество всех тех и только тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

Задача 69. Изобразите множество, заданное неравенством:
а) $x + 2y \leqslant 2$; б) $|x| + 2|y| \leqslant 2$.

а) Перепишем данное неравенство в виде $y \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}$. Таким образом, оно задает точки, лежащие на прямой $y = 1 - \dfrac{x}{2}$, либо лежащие ниже ее (левый рисунок).





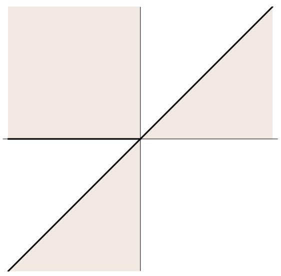
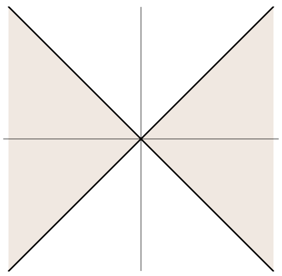
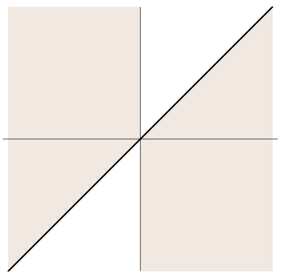
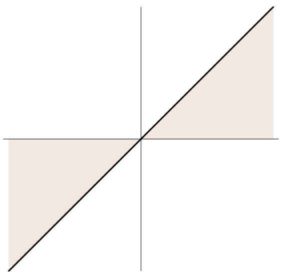
б) Воспользуемся той же идеей, что и при решении задачи 67. Конечно, искомое множество симметрично относительно осей и начала координат, а потому для его построения достаточно изобразить его часть, лежащую в первом координатном угле. Эта часть задается неравенством $y \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}$, следовательно, является треугольником. Окончательный ответ изображен на правом рисунке.

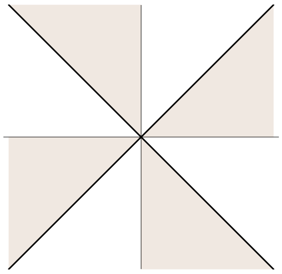
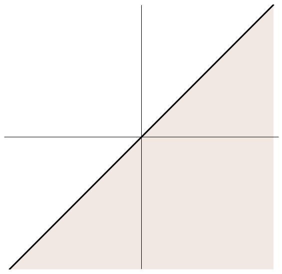
Вообще, неравенство $y \leqslant f(x)$ задает множество точек плоскости, лежащих на графике данной функции f, либо расположенных ниже его. В частности, линейное неравенство $ax + by + c \leqslant 0$ задает одну из полуплоскостей, на которые разбивает плоскость прямая, заданная уравнением $ax + by + c = 0$.

Последняя из предлагаемых в этой теме задач очень хорошо иллюстрирует тему «Свойства числовых неравенств».

Задача 70. Изобразите на координатной плоскости множества, заданные неравенствами: 1) $y \leqslant x$; 2) $\dfrac{y}{x} \leqslant 1$; 3) $\dfrac{x}{y} \geqslant 1$; 4) $y^2 \leqslant x^2$; 5) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{y}$; 6) $y^3 \leqslant x^3$; 7) $\dfrac{y}{x} \leqslant \dfrac{x}{y}$.

Мы приведем здесь только ответы, расположенные в «произвольном порядке». При этом на этих шести рисунках приведены ответы к семи заданиям...

Задачи для домашних заданий по теме 10

1. Изобразите множества, заданные уравнениями:
1) $x^2 + y^2 = 2|x + y|$; 2) $x^2 + y^2 = 2|x| + 2|y|$; 3) $x^2 + y^2 = 2|x| - 2|y|$; 4) $x^2 + y^2 = 1 + 2|xy|$.

2. Изобразите множества, заданные неравенствами: а) $x^2y + xy^2 \leqslant xy$; б) $(x^2 + y^2 - 2)\sqrt{|x| - 1} \leqslant 0$; в) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 + 4 \leqslant 0$.

3. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $|x - y| = x^2 - y^2$.

4. Изобразите множества, заданные неравенствами:
1) $xy \leqslant 1$; 2) $y \leqslant \dfrac{1}{x}$; 3) $x \leqslant \dfrac{1}{y}$; 4) $\dfrac{1}{xy} \geqslant 1$; 5) $|xy| \leqslant 1$.

5. Изобразите множество, заданное уравнением $f(x) = f(y)$, если:
1) $f(x) = 2x+3$; 2) $f(x) = x^3+3x$; 3) $f(x) = x^2+2x-3$; 4)* $f(x) = x^3-3x$.

6. а) Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством $x^2 + |x + y| \leqslant 2$. б) Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2 + |x + a| \leqslant 2$ имеет положительные решения.

7. Найдите множества, состоящие из точек: а) сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек плоскости равна заданному числу; б) разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек плоскости равна заданному числу.

8. Найдите координаты точки M', симметричной точке $M(a; b)$ относительно прямой $y = -x$.

9. а) Пусть $a \neq b$. Докажите, что уравнение $y = \sqrt{-(x - a)(x - b)}$ задает верхнюю полуокружность, диаметром которой является отрезок оси абсцисс с концами в точках a и b. б) Задайте уравнением нижнюю полуокружность, построенную на этом отрезке.

10. Рассмотрим множество, заданное неравенством $x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$.
1) Выясните, является ли оно симметричным относительно: а) начала

координат; б) осей координат; в) прямой $y = x$; г) прямой $y = -x$.
2) Докажите, что это множество содержит круг радиуса $\sqrt{2}$ и содержится в круге радиуса $\sqrt{6}$.
3) Докажите, что оно содержится в квадрате со стороной 4.

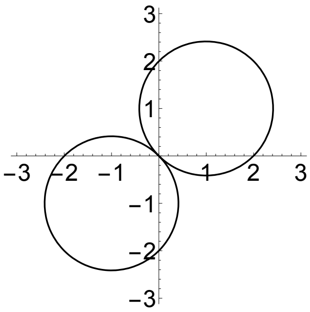
11. Приведите пример такого выражения $F(x, y)$, что $F(-x, y) \neq F(x, y)$, но множество, заданное уравнением $F(x, y) = 0$ симметрично относительно оси ординат.

12. Докажите, что если $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = kF(x, y)$, где $k \neq 0$, то множество, заданное уравнением $F(x, y) = 0$, симметрично относительно точки $P(x_0, y_0)$.

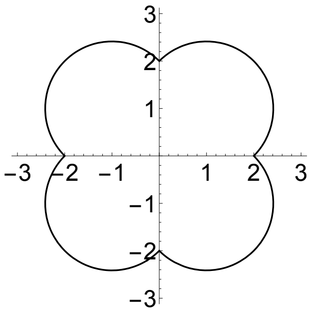
13. Сформулируйте известные ранее утверждения о графиках функций, которые следуют из утверждений, доказанных в данной теме.

Решения домашних задач по теме 10

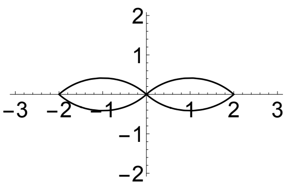
1. Ответы — на рисунках.



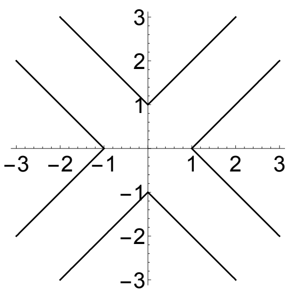
(1)



(2)

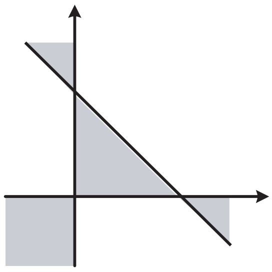


(3)

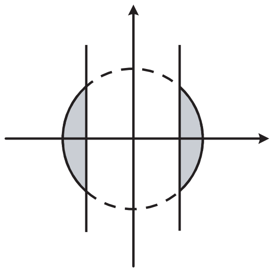


(4)

2. Ответы — на рисунках.



(а)

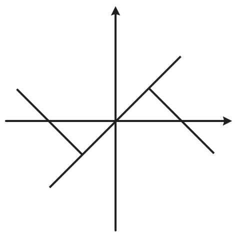


(б)

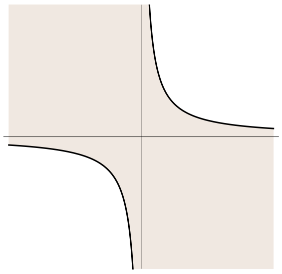
Обратите внимание, что на правом рисунке прямые $x = \pm 1$ целиком входят в искомое множество, тогда как дуги окружности $x^2 + y^2 = 2$ между этими прямыми в него не входят.

в) Преобразуем неравенство к виду $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0$, откуда следует, что $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. Таким образом, искомое множество является кольцом, границами которого являются окружности радиусов 1 и 2 с центрами в начале координат.

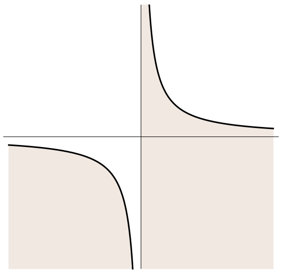
3. Если $x \geqslant y$, то мы получим уравнение $x - y = x^2 - y^2$, или $(x - y)(x + y - 1) = 0$, таким образом, $y = x$ или $y = 1 - x$. Из точек второй прямой $y = 1 - x$ условию $x \geqslant y$ удовлетворяет только ее «нижняя половина»: $x \geqslant 1 - x$ при $x \geqslant \frac{1}{2}$. Аналогичным образом можно было бы и провести исследование в предположении, что $x \leqslant y$. Однако естественнее воспользоваться симметрией искомого множества. Если положить $F(x, y) = |x - y| - (x^2 - y^2)$, то $F(-x, -y) = F(x, y)$, следовательно, искомое множество симметрично относительно начала координат. Добавив к найденному множеству его образ при симметрии относительно точки O, получим ответ (рисунок).



4. Ответы — на рисунках.

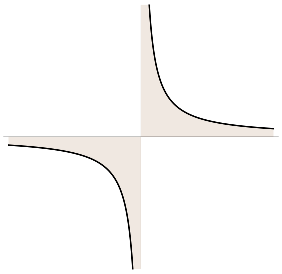


(1)

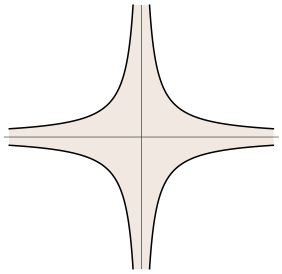


(2)

(3)



(4)



(5)

5. Ясно, что во всех четырех случаях множество, заданное уравнением $y = x$, — биссектриса первого и третьего координатных углов — входит в искомое множество.

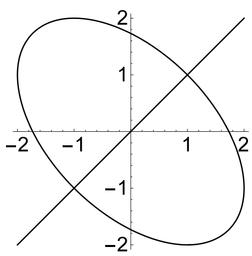
1) Ясно, что $2x + 3 = 2y + 3$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Поэтому искомое множество совпадает с прямой $y = x$.

2) Никаких алгебраических преобразований делать не надо. Так как в данном случае функция f является возрастающей, то $f(x) = f(y)$

тогда и только тогда, когда $x = y$. Поэтому ответ совпадает с ответом к заданию 1.

3) Ясно, что в данном случае после разложения на множители мы получим уравнение $(x-y)(x+y+2) = 0$. Поэтому искомое множество является объединением прямых $y = x$ и $x + y = -2$.

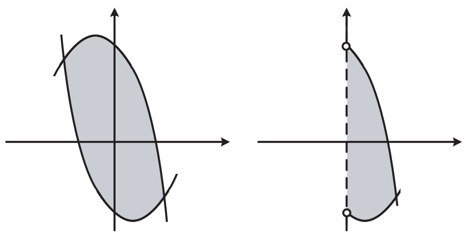
4) В действительности еще нет техники, позволяющей изобразить ответ. После разложения на множители мы получим уравнение $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0$. Уравнение $x^2 + xy + y^2 = 3$ задает эллипс, симметричный относительно биссектрис координатных углов (рисунок).



6. а) Напишем данное неравенство в виде $|x + y| \leqslant 2 - x^2$ и равносильную ему систему неравенств

$$\begin{cases} x + y \leqslant 2 - x^2, \\ x + y \geqslant x^2 - 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \leqslant 2 - x - x^2, \\ y \geqslant x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Первое из неравенств задает множество точек, лежащих ниже параболы $y = 2 - x - x^2$ (или на ней), второе – множество точек, лежащих выше параболы $y = x^2 - x - 2$ (или на ней самой). Полученная система задает их общую часть (пересечение), каковым является множество, ограниченное дугами этих парабол между точками их пересечения (левый рисунок). Так как $2 - x - x^2 = x^2 - x - 2$ при $x = \pm\sqrt{2}$, то этими точками являются $A(\sqrt{2}\,; -\sqrt{2}\,)$ и $B(-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,)$.



б) Возьмем правую часть построенного множества (правый рисунок на предыдущей странице). На геометрическом языке поставленный вопрос звучит так: при каких значениях a горизонтальная прямая $y = a$ пересекает это множество? Ответ очевиден: при $a \in \left[-\frac{9}{4}; 2\right)$.

7. Обозначим через A и B данные точки. И подчеркнем прежде всего, что нам совсем не обязательно считать, что «координатами точки A является некоторая пара $(x_1; y_1)$, а координатами точки B — пара $(x_2; y_2)$». Дело в том, что мы вправе выбрать систему координат так, как захотим. Поэтому выберем ее таким образом, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс и были бы симметричны относительно начала координат. А потому нам даны точки $A(a; 0)$ и $B(-a; 0)$.

а) Координатная запись равенства $|MA|^2 + |MB|^2 = c$ имеет вид:

$$(x-a)^2 + y^2 + (x+a)^2 + y^2 = c, \text{ или } 2(x^2+y^2) = c - 2a^2.$$

Значит, если $c < 2a^2$, или $2c < 4a^2 = |AB|^2$, то таких точек не существует; если $2c = |AB|^2$, то такой точкой является середина отрезка AB; если же $2c > |AB|^2$, то искомым множеством является окружность с центром в середине отрезка AB, радиус которой равен

$$\sqrt{\frac{c}{2} - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2c - |AB|^2}\,.$$

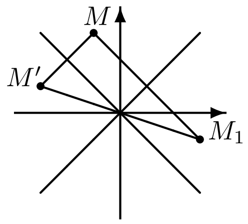
б) Координатная запись равенства $|MB|^2 - |MA|^2 = c$ имеет вид:

$$(x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2 = c, \text{ или } 4ax = c, \text{ или } x = \frac{c}{4a}\,.$$

Значит, искомым множеством является прямая, перпендикулярная отрезку AB.

8. Координаты точки M' равны $(-b; -a)$. До ответа нетрудно догадаться. А доказательство проще всего провести следующим образом. Прямые $y = x$ и $y = -x$ содержат средние линии треугольника с вершинами в точках $(a; b)$, $(b; a)$ и $(-b; -a)$, откуда и следует требуемое утверждение.

Приведем и более подробное рассуждение. Пусть точка M' симметрична точке M относительно прямой $y = -x$, а точка M_1 симметрична точке M относительно прямой $y = x$ (см. рисунок на следующей странице).



Поскольку прямые $y = x$ и $y = -x$ перпендикулярны, то отрезок MM' параллелен первой из них, а отрезок MM_1 — второй. Поэтому эти прямые содержат средние линии треугольника MM_1M', значит, точка их пересечения есть середина отрезка $M'M_1$. Так как эти прямые пересекаются в начале координат, то начало координат и есть середина отрезка $M'M_1$. Таким образом, точки M' и M_1 симметричны относительно начала координат.

Если $(a; b)$ — координаты точки M, то, как известно, $(b; a)$ — координаты точки M_1, поэтому $(-b; -a)$ — координаты точки M'.

Заметим, что для доказательства симметричности точек M' и M_1 относительно начала координат можно было воспользоваться тем, что композиция двух осевых симметрий относительно перпендикулярных прямых есть центральная симметрия относительно точки пересечения этих прямых.

9. а) Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-a)(x-b)+y^2=0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

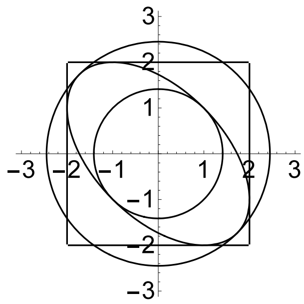
Преобразуем первое уравнение к виду:

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\frac{(a+b)^2}{4}+y^2=0, \text{ или } \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2=\frac{(a-b)^2}{4}.$$

Таким образом, уравнение системы задает окружность радиусом $\dfrac{|a-b|}{2}$ и центром в точке $\left(\dfrac{a+b}{2}; 0\right)$ оси абсцисс. Условие $y \geqslant 0$ означает, что мы должны взять точки этой окружности, лежащие в верхней полуплоскости.

б) Конечно, это уравнение $y = -\sqrt{-(x-a)(x-b)}$.

10. Следующий рисунок есть иллюстрация к заданиям 2 и 3.



1) Положим $F(x,y) = x^2+xy+y^2-3$. Так как $F(-x,-y) = F(x,y) = F(y,x) = F(-y,-x)$, то данное множество симметрично относительно начала координат и прямых $y = \pm x$. Конечно, мы не доказывали аналога теоремы о симметричности множества, заданного уравнением, однако нет никаких сомнений в том, что она верна (и доказательство ничем не отличается).

Конечно, $F(-x,y) \neq F(x,y)$, но отсюда не следует, что данное множество не симметрично относительно оси ординат (смотрите задачу 11). Необходимо точное рассуждение. Фиксируем значение $y = c$ и рассмотрим пересечение данного множества и прямой $y = c$, где $c \neq 0$. Абсциссы точек этого пересечения являются решением квадратного неравенства $x^2 + cx + c^2 - 3 \leqslant 0$. Так как $c \neq 0$, то промежуток $[x_1; x_2]$, являющийся решением этого неравенства, не симметричен относительно нуля. Следовательно, и данное множество не симметрично относительно оси ординат.

Аналогичным образом доказывается, что данное множество не симметрично и относительно оси абсцисс.

2) Если $x^2 + y^2 \leqslant 2$, то $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2} \leqslant 1$, поэтому $x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$. Таким образом, всякая точка круга радиуса $\sqrt{2}$ принадлежит данному множеству. Если $x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$, то, поскольку $xy \geqslant -\dfrac{x^2+y^2}{2}$, имеет место неравенство

$$\frac{x^2+y^2}{2} = x^2 + y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} \leqslant x^2 + y^2 + xy \leqslant 3,$$

значит, $x^2 + y^2 \leqslant 6$. Таким образом, всякая точка данного множества лежит и в круге радиуса $\sqrt{6}$.

3) Рассмотрим горизонтальную прямую $y = c$ и найдем все значения c, при которых она пересекается с данным множеством. Неравенство $x^2 + cx + c^2 - 3 \leqslant 0$ имеет решения, если $D = c^2 - 4(c^2 - 3) = 12 - 3c^2 \geqslant 0$, поэтому $|c| \leqslant 2$. Следовательно, данное множество лежит в полосе $|y| \leqslant 2$. Так как оно симметрично относительно прямой $y = x$, то оно лежит и в вертикальной полосе $|x| \leqslant 2$. Значит, оно содержится в пересечении этих полос, которое и есть квадрат со стороной 4.

11. Например, $F(x, y) = (|x| - 1)y(|x - 1| + 1)$.

12. Рассмотрим множество $\mathcal{M}$, заданное уравнением $F(x, y) = 0$. Как было доказано, уравнение $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$ задает множество, симметричное $\mathcal{M}$ относительно точки P. Однако из условия на F следует, что $F(x, y) = 0 \iff F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$. Таким образом, уравнение $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$ задает то же самое множество $\mathcal{M}$, откуда и следует, что оно симметрично относительно точки P.

13. Приведем несколько примеров таких утверждений (мы ограничимся свойствами графиков четных и нечетных функций).

Известно, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Выведем это утверждение из Следствия теоремы 10.5. Пусть f — некоторая функция. Если $F(x, y) = y - f(x)$, то, как уже было сказано, множество, заданное уравнением $F(x, y) = 0$, и есть график функции f. Если $F(-x, y) = F(x, y)$, то множество, заданное уравнением $F(x, y) = 0$, симметрично относительно оси ординат. Ясно, что указанное равенство имеет место тогда и только тогда, когда функция f — четная.

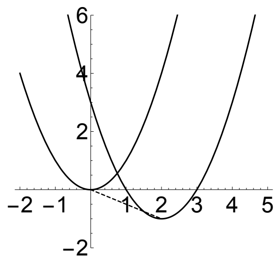
Утверждение о том, что график функции $g(x) = f(-x)$ симметричен графику функции f относительно оси ординат, есть следствие пункта 1 теоремы 10.5.

Наконец, утверждение о том, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат, есть частный случай пункта 3 Следствия теоремы 10.5.

Тема 11. Преобразования графиков функций

Задача 71. Покажите, что парабола $y = x^2 - 4x + 3$ может быть получена из стандартной параболы $y = x^2$ при помощи параллельного переноса.

Казалось бы, а что здесь доказывать? Находим вершину $A(2; -1)$ параболы $y = x^2 - 4x + 3$ и говорим, что, значит, параболу $y = x^2$ надо сдвинуть на 2 единицы вправо и на 1 единицу вниз (рисунок).



Конечно, вершина параболы $y = x^2$ — начало координат — при указанном сдвиге перейдет в точку A, но ниоткуда следует, что при таком сдвиге все точки первой параболы окажутся на второй параболе. Другими словами, почему «форма» параболы зависит только от коэффициента при x^2 ?

Самое время воспользоваться теоремой из предыдущей темы. Для этого положим $F(x, y) = y - x^2$. Уравнение $F(x, y) = 0$ задает первую параболу. Выделим полный квадрат и приведем уравнение второй параболы к виду $y = (x-2)^2 - 1$, или $y + 1 - (x-2)^2 = 0$, т. е. $F(x-2, y+1) = 0$. Следовательно, она есть результат параллельного переноса параболы $y = x^2$ на вектор $\boldsymbol{a}(2; -1)$.

Задача 72. Обобщите утверждение предыдущей задачи.

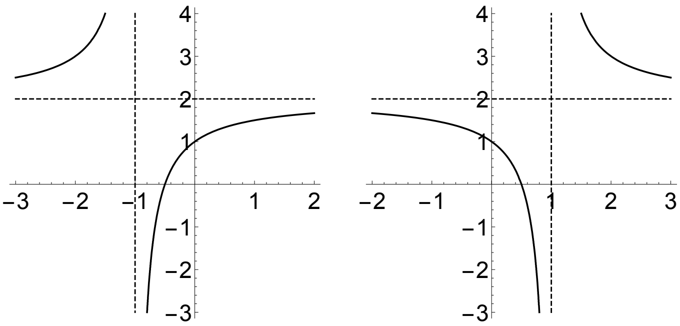
Парабола $y = ax^2 + bx + c$ может быть получена параллельным переносом из параболы $y = ax^2$. Проведем стандартное преобразование: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$ и положим $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ и $y_0 = c - \dfrac{b^2}{4a}$. Уравнение параболы приобрело вид $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, или $y - y_0 - a(x - x_0)^2 = 0$, т. е. $F(x - x_0, y - y_0) = 0$, где $F(x, y) = y - ax^2$, откуда и следует, что она получается параллельным переносом параболы $y = ax^2$.

Задача 73. Обобщите утверждение предыдущей задачи.

Если $g(x) = f(x-a)+b$, то график функции g получается из графика функции f при параллельном переносе на вектор с координатами $(a; b)$, т. е. при сдвиге на a единиц вдоль оси абсцисс и на b единиц вдоль оси ординат. При этом направление сдвига зависит от знака соответствующего числа. Действительно, положив $F(x, y) = y - f(x)$, получим, что уравнение $F(x - a, y - b) = 0$, т. е. $y - b - f(x - a) = 0$, и является уравнением $y = f(x - a) + b = g(x)$, задающим график функции g.

Задача 74. Постройте графики дробно-линейных функций:
а) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ и б) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Поскольку $\dfrac{2x+1}{x+1} = \dfrac{2x+2-1}{x+1} = 2 - \dfrac{1}{x+1}$, то график первой функции получается из гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$ при помощи сдвига на 1 влево (вдоль оси абсцисс) и на 2 вверх (вдоль оси ординат). В частности, искомый график есть гипербола, асимптотами которой являются прямые $x = -1$ и $y = 2$ (левый рисунок).



(а) (б)

Аналогично, $\dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$, поэтому второй график получается из гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ при помощи параллельного переноса на 1 вправо и на 2 вверх (правый рисунок).

Задача 75. Сформулируйте и докажите утверждение о связи графиков функций предыдущей задачи.

Из рисунков, на которых изображены графики этих функций, ясно видно, что эти графики симметричны относительно оси ординат. Докажем это утверждение. Если $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$, то $f(-x) = \dfrac{-2x+1}{-x+1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$. А как было доказано в предыдущей теме (см. задачу 13 домашнего задания по теме 10), графики функций $f(x)$ и $f(-x)$ симметричны друг другу относительно оси ординат.

Функции вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ называются *дробно-линейными.*

Задача 76. Сформулируйте и докажите общее утверждение о графиках дробно-линейных функций.

График дробно-линейной функции $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ получается из некоторой гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ при параллельном переносе на вектор $(-c; a)$. Действительно,

$$\frac{ax+b}{x+c} = \frac{ax+ac+b-ac}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c} = a + \frac{k}{x+c}\,,$$

где $k = b - ac$.

Задача 77. Докажите, что точка пересечения асимптот является центром симметрии гиперболы — графика дробно-линейной функции.

Поскольку функция $y = \dfrac{k}{x}$ является нечетной, то начало координат есть центр симметрии ее графика. При параллельном переносе гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ начало координат перейдет в точку $(-c; a)$, которая и есть точка пересечения асимптот гиперболы $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$.

Задача 78. Найдите условие на числа x_0 и y_0, при котором точка с координатами $(x_0; y_0)$ есть центр симметрии графика функции f.

Рассмотрим точку $M(x; f(x))$ графика функции. Точка M', симметричная точке M относительно точки $P(x_0; y_0)$, имеет координаты $(2x_0 - x; 2y_0 - f(x))$. Эта точка лежит на графике функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$. Полученное соотношение удобно переписать в виде:

$$f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0.$$

Заметим, что если положить в этом равенстве $x = x_0$, то мы получим, что $y_0 = f(x_0)$.

Приведем также и другое, более формальное, решение этой задачи, сведя ее к частному случаю утверждения задачи 12 домашнего задания по предыдущей теме. Положим $k = -1$. Если $F(x, y) = y - f(x)$, то равенство $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = -F(x, y)$ приобретает вид:

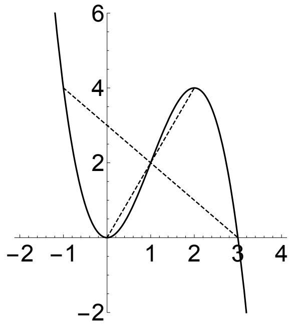
$$2y_0 - y - f(2x_0 - x) = f(x) - y, \text{ или } f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0.$$

Задача 79. Найдите центр симметрии графика кубической функции $f(x) = 3x^2 - x^3$.

Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Число x_0 должно быть таким, чтобы сумма $f(x) + f(2x_0 - x)$ не зависела от x, т. е. была постоянным числом. Поэтому проведем прямое вычисление.

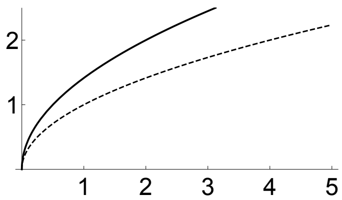
$$f(x)+f(2x_0-x)=3x^2-x^3+3(2x_0-x)^2-(2x_0-x)^3=$$
$$=3x^2-x^3+12x_0^2-12x_0x+3x^2-8x_0^3+12x_0^2x-6x_0x^2+x^3=$$
$$=12x_0^2-8x_0^3+12(x_0^2-x_0)x+6(1-x_0)x^2.$$

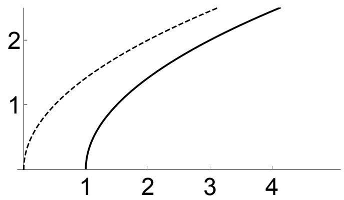
Полученное выражение не зависит от x при $x_0=1$. Подставив в него $x_0=1$, получим, что $2y_0=4$, откуда $y_0=2$. На рисунке изображен график этой функции.



Задача 80. а) Задайте формулой функцию, график которой получен из графика функции $f(x)=\sqrt{x}$ последовательным применением следующих преобразований: сжатия в 2 раза к оси ординат (вдоль оси абсцисс) и параллельным переносом на 1 вправо (вдоль оси абсцисс). б) Опишите преобразования, последовательным применением которых из графика функции $f(x)=\sqrt{x}$ получается график функции $g(x)=$ $=\sqrt{2x-1}$.

а) Из теорем предыдущего раздела следует, что при сжатии графика функции $f(x)$ в 2 раза вдоль оси абсцисс мы получим график функции $f(2x)$. На левом рисунке пунктиром изображен график данной функции $f(x)=\sqrt{x}$, сплошной линией — промежуточный график $y=\sqrt{2x}$.

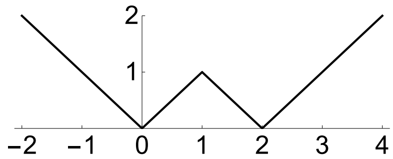




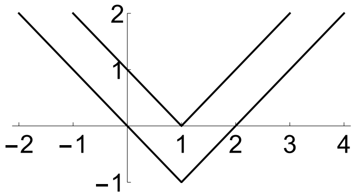
Ясно, что после применения второго преобразования мы никак не можем получить график $y = \sqrt{2x-1}$, хотя бы потому, что значением этого корня при $x = 1$ является 1, а не 0. Так в чем же дело? Дело в том, что при сжатии в 2 раза мы получили график функции $f_1(x) = \sqrt{2x}$, а после сдвига на 1 вправо мы получили график функции $f_2(x) = f_1(x-1) = \sqrt{2(x-1)} = \sqrt{2x-2}$. На правом рисунке пунктиром изображен график функции f_1, сплошной линией — график функции f_2.

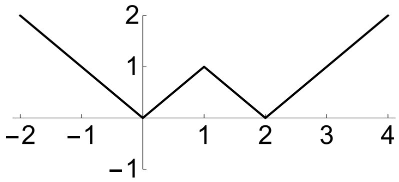
б) Поэтому для того, чтобы из графика $y = \sqrt{2x}$ получить график $y = \sqrt{2x-1}$, надо первый график сдвинуть вправо не на 1, а на $\frac{1}{2}$. Действительно, тогда мы получим график функции $f_1\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2x-1}$.

Задача 81. Задайте одной формулой функцию, график которой изображен на следующем рисунке.



Рассмотрим следующие три графика, последним из которых является данный график.

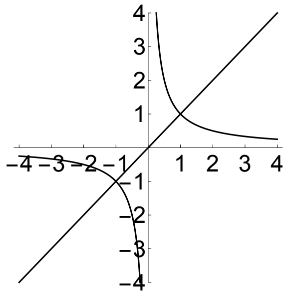




На левом рисунке изображены графики $y = |x-1|$ и $y = |x-1| - 1$. Отразив относительно оси абсцисс лежащую ниже нее часть второго графика, мы и получим искомый график. Последнее преобразование есть переход от графика функции $f(x)$ к графику функции $|f(x)|$. Поэтому ответ в данной задаче: $f(x) = \big||x-1| - 1\big|$.

Построение графиков при помощи описанных преобразований есть своего рода «игра», увлекаться которой не стоит. Целей решения подобных задач две: получение опыта в построении графиков несложных стандартных функций и понимание того, что при изменении порядка преобразований их композиция изменяется, что входит в противоречие со следующим привычным правилом арифметики: «от перемены мест слагаемых сумма не меняется». Это есть первый пример некоммутативности операций в математике.

Рассмотрим еще одно преобразование графиков. В качестве первого примера сравним графики простейшей линейной функции $f(x) = x$ и простейшей обратной пропорциональности $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (рисунок).

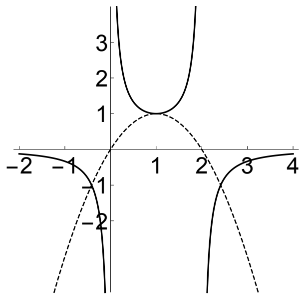


Так как $f(1) = 1 = g(1)$, то графики функций имеют общую точку $A(1;1)$. Так как $f(2) = 2$ и $g(2) = \dfrac{1}{2}$, то расстояние до оси абсцисс от точки $(2; \dfrac{1}{2})$ второго графика обратно пропорционально расстоянию до этой оси от точки $(2;2)$ первого графика. При этом функция f является возрастающей, а функция g убывает на каждом из лучей $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. При все большем увеличении значения аргумента значение первой функции становится все бóльшим, соответственно, значение $g(x)$ все более приближается к нулю. Соответственно, ось абсцисс является асимптотой графика второй из этих функций. Значение $x = 0$ не входит в область определения второй функции, при этом, чем более близким к нулю является x, тем бóльшим по модулю становится значение $g(x)$, откуда и следует, что и ось ординат является асимптотой ее графика.

Суть связи этих функций состоит в том, что $f(x)g(x) = 1$ при всех допустимых значениях аргумента.

Задача 82. Изобразите график функции $f(x) = \dfrac{1}{2x - x^2}$.

Пунктиром на следующем рисунке изображена парабола, являющаяся графиком функции $g(x) = 2x - x^2$.



Так как $g(x) = 0$ при $x = 0; 2$, то функция f не определена при этих значениях аргумента. Если x будет близко к 0 или 2, то $g(x)$ мало, соответственно, значение $f(x)$ велико по модулю. Таким образом, прямые $x = 0$ и $x = 2$ являются асимптотами графика функции f. Если значения аргумента x велики по модулю, то и значения $g(x)$ велики и, соответственно, $f(x)$ мало. Таким образом, ось абсцисс является асимптотой графика этой функции. Теперь заметим, что функция f является композицией функции g и обратной пропорциональности $y = \dfrac{1}{x}$, убывающей функцией на каждом из лучей $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Поэтому функция f убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$, возрастает на каждом из промежутков $[1; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Сформулируем в общем виде утверждение, использованное в конце решения предыдущей задачи, являющееся прямым следствием общего утверждения о композиции монотонных функций.

Теорема 11.1. Предположим, что функции f и g связаны соотношением $f(x)g(x) = 1$, функция f сохраняет знак и возрастает (убывает) на некотором промежутке. Тогда на этом промежутке функция g является убывающей (соответственно, возрастающей).

В заключение этой темы введем новое понятие. Назовем *инверсией относительно оси абсцисс* преобразование, которое точке с координатами $(a; b)$, где $b \neq 0$, сопоставляет точку с координатами $\left(a; \dfrac{1}{b}\right)$. Как следует из решения предыдущей задачи, график функции $f(x)$ и получался из графика функции $g(x)$ при помощи инверсии относительно оси абсцисс.

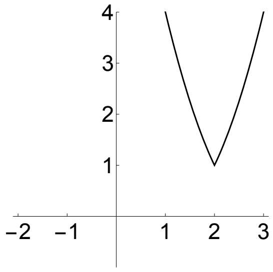
Задачи для домашних заданий по теме 11

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x - 2|x - 1|$.

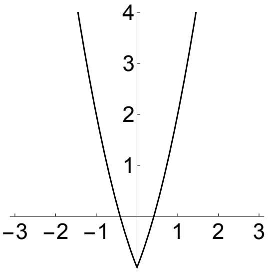
2. а) Опишите преобразования, при помощи которых из графика

$y = \sqrt{x}$ получаются графики функций $f(x) = \sqrt{|x-2|}$ и $g(x) = \sqrt{|x|-2}$. б) Постройте графики этих функций.

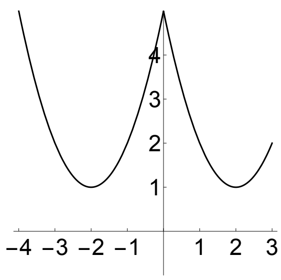
3. а) Укажите на приведенных рисунках (а)–(г) графики функций: $f_1(x) = (|x+1|-2)^2$, $f_2(x) = (|x|-2)^2+1$, $f_3(x) = (|x-2|+1)^2$, $f_4(x) = (|x|+1)^2-2$. б) Укажите последовательность преобразований, посредством которых графики этих функций получаются из стандартной параболы $y = x^2$.



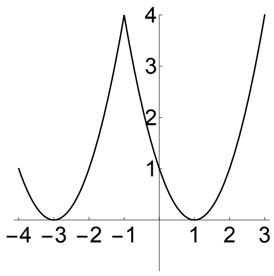
(а)



(б)



(в)

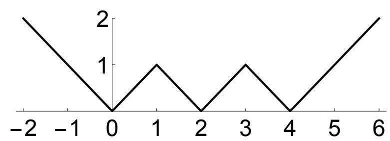


(г)

4. Опишите преобразования, одним из которых является параллельный перенос на единицу вдоль оси абсцисс, при помощи которых из графика $y = \sqrt{x}$ получается график $y = \sqrt{2x-1}$.

5. Постройте график функции $y = \dfrac{x}{|x|+1}$.

6. Задайте одной формулой функцию, график которой изображен на следующем рисунке



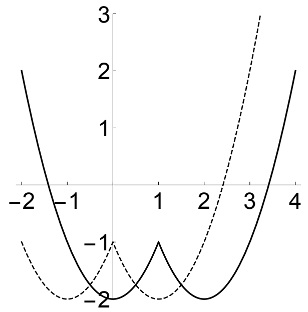
7. Постройте графики функций $f_1(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, $f_2(x) = \dfrac{2}{x^2-2x+2}$ и $f_3(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$.

8. Докажите, что любые две параболы подобны.

9. Известно, что функция $f(x)$ является четной и ее график симметричен относительно прямой $x = 1$. Докажите, что этот график имеет бесконечно много осей симметрии.

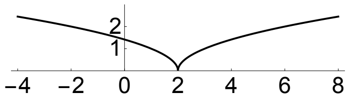
Решения домашних задач по теме 11

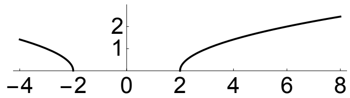
1. Сделаем следующее преобразование: $x^2 - 2x - 2|x-1| = (x-1)^2 - 2|x-1| - 1$. Поскольку $x^2 = |x|^2$, то надо построить параболу $y = x^2 - 2x - 1$, взять ее часть, лежащую правее оси ординат, добавить к ней ее образ при осевой симметрии относительно этой оси, получив тем самым график $y = |x|^2 - 2|x| - 1$, и произвести сдвиг на единицу вправо вдоль оси абсцисс. Ответ на рисунке.



2. а) График функции f получается следующими преобразованиями: вначале следует добавить к графику $y = \sqrt{x}$ его образ при осевой симметрии относительно оси ординат, получив график $y = \sqrt{|x|}$, а затем сдвинуть полученный график на 2 вправо вдоль оси абсцисс. Для построения графика функции g надо вначале сдвинуть график $y = \sqrt{x}$ на 2 вправо вдоль оси абсцисс, а затем добавить к ему его образ при осевой симметрии относительно оси ординат. Таким образом, в обоих случаях мы применяем к графику $y = \sqrt{x}$ одни и те же преобразования, однако в разной последовательности.

б) Ответы на рисунках.





3. График функции f_1 изображен на рисунке (г). Рассмотрим следующую последовательность преобразований:

$$x^2 \overset{T_1}{\mapsto} (x-2)^2 \overset{T_2}{\mapsto} (|x|-2)^2 \overset{T_3}{\mapsto} (|x+1|-2)^2.$$

Преобразование T_1 есть сдвиг на 2 вправо вдоль оси абсцисс, преобразование T_2 заключается в добавлении к части параболы $y = (x-2)^2$, лежащей справа от оси ординат, ее образа при осевой симметрии относительно этой оси, T_3 — это сдвиг на 1 влево вдоль оси абсцисс.

График функции f_2 изображен на рисунке (в). Для того чтобы его получить, надо сделать параллельный перенос параболы $y = x^2$ на вектор $\boldsymbol{a}(2;1)$, а затем преобразование T_2, описанное выше.

График функции f_3 изображен на рисунке (а). Преобразования параболы $y = x^2$: сдвиг на 1 влево вдоль оси абсцисс, преобразование T_2, сдвиг на 2 вправо вдоль оси абсцисс.

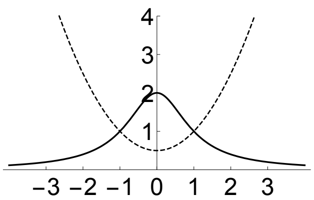
График функции f_4 изображен на рисунке (б). Преобразования: параллельный перенос параболы $y = x^2$ на вектор $\boldsymbol{a}(-1;-2)$, а затем преобразование T_2, описанное выше.

4. Вначале надо сделать параллельный перенос, а затем — сжатие в 2 раза к оси ординат.

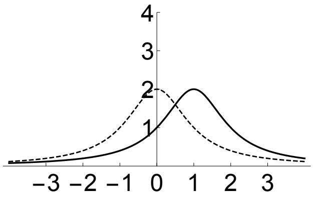
5. Ответ дан на рисунке к задаче 60б темы 9.

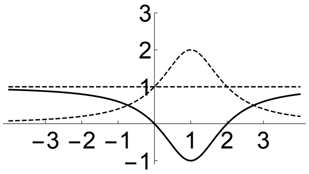
6. Ответ: $y = \Big|\big||x-2|-1\big|-1\Big|$.

7. График первой из этих функций получается инверсией параболы $y = \dfrac{x^2+1}{2}$ относительно оси абсцисс (рисунок).



Так как $f_2(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2+1}$ и $f_3(x) = \dfrac{x^2-2x+2-2}{x^2-2x+2} = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2+1}$, то их графики получаются из графика функции f_1 (рисунки).





8. Как известно, параллельным переносом мы можем преобразовать параболу $y = ax^2 + bx + c$ в параболу $y = ax^2$. Если $a < 0$, то, сделав симметрию относительно оси абсцисс, мы получим параболу с положительным коэффициентом при x^2.

Докажем, что если $a > 0$, то параболы $y = ax^2$ и $y = x^2$ подобны. Множество, заданное уравнением $F(ax, ay) = 0$, подобно множеству, заданному уравнением $F(x, y) = 0$ (теорема 10.6). Если $F(x, y) = y - x^2$, то $F(ax, ay) = ay - a^2x^2$, поэтому уравнение $F(ax, ay) = 0$ преобразуется к уравнению $y = ax^2$.

9. Так как $f(-x) = f(x)$ и $f(2-x) = f(x)$, то $f(x-2) = f(2-x) = f(x)$. Поэтому для всякого четного числа $2k$ справедливо равенство $f(2k-x) = f(x-2k) = f(x-2(k-1)) = \ldots = f(x)$, что и означает, что для любого целого k прямая $x = k$ является осью симметрии графика данной функции.

Самостоятельная работа 6 (темы 10 и 11)

Вариант 1

1. Изобразите множество на плоскости, заданное:
а) неравенством $|x-1| + |y+2| \leqslant 0$; б) уравнением $x^2 + x = y^2 + y$.
2. Найдите площадь множества, заданного неравенством:
а) $|x| + 2|y| \leqslant 4$; б) $|x-2| + 2|y+1| \leqslant 4$.
3. а) Опишите последовательность преобразований, при помощи которых из графика функции $f(x) = \sqrt{x}$ получается график функции $g(x) = \sqrt{3 - |x+2|}$.
б) Постройте график функции g.
4. Найдите:
а) ось симметрии графика функции $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4x+5}$;
б) две оси симметрии множества, заданного неравенством
$2x^4 - xy + 2y^4 \leqslant 4$.

Вариант 2

1. Изобразите множество на плоскости, заданное:
а) неравенством $(x+2)^2+(y-3)^2 \leqslant 0$; б) уравнением $x^2-2x=y^2-2y$.
2. Найдите площадь множества, заданного неравенством:
а) $2|x|+|y| \leqslant 2$; б) $2|x+2|+2|y-1| \leqslant 2$.
3. а) Опишите последовательность преобразований, при помощи которых из графика функции $f(x)=\sqrt{x}$ получается график функции $g(x)=\sqrt{2-|x-3|}$. б) Постройте график функции g.
4. Найдите:
а) ось симметрии графика функции $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+8x+18}$;
б) две оси симметрии множества, заданного неравенством
$3x^4+xy+3y^4 \leqslant 7$.

Вариант 3

1. Изобразите множество на плоскости, заданное уравнением:
а) $x^2-2x=y^4-2y^2$; б) $|x^2-y^2|=x+y$.
2. Найдите площадь множества, заданного:
а) неравенством $x^2+y^2 \leqslant 2x+4y$; б) системой $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2x+4y+3, \\ x^2+y^2 \geqslant 2x+4y. \end{cases}$
3. а) Опишите последовательность преобразований, при помощи которых из графика функции $f(x)=\sqrt{x}$ получается множество, заданное уравнением $|y|=2-\sqrt{|x+2|-1}$. б) Изобразите это множество.
4. а) Докажите, что прямые $y=x$ и $y=-x$ являются осями симметрии множества, заданного неравенством $|x+y|+|x-y| \leqslant 2$. б) Изобразите это множество.

Вариант 4

1. Изобразите множество на плоскости, заданное уравнением:
а) $y^2+2xy=x^4-x^2$; б) $|x^2-y^2|=x-y$.
2. Найдите площадь множества, заданного:
а) неравенством $x^2+y^2 \leqslant 4x-2y$; б) системой $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 4x-2y, \\ x^2+y^2 \leqslant 4x-2y+1. \end{cases}$
3. а) Опишите последовательность преобразований, при помощи которых из графика функции $f(x)=\sqrt{x}$ получается множество, заданное уравнением $|y|=\sqrt{|x-1|-2}-1$. б) Изобразите это множество.
4. а) Докажите, что прямые $y=x$ и $y=-x$ являются осями симметрии множества, заданного неравенством $|x+y|+|x-y| \geqslant 4$. б) Изобразите это множество.

Дополнительные упражнения по темам 10 и 11

6.1. Изобразите множество, заданное уравнением: 1) $x^2+y^2=2|y|$; 2) $y=-\sqrt{-(x-1)(x-3)}$; 3) $(|x|-2)^2+(|y|-3)^2=4$; 4) $(x-1)^2+(y^2-2y-3)^2=0$; 5) $x^2+y^2=2|y-x|+2$.

6.2. Найдите площадь множества, заданного неравенством: а) $x^2+y^2\leqslant 2|x|$; б) $|y|+\big||x-1|-2\big|\leqslant 3$; в) $|x|+|y|+|x-y|\leqslant 4$.

6.3. Изобразите множество, заданное неравенством: а) $2x-1\geqslant |y+3|$; б) $\dfrac{1}{2x-1}\leqslant\dfrac{1}{|y+3|}$.

6.4. Найдите множество значений, которые принимает сумма координат точек множества, заданного уравнением $|y|=6x-x^2$.

6.5. Определите, в зависимости от значения параметра a, вид множества, заданного неравенством $|x|+|y|+|x+y-1|\leqslant a$.

6.6. а) Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $|x+y|=x^2-3x+2$. б) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x+a|=x^2-3x+2$ имеет как положительный, так и отрицательный корень.

6.7. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением (неравенством):
а) $|x-y|\geqslant x-2y$; б) $\min\{|x|,|y|\}\leqslant 1$; в) $(x-|x|)^2+(y+|y|)^2=4$.

6.8. Найдите прямую, относительно которой симметричны графики функций f и g, если: а) $f(x)=2x$ и $g(x)=\dfrac{x}{2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ и $g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; в) $f(x)=x^2+4x+5$ и $g(x)=x^2+2x+2$.

6.9. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $\max\{x^2,x+2\}=y^2$.

6.10. Найдите центр симметрии графика функции: а) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+3}-2$.

6.11. а) Докажите симметричность относительно прямой $y=-x$ множеств, заданных уравнениями $y=8-x^2$ и $|y|=\sqrt{x+8}$. б) Решите уравнение $8-x^2=\sqrt{x+8}$.

6.12. Известно, что функция f является нечетной и что ее график симметричен относительно точки $(1;0)$. а) Докажите, что точка $(-1;0)$ также является центром симметрии графика этой функции. б) Докажите, что график этой функции имеет бесконечно много центров симметрии.

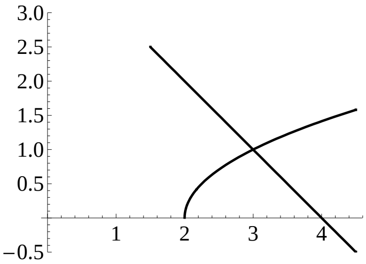
Урок одной задачи: иррациональные уравнения и неравенства

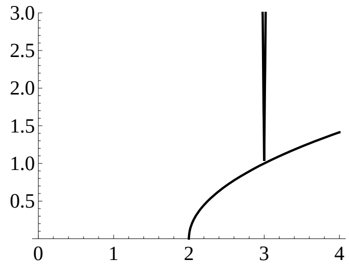
С точки зрения обучения математике, иррациональные уравнения хороши тем, что при их решении приходится *рассуждать*. Кроме того, на их примере можно продемонстрировать пользу графической интерпретации. И не надо давать нарочито усложненные задачи. Как вы сейчас увидите, все важные идеи и методы можно показать на очень простых с виду уравнениях.

Конечно, мы предлагаем на этом уроке решить не одно уравнение, а десять. Они сгруппированы в одну задачу по педагогическим причинам. Смысл не в том, чтобы *решить конкретное уравнение*, а в том, чтобы научиться быстро, просто и правильно рассуждать, устроив учащимся нечто вроде *мозгового штурма*.

Задача 83. Даны уравнения:
1) $\sqrt{x-2}=1$. 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$. 3) $\sqrt{x-2}=1-x$. 4) $\sqrt{x-2}=4-x$. 5) $\sqrt{x-2}=100|x-3|+1$. 6) $\sqrt{x-2}=|x-3|$. 7) $\sqrt{1-x^2}=x^2+1$. 8) $\sqrt{2-x^2}=x^2+1$. 9) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=2$. 10) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}$.
Выясните, какие из этих уравнений не имеют решений, какие имеют единственное решение, а какие — два решения.

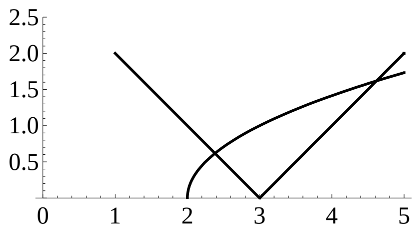
Очевидно, что уравнение (1) имеет единственное решение. Уравнение (2) решений не имеет, так как его область определения пуста; его левая часть определена при $x \geqslant 2$, тогда как его правая часть — при $x \leqslant 1$. Уравнение (3) также не имеет решений: оно определено при $x \geqslant 2$, но при этом условии его правая часть является отрицательной. Уравнение (4) имеет единственное решение $x = 3$, поскольку в его левой части стоит возрастающая функция, в правой — убывающая функция (левый рисунок). Уравнение (5) также имеет единственное решение $x = 3$, что очевидно (правый рисунок).

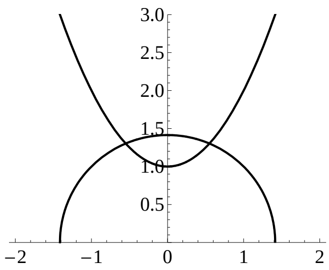




В определенном смысле картинка к уравнению (6) напоминает предыдущую, однако разница состоит в том, что вершина «уголка» располагается на оси абсцисс (левый рисунок). Конечно, еще следует пояснить, почему решений не может быть больше двух, поскольку при $x \geqslant 3$ и функция $y = \sqrt{x-2}$, и функция $y = |x-3| = x-3$ — возрастающие.

Уравнение (7) имеет одно решение $x = 0$, так как при $x \neq 0$ его левая часть меньше 1, а его правая часть больше 1. Графическая иллюстрация уравнения (8) — на правом рисунке, из которого ясно видно, что оно имеет два решения.





Функция $y = \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}$ возрастает на всей своей области определения — промежутке $[3; +\infty)$, множеством ее значений является промежуток $[1; +\infty)$, значит, уравнение (9) имеет единственное решение.

Единственное уравнение, о котором сразу трудно сказать, сколько у него решений, — это уравнение (10). Однако умножив обе его части на сумму $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}$, которая никогда в нуль не обращается, мы получим уравнение $1 = \frac{1}{2}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})$, т. е. уравнение (9). Таким образом, уравнения (9) и (10) равносильны.

Сделаем отступление и решим уравнение (9) посредством одного интересного приема.

Введем новые переменные $y = \sqrt{x-2}$ и $z = \sqrt{x-3}$. По определению $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$, при этом $y + z = 2$ в силу уравнения (9). С другой стороны, $y^2 = x - 2$ и $z^2 = x - 3$, поэтому $y^2 - z^2 = 1$. Таким образом, мы получаем систему из двух уравнений и двух неравенств:

$$\begin{cases} y + z = 2, \\ y^2 - z^2 = 1, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

Имеем $y^2 - z^2 = (y - z)(y + z) = 2(y - z) = 1$, откуда следует, что $y - z = \frac{1}{2}$. Так как $y + z = 2$, то $y = \frac{5}{4}$ и $z = \frac{3}{4}$. Поэтому $x = y^2 + 2 = \frac{25}{16} + 2 = \frac{57}{16}$.

В процессе обучения иногда полезно «поактерствовать». Понятно, что учащимся будет трудно самостоятельно разобраться с уравнением (10). Мы и предлагаем сделать, условно говоря, паузу, во время которой дать подсказку. В приведенном решении мы ведь фактически показали, что уравнение (10) равносильно уравнению (9).

Если мы используем графическую интерпретацию, то нам, по сути дела, все равно, что решать, — уравнение или неравенство. Поэтому в качестве домашнего задания можно предложить учащимся следующую задачу.

Задача 84. В каждом из уравнений (1)–(10) заменим знак равенства: а) на знак «$\leqslant$»; б) на знак «$\geqslant$». Определите структуру множества решений полученных неравенств. Например, выясните, какие из них не имеют решений, решением каких является точка, отрезок, неограниченный промежуток, объединение непересекающихся промежутков.

В следующей таблице приведена структура ответов. Обозначения x_1 и x_2 выбраны для решений соответствующего уравнения.

	$\leqslant$	$\geqslant$
1	$[2; 3]$	$[3; +\infty)$
2	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$[2; +\infty)$
4	$[2; 3]$	$[3; +\infty)$
5	$[2; +\infty)$	$\{3\}$
6	$[2; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
7	$[-1; 1]$	$\{0\}$
8	$[-\sqrt{2}\,; x_1] \cup [x_2; \sqrt{2}\,]$	$[x_1; x_2]$
9	$[3; x_1]$	$[x_1; +\infty)$
10	$[x_1; +\infty)$	$[3; x_1]$

Тема 12. Исследование уравнений, неравенств и их систем

Не надо бояться предлагать учащимся уравнения с параметрами. Только решая их, учащиеся смогут понять проводимые *рассуждения*. Следующий набор задач мы также предлагаем использовать на первых уроках по данной теме.

Задача 85. Выясните, сколько решений (в зависимости от значения параметра a) имеют уравнения:
1) $\sqrt{x+1}=a$; 2) $\sqrt{x^2+1}=a$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+a}$; 4) $\sqrt{2x+1}=a-x$;
5) $\sqrt{2x+3}=ax+1$; 6) $\sqrt{x+1}=x+a$.

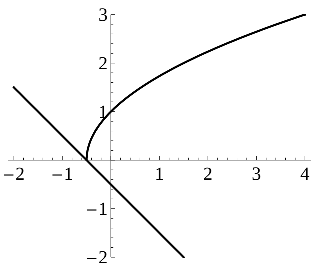
Ясно, что уравнение (1) не имеет решений при $a<0$ и имеет единственное решение при любом $a \geqslant 0$.

Так как левая часть уравнения (2) не меньше 1, то при $a<1$ оно решений не имеет. Если $a=1$, то единственным его решением является $x=0$. При любом $a>1$ оно имеет два решения.

При решении уравнения (3) придется учитывать его область определения. Решением уравнения $2x+1=x+a$ является $x=a-1$. Осталось ввести условие $2x+1 \geqslant 0$, откуда $2a \geqslant 1$, или $a \geqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, при $a<\frac{1}{2}$ уравнение (3) решений не имеет, а при любом $a \geqslant \frac{1}{2}$ оно имеет единственное решение.

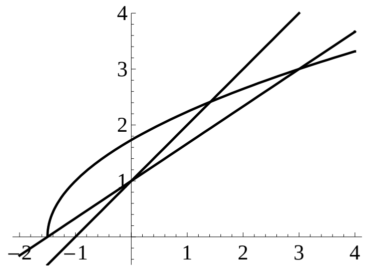
Проще всего исследовать уравнение (4), если записать его в виде $x+\sqrt{2x+1}=a$. Функция, стоящая в его левой части, — возрастающая как сумма двух возрастающих функций. Ее наименьшим значением является значение при $x=-\frac{1}{2}$, равное $-\frac{1}{2}$. Поэтому это уравнение не имеет решений при $a<-\frac{1}{2}$, а при любом $a \geqslant -\frac{1}{2}$ оно имеет единственное решение.

Проблема только в том, что учащимся может быть нелегко понять поведение функции $y=x+\sqrt{2x+1}$, тем более что ее график не является стандартным.



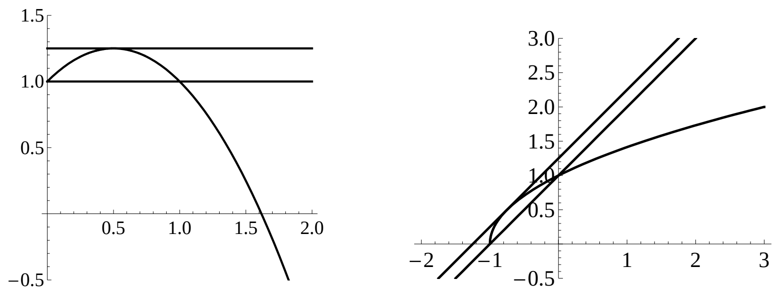
Можно поступить по-другому. Изобразим график $y=\sqrt{2x+1}$ левой части уравнения. Графиком его правой части является прямая $y=a-x$. Чем больше значение параметра a, тем «выше» располагается эта прямая. Самое «низкое» ее положение, при котором она еще пересекается с графиком, будет тогда, когда она проходит через точку с координатами $\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$ (рисунок на предыдущей странице), т. е. если $0 = a + \frac{1}{2}$, откуда и следует ответ.

Решение уравнения (5) проходит по аналогичной схеме. Разница в том, что при изменении параметра a меняется угол наклона прямой $y = ax + 1$ к оси абсцисс. При этом, так как $y = 1$ при $x = 0$, каждая из этих прямых проходит через точку $(0; 1)$ на оси ординат (рисунок).



Рассмотрим прямую, проходящую еще и через точку $\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$ оси абсцисс. Имеем $0 = -\frac{3}{2}\,a + 1$, откуда $a = \frac{2}{3}$. Из картинки видно, что при $a > \frac{2}{3}$ уравнение имеет одно решение. Оно имеет два решения при $0 < a \leqslant \frac{2}{3}$. Если $a \leqslant 0$, то рассматриваемое уравнение также будет иметь одно решение.

На примере решения уравнения (6) можно вновь продемонстрировать удобство замен переменных. Если положить $t = \sqrt{x+1}$, то $x = t^2 - 1$, и в результате мы получим уравнение $t = t^2 - 1 + a$, или $1+t-t^2 = a$. Исследовать вопрос о числе его решений удобно, построив параболу $y = 1 + t - t^2$.



На левом рисунке изображена дуга этой параболы при $t \geqslant 0$. Ввести такое дополнительное условие необходимо, поскольку $t = \sqrt{x+1} \geqslant 0$.

В результате мы получим следующий ответ: уравнение (6) имеет одно решение при $a = \frac{5}{4}$ и $a < 1$; оно имеет два решения при $a \in \left[1; \frac{5}{4}\right)$; при $a > \frac{5}{4}$ уравнение решений не имеет.

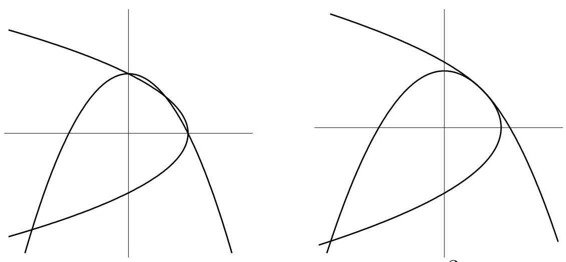
Если мы изобразим график $y = \sqrt{x+1}$ и будем исследовать число его точек пересечения с прямыми $y = x+a$, то будет видно, что $a = 1$ — самое маленькое значение параметра a, при котором данный график и прямая имеют две общие точки (правый рисунок). Проблема состоит в том, чтобы найти наибольшее значение параметра a, при котором график и прямая имеют общую точку. На правом рисунке изображена и самая «высокая» прямая $y = x + \frac{5}{4}$, пересекающаяся с данным графиком.

Следующая задача интересна тем, что зачастую геометрический подход к ее решению приводит к ошибочным выводам.

Задача 86. Определите, сколько решений в зависимости от a имеет система

$$\begin{cases} y = 1 - ax^2, \\ x = 1 - ay^2. \end{cases}$$

Начните с того, что найдите число решений данной системы при $a = 1$, а затем постарайтесь нарисовать параболы, заданные уравнениями $y = 1 - x^2$ и $x = 1 - y^2$ так, чтобы на вашем рисунке было столько же точек пересечения парабол, сколько у вас найдено решений системы уравнений. Мы уверены, что это не так-то просто!



$a = 1$ $\qquad$ $a = \frac{3}{4}$

Подставив выражение для y из первого уравнения системы во второе, получим уравнение $1-x = (1-x^2)^2$. Ясно, что одним из решений будет $x = 1$. Поделив на $1-x$, получим уравнение $1 = (1+x)(1-x^2)$. Теперь проще всего раскрыть скобки, получив уравнение $x^3 + x^2 - x = 0$, одним из решений которого будет $x = 0$. Остается решить уравнение $x^2 + x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. На левом рисунке и изображены две эти параболы, пересекающиеся в 4 точках.

Изображенные на правом рисунке параболы касаются друг друга. Найти значение $a = \frac{3}{4}$, при котором расположение парабол имеет такой вид, рассуждая геометрически, нереально. Потому это есть хороший пример задачи, решать которую надо именно алгебраически, но разумно.

При $a = 0$ система очевидно имеет единственное решение, поэтому далее считаем, что $a \neq 0$. Вычтя из первого уравнения второе, получим уравнение $y - x = a(y^2 - x^2)$, откуда $y = x$ или $x + y = \frac{1}{a}$. Если $y = x$, то $ax^2 + x - 1 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $1 + 4a$, поэтому при $a < -\frac{1}{4}$ оно решений не имеет, при $a = -\frac{1}{4}$ оно имеет одно решение, при $a > -\frac{1}{4}$ — два решения.

Во втором случае получаем уравнение $ax^2 - x - 1 + \frac{1}{a} = 0$, дискриминант которого равен $4a - 3$. Поэтому оно не имеет решений при $a < \frac{3}{4}$, имеет одно решение при $a = \frac{3}{4}$ и имеет два решения, если $a > \frac{3}{4}$. Осталось посмотреть, могут ли совпадать друг с другом решения системы в обоих этих случаях, т. е. существует ли решение системы

$$\begin{cases} y = x, \\ x + y = \frac{1}{a}, \\ y = 1 - ax^2. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует, что $y = x = \frac{1}{2a}$. Подставив эти значения в третье уравнение, получим, что $\frac{1}{2a} = 1 - \frac{1}{4a}$, откуда $a = \frac{3}{4}$. Окончательный ответ: система не имеет решений при $a < -\frac{1}{4}$, имеет одно решение при $a = -\frac{1}{4}\,; 0$, два решения при $a \in \left(-\frac{1}{4}\,; 0\right) \cup \left(0; \frac{3}{4}\right]$, четыре решения при $a > \frac{3}{4}$.

Решение следующей задачи основано на комбинации замены переменных и геометрической интерпретации.

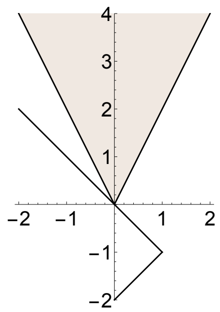
Задача 87. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение система

$$\begin{cases} y+a \geqslant 2|x-a|, \\ x+|y-a| = a+1. \end{cases}$$

Положив $u = x-a$ и $v = y+a$, мы получим систему

$$\begin{cases} v \geqslant 2|u|, \\ u+|v-2a| = 1. \end{cases}$$

На следующем рисунке изображено множество, заданное неравенством $v \geqslant 2|u|$, — «заполненный уголок».



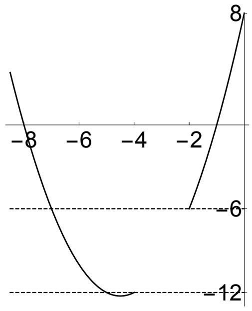
Множество, заданное уравнением $u = 1-|v-2a|$, представляет собой «уголок, лежащий на боку», вершина которого расположена в точке с координатами $(1; 2a)$. На рисунке изображен этот уголок при $a = -\dfrac{1}{2}$, когда верхняя сторона этого уголка проходит через начало координат. В этом случае полученная система имеет единственное решение $(u, v) = (0, 0)$. Если $a > -\dfrac{1}{2}$, то уголок поднимется выше и множество решений системы будет бесконечным, если $a < -\dfrac{1}{2}$, то уголок опустится, более не будет пересекаться с заполненным углом, а потому система решений не имеет. Отсюда мы и получаем ответ: система имеет решения только при $a \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Задача 88. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение уравнение $\sqrt{x^2+6x+8} = \sqrt{a-3x}$.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+6x+8 \geqslant 0, \\ x^2+9x+8 = a. \end{cases}$$

Нас интересуют значения функции $f(x) = x^2+9x+8$ с областью определения $(-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$, которые она принимает ровно один раз. На следующем рисунке изображен график этой функции. Наименьшим ее значением является число $-\dfrac{49}{4}$.



Но кроме числа $a = -\dfrac{49}{4}$ эта функция будет принимать ровно в одной точке все значения из промежутка $(-12; -6)$. Таким образом, ответ: $a \in \{-\dfrac{49}{4}\} \cup (-12; -6)$.

Задачи для домашних заданий по теме 12

1. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение неравенство $|x-a| + |2x-a| + |x+2a| \leqslant 6$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = a$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a} = 1$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{2xy+a} = x+y+2$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{4x-x^2-3} = 1 - ax$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} a(x^4+1) = y+2-|x|, \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2|y|, \\ y = a(x-2) \end{cases}$ имеет единственное решение.

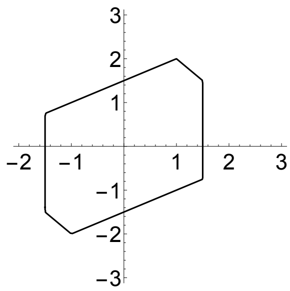
8. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{(x+2)(a-x)} = x + 3$ имеет единственное решение.

9. Изобразите на плоскости множество пар $(a; b)$, таких, что система $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ имеет решение.

Решения домашних задач по теме 12

1. График функции $f(x) = |x-a| + |2x-a| + |x+2a|$ есть ломаная, состоящая не более, чем из четырех звеньев. При этом абсциссами «точек излома» являются числа a, $\frac{a}{2}$ и $-2a$. Данное неравенство будет иметь решение тогда и только тогда, когда хотя бы одно из значений $f(a) = 4|a|$, $f\left(\frac{a}{2}\right) = 3|a|$ и $f(-2a) = 8|a|$ не превосходит 6. Из неравенства $3|a| \leqslant 6$ мы и получаем, что $|a| \leqslant 2$.

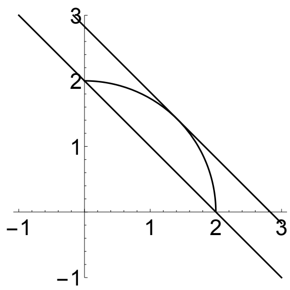
Есть и другой подход к решению, который, правда, в данном случае будет более трудоемким. На следующем рисунке изображен шестиугольник, который задан уравнением $|x-y| + |2x-y| + |x+2y| = 6$.



Множество, заданное неравенством $|x-y| + |2x-y| + |x+2y| \leqslant 6$, представляет собой часть плоскости, ограниченную этим шестиугольником. Прямые, заданные уравнением $y = a$, пересекаются с этим шестиугольником при $|a| \leqslant 2$, что и дает ответ в задаче.

2. Первое решение стандартно. Ясно, что $a \geqslant 0$. Возведя в квадрат обе части данного уравнения, получим уравнение $2\sqrt{x(4-x)} = a^2 - 4$. Следовательно, $a^2 \geqslant 4$, а так как $a \geqslant 0$, то $a \geqslant 2$. Квадратичная функция $y = 4x - x^2$ достигает наибольшего значения при $x = 2$, следовательно, множеством значений левой части полученного уравнения является отрезок $[0;4]$. Значит, $a^2-4\leqslant 4$, откуда $a\leqslant 2\sqrt{2}$. Таким образом, данное уравнение имеет решение при $a\in[2;2\sqrt{2}\,]$.

Геометрической иллюстрацией другого из возможных решений является следующий рисунок.



Сделаем замену $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{4-x}$. Тогда $u+v=a$ и $u^2+v^2=4$, кроме того, следует учесть, что $u\geqslant 0$ и $v\geqslant 0$. Условия

$$\begin{cases} u^2+v^2=4,\\ u\geqslant 0,\\ v\geqslant 0\end{cases}$$

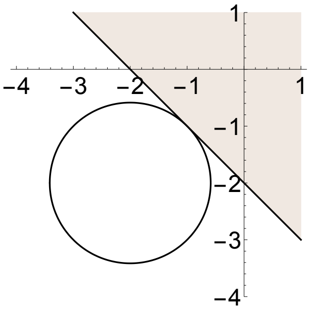
задают расположенную в первом координатном угле четверть окружности радиуса 2. Осталось найти значения a, при которых прямая $u+v=a$ пересекается с этой частью окружности. На рисунке выше изображены: самая нижняя прямая $u+v=2$, пересекающаяся с этой окружностью, и самая верхняя из таких прямых. Второй прямой является касательная к окружности, проходящая через точку с координатами $(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,)$, откуда мы и получаем, что $a\leqslant 2\sqrt{2}$.

3. Выражение в левой части данного уравнения определяет функцию, возрастающую на своей области определения. Ясно, что значения этой функции могут быть сколь угодно большими, поэтому данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда значение функции на левом конце ее области определения не превосходит 1. Рассмотрим два случая. Пусть $a\leqslant 1-2a$, т. е. $a\leqslant\dfrac{1}{3}$. В этом случае областью определения левой части данного уравнения является промежуток $[1-2a;+\infty)$. Получаем неравенство $\sqrt{1-3a}\leqslant 1$, откуда $a\geqslant 0$. Если $a>\dfrac{1}{3}$, то функция определена на промежутке $[a;+\infty)$, откуда $\sqrt{3a-1}\leqslant 1$, поэтому $a\leqslant\dfrac{2}{3}$. Окончательный ответ: $\Big[0;\dfrac{2}{3}\Big]$.

4. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим систему

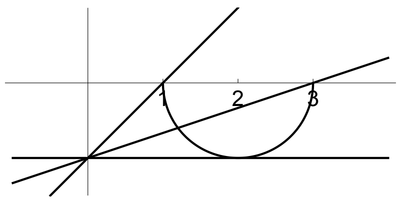
$$\begin{cases} x+y+2 \geqslant 0, \\ 2xy + a = (x+y+2)^2. \end{cases}$$

Второе уравнение преобразуем к виду $x^2+y^2+4x+4y+4=a$, или $(x+2)^2+(y+2)^2=a+4$. Ясно, что $a \geqslant -4$, но, например, при $a=-4$ это уравнение задает точку $(-2;-2)$, координаты которой не удовлетворяют неравенству $x+y+2 \geqslant 0$. Исходное уравнение или, что равносильно, полученная система имеет решение, если окружность, заданная уравнением $(x+2)^2+(y+2)^2=a+4$, пересекается с полуплоскостью, заданной неравенством $x+y+2 \geqslant 0$. На следующем рисунке изображена самая «маленькая» такая окружность.



Ее радиус равен половине диагонали квадрата со стороной 2, т. е. $\sqrt{2}$, таким образом, $\sqrt{a+4} \geqslant \sqrt{2}$, откуда получаем, что $a \geqslant -2$.

5. Запишем уравнение в виде $ax-1=-\sqrt{4x-x^2-3}$. Уравнение $y=ax-1$ задает прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку с координатами $(0;-1)$. Уравнение $y=-\sqrt{4x-x^2-3}$ задает нижнюю полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(2;0)$ (рисунок).



Ответ считывается непосредственно с этого рисунка. Прямая $y = ax-1$ имеет единственную общую точку с полуокружностью при $a = 0$, в этом случае она касается этой полуокружности, а также при $a \in \left(\frac{1}{3}\,; 1\right]$.

6. Каждое из уравнений данной системы задает множество, симметричное относительно оси ординат, а потому единственным ее решением может быть решение, в котором $x = 0$, т. е. это могут быть только пары $(0, 2)$ и $(0, -2)$. Множество, заданное первым уравнением, проходит через точку $(0; 2)$ при $a = 4$, через точку $(0; -2)$ — при $a = 0$. Однако во втором случае мы получаем систему

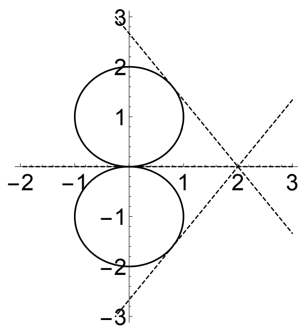
$$\begin{cases} y = |x| - 2, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

откуда $2x^2 - 4|x| = 0$, а потому $x = 0; \pm 2$. Таким образом, при $a = 0$ система имеет три решения $(0; -2)$, $(-2; 0)$ и $(2; 0)$.

Осталось разобраться со случаем $a = 4$. Из первого уравнения $y = 4x^4 + |x| + 2$ следует, что $y \geqslant 2$, из второго — $y \leqslant 2$. Значит, $y = 2$, из второго уравнения получаем, что $x = 0$, а потому система имеет единственное решение $(0; 2)$.

Ответ: $a = 4$.

7. Геометрический смысл задачи состоит в определении угловых коэффициентов в уравнении $y = a(x-2)$ прямых, проходящих через точку $(2; 0)$ и имеющих единственную точку пересечения с кривой, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 2|y|$. Эта кривая является объединением двух единичных окружностей, касающихся оси абсцисс в начале координат (рисунок).



Конечно, одним из возможных значений является $a = 0$. Осталось найти угловые коэффициенты касательных к этим окружностям. Конечно, если известна формула тангенса двойного угла, то значения $a = \pm\frac{4}{3}$ находятся «в полстрочки». Если же нет, то надо написать квадратное уравнение для определения абсцисс пересечения прямых с окружностью $x^2 + y^2 = 2y$:

$$(a^2+1)x^2 - 2a(2a+1)x + 4a(a+1) = 0,$$

найти его дискриминант и приравнять его к нулю, получив уравнение

$$a^2(2a+1)^2 = 4a(a+1)(a^2+1),$$

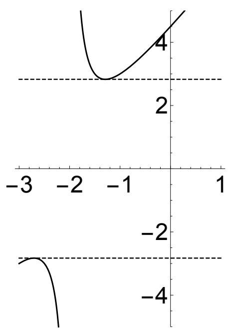
или, после упрощений, $a(3a+4) = 0$. Поэтому $a = 0; \pm\frac{4}{3}$.

8. Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup \{-2\sqrt{2}\} \cup \{2\sqrt{2}\}$. Мы приведем два решения этой задачи.

Ясно, что $x \geqslant -3$. При этом условии проведем следующие преобразования:

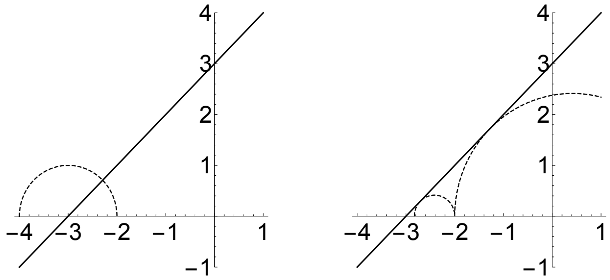
$$a = x + \frac{(x+3)^2}{x+2} = x + \frac{x^2+6x+9}{x+2} = 2x + 4 + \frac{1}{x+2} = 2(x+2) + \frac{1}{x+2}.$$

Поэтому надо найти те значения функции $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ при условии $x \geqslant -1$, которые она принимает ровно один раз. Поведение этой функции хорошо известно, она возрастает на промежутках $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, убывает на промежутках $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. На следующем рисунке «для красоты» приведен график функции $g(x) = 2(x+2) + \frac{1}{x+2}$.



Значения $a = 2\sqrt{2}$ и $a = -2\sqrt{2}$ — это, соответственно, наименьшее значение этой функции при $x > -2$ и ее наибольшее значение при $x < -2$.

Второе решение — геометрическое. Хорошо известно, что уравнение $y = \sqrt{(x+2)(a-x)}$ задает верхнюю полуокружность, диаметром которой является отрезок с концами в точках a и -2 оси абсцисс. Если $a < -3$, то эта полуокружность пересекает прямую $y = x + 3$ в одной точке (левый рисунок).



Действительно, прямая $y = x + 3$ пересекает диаметр окружности, поэтому вторая из точек пересечения прямой и окружности лежит ниже оси абсцисс.

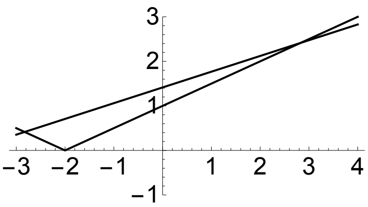
Случай $a \geqslant -3$ является более сложным. Полуокружность может не иметь общих точек с прямой $y = x+3$, может иметь с ней две общие точки, а может касаться этой прямой (правый рисунок). Последний вариант нам и подходит, тогда данное уравнение имеет единственное решение.

Центр полуокружности лежит в точке с абсциссой $\dfrac{a-2}{2}$, а радиус этой полуокружности определяется формулой $r = \dfrac{|a+2|}{2}$. Расстояние от центра полуокружности до прямой находится по формуле

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{a-2}{2} + 3\Big) = \frac{a+4}{2\sqrt{2}}\,.$$

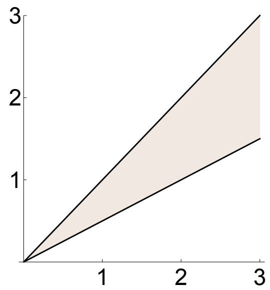
Решив уравнение $\dfrac{a+4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{|a+2|}{2}$, мы и получим значения $a = \pm 2\sqrt{2}$.

На следующем рисунке изображены графики функций $d(a) = \dfrac{a+4}{2\sqrt{2}}$ и $r(a) = \dfrac{|a+2|}{2}$.



9. Из системы получаем, что $x^2 = a - b$ и $y^2 = 2b - a$. Поэтому система имеет решение тогда и только тогда, когда $a \geqslant b$ и $a \leqslant 2b$. Множество пар (a, b), где $a \geqslant b$, есть множество, заданное неравенством $y \leqslant x$, — полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = x$.

Аналогичным образом, условие $a \leqslant 2b$ задает полуплоскость, лежащую выше прямой $2y \geqslant x$. Таким образом, искомое множество пар $(a; b)$ есть изображенный на следующем рисунке угол между прямыми $y = x$ и $y = \dfrac{x}{2}$, где $x \geqslant 0$.



Самостоятельная работа 7 (тема 12)

Вариант 1

1. Найдите, в зависимости от значения параметра a, число решений уравнения $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2 + a}$.
2. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{4 - x^2} = a(x - 1)$ имеет два решения.
3. Найдите наименьшее значение суммы $x^2 + y^2$, если известно, что $|x| + y \geqslant \sqrt{2}$.

4. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 1, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет конечное (и ненулевое) число решений.

Вариант 2

1. Найдите, в зависимости от значения параметра a, число решений уравнения $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{x^2-2a}$.
2. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{9-x^2}=a(x+1)$ имеет два решения.
3. Найдите наименьшее значение суммы x^2+y^2, если известно, что $y-|x|\leqslant-\sqrt{2}$.
4. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases}|x|+|y|\leqslant 1,\\ x^2+(y+3)^2=a\end{cases}$ имеет конечное (и ненулевое) число решений.

Вариант 3

1. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{4-x^2}=a-x$ не имеет решений.
2. Найдите все значения a, при которых имеет два решения уравнение $\sqrt{4-x^2}-2=a(x-2)$.
3. Найдите условие на параметры a и b, при которых имеет решение уравнение $2|x|+|x-a|=b$.
4. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ |y|-x=a\end{cases}$ имеет единственное решение.

Вариант 4

1. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{9-x^2}=x+a$ не имеет решений.
2. Найдите все значения a, при которых имеет два решения уравнение $\sqrt{9-x^2}-3=a(x+3)$.
3. Найдите условие на параметры a и b, при которых имеет решение уравнение $3|x|+|x-b|=a$.
4. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ |x|=y-a\end{cases}$ имеет единственное решение.

Дополнительные упражнения по теме 12

7.1. Найдите множество значений $x+y$, если: а) $|x-1|+2|y|\leqslant 2$; б) $x^2+y^2\leqslant 2x+1$; в) $\max\{|x-1|,|y-2|\}\leqslant 1$.

7.2. Найдите наибольшее значение суммы x^2+y^2, если:
а) $|x|+|y|\leqslant 1$; б) $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1$; в) $\max\{|x-1|,|y-2|\}\leqslant 1$.

7.3. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{x+3} = \sqrt{a-x}$.

7.4. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение неравенство $|x-a| + |x+1| \leqslant 2$.

7.5. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение уравнение: а) $2|x-a| = x$; б) $\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} = a$.

7.6. Определите, сколько решений в зависимости от a имеет уравнение: а) $\sqrt{x-3} = a-x$; б) $\sqrt{x-3} = a-x^2$; в) $\sqrt{x-3} = x-a$.

7.7. Определите, в зависимости от a, число решений системы
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = 9. \end{cases}$$

7.8. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение:

а) уравнение $\sqrt{x^4 + a^4} = |x+a| + |x-a|$;

б) система $\begin{cases} |x-2| + |y+1| = a, \\ x^2 - 4x + y^2 = 0; \end{cases}$

в) система $\begin{cases} (|x|-6)^2 + (y-12)^2 = 4, \\ (x+1)^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Глава 2
Последовательности

Введение: что же такое — последовательность

Приступая к изучению темы «Последовательности», не следует добиваться «абсолютной строгости» в определениях и рассуждениях. В отличие от понятия функции, представления о последовательностях по большей части формируются вне уроков математики, так что смысл этого математического термина учащимся известен. Можно попросить их подобрать синонимы этого слова. Наверное, будут даны такие ответы: «ряд», «список», «очередь».

Задачи типа «продолжите ряд чисел (или букв)», встречались учащимся и ранее. Например, перед поступлением в первый класс ребенку вполне могло быть предложено такое задание: *Продолжить последовательность букв П, В, Т, Ч, П, Ш.*

Даже взрослого это задание может поставить в тупик. Однако оно вполне соответствует определению понятия последовательности, поскольку она считается заданной, если задан способ нахождения каждого ее элемента. В приведенном примере указанные буквы — это первые буквы слов:

первый, второй, третий, четвертый, пятый, шестой,

поэтому следующая буква — это C — первая буква слова *седьмой*.

Далее будут изучаться в основном числовые последовательности. Какие примеры последовательностей «из жизни» можно заметить? Например, вы долго стоите на автобусной остановке. Какую последовательность вы можете увидеть? Или: вы изучаете рейтинг школ города, что за последовательность появится перед вами?

Конечно, в окружающей нас действительности все последовательности являются конечными, т. е. имеют конечную длину (количество элементов). Бесконечные последовательности — уже математическая абстракция.

При этом сразу же следует подчеркнуть разницу между конечными последовательностями и последовательностями, элементы которых принимают значения из некоторого конечного множества. Например, цифрами десятичной дроби являются только элементы множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$, состоящего из десяти чисел. Однако цифры десятичного представления, например, числа $\frac{1}{7}$, образуют бесконечную последовательность

$$\frac{1}{7} = 0,\underline{142857}\,142857\,142857\,142857\,142857\ldots$$

Стоит, конечно, обратить внимание учащихся на то, что эта последовательность является периодичной.

Тема 13. Последовательности: их задание и значения

Задача 89. а) Выпишите несколько следующих членов последовательностей, начальные члены которых равны:

1) $1, 2, 3, 4$; 2) $2, 4, 6, 8$; 3) $2, 4, 8, 16$; 4) $1, 4, 7, 10$;
5) $15, 17, 19, 21$; 6) $1, 4, 9, 16$; 7) $1, 1, 2, 3, 5$; 8) $2, 3, 5, 7, 11$.

б) Можете ли вы выписать сотый элемент каждой из этих последовательностей?

Понятен ли вам смысл второго задания данной задачи? Дело в том, что если для последовательностей (1)–(6) дать ответ несложно, то для последних двух последовательностей это далеко не так. При этом, если сотым простым числом является число 541, то сотым числом Фибоначчи является число

$$354\,224\,848\,179\,261\,915\,075$$

С другой стороны, если последовательность Фибоначчи может быть задана посредством соотношения $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, где $x_1 = x_2 = 1$, (для нее существует даже явная формула), то для последовательности простых чисел никакой формулы «не придумано», да и не может быть придумано.

Даже если ученики верно решили второй пункт предыдущей задачи, надо приучать их к записи «общего члена» последовательности.

Задача 90. Задайте формулами значение n-го члена последовательностей (1)–(6) задачи 89.

Ответы: 1) $x_n = n$; 2) $x_n = 2n$; 3) $x_n = 2^n$; 4) $x_n = 3n-2$; 5) $x_n = 2n+13$; 6) $x_n = n^2$.

При этом не стоит стесняться использовать «одну и ту же букву» при записи различных последовательностей.

Задача 91. Найдите формулу «общего члена» следующих последовательностей, первым членом каждой из которых является единица: а) $x_{n+1} = x_n + 1$; б) $x_{n+1} = (n+1)x_n$; в) $x_{n+1} = 2x_n$.

Понятно, что смысл задачи состоит в том, чтобы приучать учащихся переходить (когда это возможно) от рекуррентного задания последовательностей к явному. Ответы: а) $x_n = n$; б) $x_n = n!$; в) $x_n = 2^{n-1}$.

Задача 92. Определите, какие значения могут принимать члены последовательностей, заданных формулами:
а) $x_n = 2 + (-1)^n$; б) $x_n = \sin\bigl(n \cdot 45^\circ\bigr)$; в) $x_n = \bigl[\frac{5}{n}\bigr]$ (здесь $[a]$ — это целая часть числа a).

а) Первая последовательность имеет вид $1, 3, 1, 3, \ldots$, и значениями ее членов являются только числа 1 и 3.

б) Начальными элементами второй последовательности являются

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots,$$

и множество $\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$ ее значений состоит из пяти чисел.

в) В третьем случае получаем, что $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = x_5 = 1$ и $x_n = 0$ при всех $n \geqslant 6$. Таким образом, множество $\{0, 1, 2, 5\}$ значений этой последовательности состоит из четырех элементов.

Задача 93. Определите, какие значения могут принимать члены последовательностей, заданных соотношениями:
а) $x_{n+1} = \dfrac{3}{x_n}$ и $x_1 = 1$; б) $y_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{1-y_n}$ и $y_1 = 2$. в) Найдите значения x_{2013} и y_{2014}.

а) Здесь все просто; мы получаем последовательность $1, 3, 1, 3, \ldots$ Таким образом, множество значений этой последовательности исчерпывается парой чисел 1 и 3. Следует обратить внимание учащихся, что если мы хотим записать формулу общего члена этой последовательности, то можно использовать любую из двух следующих форм.

$x_n = 2 + (-1)^n$ (как в предыдущей задаче)

$$\text{или же} \quad x_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 3, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

кому как нравится.

б) Вторая последовательность интереснее. Ее начальными членами являются: $2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, -3 \ldots$, и далее все повторяется. Таким образом, множество ее значений $\{2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ состоит из четырех чисел.

Раскроем также «секрет» соотношения, определяющего данную последовательность. Дело в том, что если положить $y_n = \operatorname{tg}\varphi$, то, как следует из формулы тангенса суммы, $y_{n+1} = \operatorname{tg}\bigl(\varphi + \frac{\pi}{4}\bigr)$. Отсюда, в частности, и следует соотношение $y_{n+4} = y_n$, которым нужно воспользоваться при решении последнего пункта задачи.

в) Видно, что для членов первой последовательности при любом натуральном n справедливо соотношение $x_{n+2} = x_n$, поэтому $x_{2013} = x_1 = 1$. Соотношение между членами второй последовательности имеет вид $y_{n+4} = y_n$, поэтому $y_{2014} = y_2 = -3$.

Конечно, для решения следующей задачи полезно понятие возрастания последовательности, однако будет естественнее вводить его уже после того, как эта задача будет понята и решена.

Задача 94. Найдите наименьший член последовательности:
1) $x_n = 3n + 7$; 2) $x_n = n^2 + 2n$; 3) $x_n = n^2 - 4n$; 4) $x_n = n^2 - 5n$; 5) $x_n = n^3 - 12n$; 6) $x_n = n + \frac{9}{n}$; 7) $x_n = n - \frac{9}{n}$.

Приведем некоторые педагогические соображения и разнообразные решения. Собственно говоря, это задача на повторение свойств числовых неравенств. Например, из того, что $n^2 \geqslant 1$ и $2n \geqslant 2$ при всех $n \geqslant 1$, следует, что в пункте 2 справедливо неравенство $x_n \geqslant x_1 = 3$. Однако что касается пункта 3, то в нем подобное рассуждение неприменимо, поскольку «вычитать» неравенства нельзя. Конечно, этот пункт — на повторение свойств квадратичной функции. Полезно также обсудить следующее его решение.

Если $x_n = n^2 - 4n$, то $x_1 = -3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -3$, $x_4 = 0$. Так как $x_n = n(n-4)$, то $x_n \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 4$. Следовательно, наименьшим значением данной последовательности является значение $x_2 = -4$. Не используя приведенное соображение, трудно будет решить пункт

5, решение которого совсем просто. Первые значения этой последовательности приведены в таблице:

n	1	2	3	4
x_n	-11	-16	-9	16

Поскольку $x_n = n(n^2 - 12) \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 4$, то наименьшее значение следует искать среди находящихся в приведенной таблице значений данной последовательности. Таким образом, наименьшим является $x_2 = -16$.

6) Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел следует, что $x_n = n + \dfrac{9}{n} \geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{9} = 6$. При этом равенство имеет место при $n = 3$.

Конечно, можно было рассуждать так же, как в предыдущей задаче, так как ясно, что $x_n > 6$ при всех $n \geqslant 6$. Поэтому найденное число $x_3 = 6$ — наименьшее среди первых пяти значений данной последовательности — является и наименьшим значением среди всех ее элементов.

7) А при решении этого пункта задачи следует рассуждать так же, как и при решении ее первых двух пунктов. Так как $n \geqslant 1$, то $0 < \dfrac{9}{n} \leqslant 9$, поэтому $-\dfrac{9}{n} \geqslant -9$, значит, $n - \dfrac{9}{n} \geqslant -8$. Значение $x_1 = -8$ и является наименьшим.

Задача 95. Докажите, что значения всех элементов последовательности: 1) $x_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ лежат в отрезке $\left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$; 2) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$ лежат в отрезке $[-1; 1]$; 3) $x_n = \dfrac{1}{n^2 - 4n + 5}$ лежат в отрезке $[0; 1]$; 4) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$ лежат в отрезке $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

1) Неравенство $\dfrac{2n+1}{n+1} \leqslant 2$ верно, поскольку $2n+1 \leqslant 2n+2$. Неравенство $\dfrac{2n+1}{n+1} \geqslant \dfrac{3}{2}$ верно, так как $4n + 2 \geqslant 3n + 3$ при всех $n \geqslant 1$. Естественно, в проделанных преобразованиях использовалось то, что знаменатель данной дроби — положительное число.

2) Неравенство $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leqslant 1$ верно, так как $|\sin n| \leqslant 1$, а $n \geqslant 1$.

3) Так как $n^2 - 4n + 5 = (n-2)^2 + 1 \geqslant 1$, то $0 < \dfrac{1}{n^2 - 4n + 5} \leqslant 1$.

4) Ясно, что $\sqrt{n^2+1} - n > 0$. Далее проделаем преобразование, которое будет достаточно часто использоваться в дальнейшем. Имеем

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{2}\,.$$

Подведем итог вводных занятий. Основная мысль, которую и следует довести до учащихся, состоит в том, что последовательность задана, если имеется правило, посредством которого по любому заданному натуральному числу — «номеру члена последовательности» — можно найти число, которое и называется «значением члена последовательности с данным номером». Конечно, есть два основных способа задания последовательностей: а) явной формулой и б) посредством рекуррентного соотношения, оба из которых должны появиться уже на первом занятии. Кроме того, предлагаемые задачи связаны и с понятиями ограниченности последовательности, ее периодичности или монотонности, но мы предлагаем вводить соответствующие определения на последующих занятиях.

Задачи для домашних заданий по теме 13

1. Задайте рекуррентным соотношением следующие последовательности, заданные явной формулой;

1) $x_n = n + 2014$; 2) $x_n = 2015 \cdot 3^n$; 3) $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корней}}$.

2. Напишите формулу общего члена последовательности, заданной соотношением:
1) $x_{n+1} = x_n + 2$ с начальным членом $x_1 = 2$; 2) $x_{n+1} = x_n + 2$ с начальным членом $x_1 = 3$; 3) $x_{n+1} = 2x_n$ с начальным членом $x_1 = 2$; 4) $x_{n+1} = 2x_n$ с начальным членом $x_1 = 3$; 5) $x_{n+1} = 2x_n + 1$ с начальным членом $x_1 = 1$; 6) $x_{n+1} = 2x_n + 2$ с начальным членом $x_1 = 2$.

3. Найдите наименьший и наибольший член последовательности (в том случае, если они существуют):
1) $x_n = 3n + \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{n}{3n^2+1}$; 3) $x_n = n^3 + 12n$; 4) $x_n = \dfrac{1}{n^2-7}$.

4. Рассмотрим последовательность, заданную формулой $x_n = \dfrac{2n+6}{n}$.
а) Найдите все значения членов этой последовательности, являющиеся натуральными числами.
б) Докажите, что среди значений членов этой последовательности имеется наибольшее, но нет наименьшего.

5. Продолжите последовательность и найдите ее сотый член:
1) $2, 12, 36, 80, 150$; 2) $2, 6, 18, 54, 162$; 3) $1, 10, 11, 100, 101, 110, 111$.
4) Найдите пропущенный член последовательности $0, 1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, ?, \dfrac{1}{2}$.

6. Рассмотрим последовательность, заданную соотношением $x_{n+1} = \frac{1-x_n}{1+x_n}$. а) Найдите множество значений элементов такой последовательности, если $x_1 = 2$. б) Докажите, что если $x_1 \neq -1$, то $x_{n+2} = x_n$ при всех натуральных значениях n.

7*. Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ (см. пункт (б) задачи 93). Ясно, что число 1 не может быть ее начальным членом. а) Найдите все числа, которые не могут быть начальными членами такой последовательности. б) Докажите, что при всех остальных значениях начальных членов между элементами этой последовательности имеет место соотношение $x_{n+4} = x_n$.

Решения домашних задач по теме 13

1. Ответы: 1) $x_{n+1} = x_n + 1$, $x_1 = 2015$; 2) $x_{n+1} = 3x_n$, $x_1 = 6045$; 3) $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$.

2. Ответы: 1) $x_n = 2n$; 2) $x_n = 2n+1$; 3) $x_n = 2^n$; 4) $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

5) В отличие от заданий предыдущих пунктов здесь придется порассуждать. Составим таблицу значений первых элементов рассматриваемой последовательности.

n	1	2	3	4	5
x_n	1	3	7	15	31

Нетрудно догадаться, что стоящие в таблице значения могут быть заданы формулой $x_n = 2^n - 1$. А далее рассуждаем по индукции: если $x_n = 2^n - 1$, то $x_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.
6) Рассуждение, аналогичное проведенному в решении предыдущего пункта задачи, дает формулу $x_n = 2^{n+1} - 2$.

3. 1) Понятно, что наибольшего члена данной последовательности не существует, поскольку $x_n > 3n$, а n — это произвольное натуральное число. Ясно также, что наименьшим членом является $x_1 = 4$, поскольку, как уже было замечено, при $n \geqslant 2$ выполнены неравенства $x_n > 3n \geqslant 6$.

2) В этом месте удобно ввести разные обозначения для разных последовательностей, поскольку предлагается рассматривать одновременно две последовательности. Пусть $x_n = 3n + \frac{1}{n}$, а $y_n = \frac{n}{3n^2+1}$. Так как $y_n = \frac{1}{x_n}$, то наименьшего члена второй последовательности не существует, а ее наибольший член обратен наименьшему члену x_1 первой

последовательности. Таким образом, $y_1 = \frac{1}{4}$ — это наибольший член последовательности (2).

3) Наибольшего члена не существует, а наименьшим является член $x_1 = 13$.

4) Составим табличку значений начальных членов данной последовательности.

n	1	2	3	4
x_n	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$

Поскольку значения всех остальных ее членов положительны, то наименьшим является член $x_2 = -\frac{1}{3}$. Поскольку при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $n^2 - 7 \geqslant 2$, то $x_n \leqslant x_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, наибольшим является третий член последовательности.

4. а) Так как $x_n = \frac{2n+6}{n} = 2+\frac{6}{n}$, то число x_n является целым тогда и только тогда, когда $\frac{6}{n}$ — целое число. Таким образом, число n должно быть делителем числа 6, т. е. $n = 1, 2, 3, 6$. Поэтому натуральными являются значения $x_1 = 8$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$ и $x_6 = 3$.

б) Если $n > 1$, то $x_n = 2 + \frac{6}{n} < 2 + 6 = x_1$, поэтому $x_1 = 8$ есть наибольший член данной последовательности. Ясно, что $2 < x_{n+1} < x_n$ при всех n. С другой стороны, значения членов этой последовательности могут быть сколь угодно близкими к 2. Например, $x_n = 2 + \frac{6}{n} < 2 + \frac{1}{10}$ при всех $n > 60$, а $x_n < 2{,}001$ при $n > 6000$, и так далее.

5. Собственно говоря, задача состоит в том, чтобы заметить закономерность. 1) Естественно, что $x_2 = 12 = 4 \cdot 3$, $x_3 = 36 = 9 \cdot 4$ и $x_4 = 80 = 16 \cdot 5$. Как видно, $x_n = n^2(n+1)$. Да, так и есть, $x_5 = 5^2 \cdot 6 = 25 \cdot 6 = 150$. Таким образом, $x_{100} = 100^2 \cdot 101 = 1010000$.

2) В данном случае каждый следующий член последовательности втрое больше предыдущего, поэтому $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, значит, $x_{100} = 2 \cdot 3^{99}$.

3) Задача похитрее. Сотым членом данной последовательности является 1100100 — число 100, записанное в двоичной системе.

4) Пропущен член, равный $\sin \frac{180^\circ}{5} = \sin 36^\circ$.

6. а) Если $x_1 = 2$, то $x_2 = -\frac{1}{3}$, а $x_3 = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$, и далее все повторяется. Поэтому множество значений состоит из пары $\{2, -\frac{1}{3}\}$.

б) Имеем

$$x_{n+2} = \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}} = \frac{1 - \frac{1-x_n}{1+x_n}}{1 + \frac{1-x_n}{1+x_n}} = \frac{2x_n}{2} = x_n,$$

при этом следующий элемент этой последовательности существует, если предыдущий не был равен -1.

7. Пусть $x_1 = a$. Тогда $x_2 = \dfrac{1+a}{1-a}$, при этом элемент x_2 не существует, если $a = 1$. Если $a \neq 1$, то $x_3 = \dfrac{1 + \frac{1+a}{1-a}}{1 - \frac{1+a}{1-a}} = -\dfrac{1}{a}$. При этом третий элемент последовательности будет существовать, если $a \neq 0$. Поэтому предположим, что $a \neq 0; 1$. Тогда $x_4 = \dfrac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Если $a \neq -1$, то элемент x_4 существует. Предположим, что $a \neq 0; \pm 1$. Тогда $x_5 = \dfrac{1 + \frac{a-1}{a+1}}{1 - \frac{a-1}{a+1}} = a$. Таким образом, мы получаем ответ на задание пункта (а): x_1 не может быть равным 0, -1 или же 1. Собственно говоря, проведенное вычисление доказывает и пункт (б). Действительно, взяв $a = x_n$, мы получим, что $x_{n+4} = a = x_n$.

Самостоятельная работа 8 (тема 13)

Вариант 1

1. Даны последовательности $x_n = \left\{\frac{n}{4}\right\}$ и $y_n = \left\{\frac{n!}{4}\right\}$ (здесь $\{a\}$ — это дробная часть числа a). Найдите: а) тридцатые члены этих последовательностей; б) множества их значений.

2. Задайте последовательности $x_n = n+2$ и $y_n = \sqrt{n+1}$ рекуррентным образом.

3. Найдите формулу общего члена последовательности с начальным членом $x_1 = 2$, если: а) $x_{n+1} = x_n + 6$; б) $x_{n+1} = 6 - x_n$.

4. Выясните, существует ли наименьший и наибольший элемент последовательности: а) $x_n = \dfrac{5}{n}$; б) $x_n = n^2 - 20n$; в) $x_{n+1} = 2x_n - 1$, $x_1 = 2$.

Вариант 2

1. Даны последовательности $x_n = \left\{\frac{n}{8}\right\}$ и $y_n = \left\{\frac{n!}{8}\right\}$ (здесь $\{a\}$ — это дробная часть числа a). Найдите: а) тридцатые члены этих последовательностей; б) множества их значений.
2. Задайте последовательности $x_n = 2n + 1$ и $y_n = \sqrt{n}$ рекуррентным образом.
3. Найдите формулу общего члена последовательности с начальным членом $x_1 = 2$, если: а) $x_{n+1} = x_n + 8$; б) $x_{n+1} = 8 - x_n$.
4. Выясните, существует ли наименьший и наибольший элемент последовательности: а) $x_n = \dfrac{6}{n}$; б) $x_n = 30n - n^2$; в) $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 1$.

Вариант 3

1. Дана последовательность $x_n = \dfrac{3n}{n+2}$. а) Докажите, что все ее члены лежат в отрезке $[1; 3]$. б) Найдите все ее целые члены. в) Укажите какое-нибудь число из промежутка $(1; 3)$, не являющееся ее значением.
2. Найдите формулу общего члена последовательности с начальным членом $x_1 = 2$, если: а) $x_{n+1} = 6x_n$; б) $x_{n+1} = \dfrac{6}{x_n}$.
3. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями: $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$, $x_1 = 2$.
4. Выясните, существует ли наименьший и наибольший член последовательности: а) $x_n = n + \dfrac{4}{n}$; б) $x_n = \dfrac{1}{n^2 - 2}$; в) заданной соотношением $x_{n+1} = 2x_n - 1$, $x_1 = c$.

Вариант 4

1. Дана последовательность $x_n = \dfrac{4n}{n+3}$. а) Докажите, что все ее члены лежат в отрезке $[1; 4]$. б) Найдите все ее целые члены. в) Укажите какое-нибудь число из промежутка $(1; 4)$, не являющееся ее значением.
2. Найдите формулу общего члена последовательности с начальным членом $x_1 = 2$, если: а) $x_{n+1} = 8x_n$; б) $x_{n+1} = \dfrac{8}{x_n}$.
3. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 - x_n}$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$.
4. Выясните, существует ли наименьший и наибольший элемент последовательности: а) $x_n = n + \dfrac{9}{n}$; б) $x_n = \dfrac{1}{n^2 - 3}$; в) заданной соотношением $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = c$.

Дополнительные упражнения по теме 13

8.1. Задайте двумя способами — формулой общего члена и рекуррентным образом — последовательности: 1) нечетных натуральных чисел; 2) натуральных чисел, остаток при делении которых на 5 равен 4; 3) натуральных степеней числа 3; 4) квадратов натуральных чисел.

8.2. Задайте посредством рекуррентного соотношения последовательности: 1) $x_n = n - 5$; 2) $x_n = 25n$; 3) $x_n = 5n!$; 4) $x_n = \dfrac{5}{n}$; 5) $x_n = 3 \cdot 5^n$; 6) $x_n = \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots \sqrt{5}}}}_{n \text{ корней}}$.

8.3. Задайте явным образом следующие рекуррентно заданные последовательности, первый член каждой из которых равен 2:
1) $x_{n+1} = 3x_n$; 2) $x_{n+1} = x_n + 3$; 3) $x_{n+1} = nx_n$; 4) $x_{n+1} = (x_n)^3$.

8.4. Найдите множество значений следующих последовательностей: 1) последних цифр чисел 2^n; 2) остатков от деления чисел 2^n на 10; 3) остатков от деления чисел n^2 на 3; 4) остатков от деления чисел n^2 на 4.

8.5. Найдите множество значений следующих последовательностей: 1) $x_n = \left[\frac{n}{10}\right]$; 2) $x_n = \left[\frac{10}{n}\right]$; 3) $x_n = \left\{\frac{n}{10}\right\}$; 4) $x_n = \left\{\frac{10}{n}\right\}$; 5) $x_n = \left\{\frac{n!}{10}\right\}$; 6) $x_n = \left\{\frac{n^2}{10}\right\}$.

8.6. Найдите наименьший и наибольший элементы следующих последовательностей (если они, конечно, существуют): 1) $x_n = 2n - 5$; 2) $x_n = 2 - 5n$; 3) $x_n = 5n^2 + 2n$; 4) $x_n = 2n^2 - 5n$; 5) $x_n = 2n^3 - 5n$; 6) $x_n = \dfrac{1}{2n-5}$; 7) $x_n = \dfrac{1}{2n+5}$; 8) $x_n = \dfrac{n}{2n+5}$; 9) $x_n = 5n + \dfrac{2}{n}$; 10) $x_n = 2n - \dfrac{5}{n}$; 11) $x_n = 2n + \dfrac{5}{n}$.

Тема 14. Монотонные последовательности. Периодические последовательности

Выделим те свойства последовательностей, которые в определенном смысле говорят о том, что последовательность ведет себя «регулярным» образом. Первым из подобных свойств является *монотонность*, вторым, и в некотором смысле противоположным, — *периодичность*.

Будем называть последовательность *возрастающей*, если каждый ее последующий член больше предыдущего, т. е. если при всех натуральных n справедливо неравенство $x_{n+1} > x_n$. Если же каждый последующий член последовательности меньше предыдущего, т. е. $x_{n+1} < x_n$, то такую последовательность будем называть *убывающей*. Если при всех n выполнено неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$ ($x_{n+1} \leqslant x_n$), то последовательность называется *нестрого возрастающей* (соответственно, *нестрого убывающей*). Последовательность называется *монотонной*, если она является возрастающей или же является убывающей — как строго, так и нестрого.

Задача 96. Докажите, что следующие последовательности являются убывающими: 1) $x_n = \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = n - n^2$; 3) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 4) $x_n = (\sin 36^\circ)^n$; 5) $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{5}$, где $x_1 = 2$; 6) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{5}$, где $x_1 = 2$.

1) Неравенство $x_{n+1} < x_n$ верно, так как $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.

2) Воспользуемся свойством квадратичной функции $f(x) = x - x^2$. Она убывает на луче $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, поэтому $x_{n+1} = f(n+1) < f(n) = x_n$. Конечно, можно было написать, что $n + 1 - (n+1)^2 < n - n^2$, поскольку $-2n < 0$. Подчеркнем еще раз, что стоит связать свойство последовательности со свойством функции.

3) Так как $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, то из очевидного неравенства $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ следует, что $x_{n+1} < x_n$. Конечно, достаточно было заметить, что функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ является убывающей.

4) Введем обозначение $a = \sin 36^\circ$. Так как $0 < a < 1$, то $a^{n+1} < a^n$, что и требовалось доказать.

5) Поскольку все члены данной последовательности очевидным образом являются положительными, то $\dfrac{x_n}{5} < x_n$, откуда и следует, что $x_{n+1} < x_n$.

6) Неравенство $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{5} < x_n$ выполнено, если $x_n < 5$. Так как $x_1 = 2$, то $x_2 < x_1 = 2$. Таким образом, рассуждая по индукции, мы и получаем, что если известно, что $x_n < 2$, то $x_{n+1} < x_n < 2$.

Задача 97. Выясните, является ли монотонной последовательность: 1) $x_n = \sin(18^\circ n)$; 2) $x_n = n^2 - 10n$; 3) $x_n = n^3 - n$; 4) заданная соотношением $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{5}$, если $x_1 = c$; 5) заданная соотношением $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{5}$, если $x_1 = c$.

1) Конечно, не является, так как, например, $0 < x_1 < 1$, $x_5 = 1$, а $x_{10} = 0$. 2) Конечно, не является, так как, например, $x_1 = -9$,

$x_2 = -16$, а $x_{10} = 0$. 3) Да, является. Так как $x_n = (n-1)n(n+1)$, то $x_{n+1} = n(n+1)(n+2) > x_n$. 4) Да, является при любом значении c. Если $c = 0$, то последовательность постоянна. Если $c > 0$, то $x_n > 0$ при любом n, следовательно, $x_{n+1} = \frac{x_n}{5} < x_n$. Если же $c < 0$, то $x_n < 0$, поэтому $x_{n+1} > x_n$. 5) Если $c = 0$ или $c = 5$, то последовательность x_n постоянна. Если $x_1 = c > 5$, то $x_2 = x_1 \cdot \frac{c}{5} > x_1 > 5$. Рассуждая далее по индукции, получаем, что, поскольку $x_n > 5$, то $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{x_n}{5} > x_n$. Таким образом, если $c > 5$, то последовательность x_n — возрастающая. Если $0 < c < 5$, то аналогичным образом доказывается, что последовательность является убывающей. При $c < -5$ последовательность — возрастающая, при $-5 < c < 0$ последовательность монотонной не является. Наконец, при $c = -5$ мы получаем нестрого возрастающую последовательность $-5, 5, 5, \ldots$

Во многих случаях монотонность данной последовательности можно доказать, используя монотонность известных последовательностей. Поэтому стоит доказать, чтобы далее использовать, следующие утверждения.

Задача 98. Даны две возрастающие последовательности x_n и y_n. 1) Докажите, что если $a > 0$, то последовательность ax_n возрастает, а если $a < 0$, то она убывает. 2) Докажите, что последовательность $x_n + y_n$ — возрастающая. 3) Докажите, что если числа a и b имеют один и тот же знак, то последовательность $z_n = ax_n + by_n$ является монотонной. 4) Верно ли, что последовательность $z_n = \frac{1}{x_n}$ является монотонной? 5) Сформулируйте дополнительное условие на последовательность x_n, при выполнении которого последовательность $z_n = \frac{1}{x_n}$ является монотонной. 6) Верно ли, что последовательность $z_n = x_n y_n$ является монотонной? 7) Сформулируйте дополнительное условие на последовательности x_n и y_n, при выполнении которого последовательность $z_n = x_n y_n$ является монотонной.

4) Нет, неверно. Если $x_n = n - \frac{3}{2}$, то последовательность z_n не будет монотонной, поскольку $z_1 = -2$, $z_2 = 2 > z_1$, а $z_3 = \frac{2}{3} < z_2$.

5) Достаточно предположить, что все члены последовательности x_n имеют один и тот же знак. Действительно, при этом предположении произведение $x_n x_{n+1}$ положительно, поэтому, поделив на него обе части неравенства $x_{n+1} > x_n$, мы получим неравенство $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$, которое и означает, что последовательность z_n — убывающая.

6) Нет, неверно. Рассмотрите последовательности $x_n = y_n = n - 2$.

7) Достаточно предположить, что все члены обеих последовательностей x_n и y_n имеют один и тот же знак, т. е. либо $x_n > 0$ и $y_n > 0$ при всех натуральных n, либо $x_n < 0$ и $y_n < 0$.

Задача 99. Докажите, что следующие последовательности являются возрастающими: 1) $x_n = \dfrac{n-1}{n}$; 2) $x_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{n}$; 3) $x_n = \dfrac{2^n}{n+1}$; 4) $x_n = 3^n - 2^n$.

1) $x_n = \dfrac{n-1}{n} < \dfrac{n}{n+1} = x_{n+1}$, поскольку $n^2 - 1 < n^2$. Однако лучше рассуждать иначе. Так как $x_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$, а последовательность $\dfrac{1}{n}$ — убывающая, то x_n — возрастающая последовательность.

2) Поскольку $\sqrt{2n+3} > \sqrt{2n+1}$ и $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, то последовательность x_n возрастает как сумма двух возрастающих последовательностей.

3) Неравенство $\dfrac{2^{n+1}}{n+2} > \dfrac{2^n}{n+1}$ равносильно неравенству $2(n+1) > n+2$, или $n > 0$, справедливому для всех натуральных чисел. Подчеркнем, что из того факта, что x_n есть частное двух возрастающих последовательностей, нельзя было сделать никакого вывода о поведении этой последовательности.

4) Так как $x_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n$, то $x_{n+1} - x_n = 2 \cdot 3^n - 2^n > 3^n - 2^n > 0$. Подчеркнем, что из того факта, что x_n есть разность двух возрастающих последовательностей, нельзя сделать никакого вывода о ее поведении.

Задача 100. Исследуйте на монотонность последовательность, заданную соотношением $x_{n+1} = 2x_n + 1$: а) если $x_1 = 1$; б) если $x_1 = -4$; в) в зависимости от значения ее первого члена.

а) Если $x_1 = 1$, то $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ и, вообще, нетрудно догадаться, что $x_n = 2^n - 1$. Таким образом, мы получаем возрастающую последовательность.

б) Если начать рассуждать так же, как при решении предыдущего пункта, то получим последовательность $-4, -7, -13, -25, \ldots$ «Видно», что данная последовательность — убывающая. Аккуратное доказательство — в решении следующего пункта задачи.

в) Для данной последовательности неравенство $x_{n+1} > x_n$ равносильно неравенству $2x_n + 1 > x_n$, или $x_n > -1$. Конечно, его справедливость зависит от значения члена этой последовательности. Но если $x_1 > -1$, то справедливо неравенство $x_2 > x_1$, значит, и $x_2 > -1$, откуда будет следовать, что $x_3 > x_2 > -1$, и так далее. Если же $x_1 < -1$, то $x_2 < x_1 < -1$, и так далее. Таким образом, если начальный член рассматриваемой последовательности больше -1, то она является возрастающей, если же меньше — убывающей. Заметим, что если $x_1 = -1$, то $x_n = -1$ при всех натуральных значениях n.

Покажем еще один интересный прием. При решении этой задачи полезно сделать небольшое (и по сути — естественное) преобразование. Прибавив по 1 к обеим частям данного соотношения, мы получим соотношение $x_{n+1}+1 = 2(x_n+1)$, которое после переобозначения $y_n = x_n+1$ превращается в соотношение $y_{n+1} = 2y_n$. Ясно, что новая последовательность возрастает (убывает) тогда и только тогда, когда возрастает (соответственно, убывает) исходная последовательность. Осталось заметить, что последовательность y_n очевидно является возрастающей, если $y_1 = x_1 + 1 > 0$, и является убывающей, если $y_1 < 0$.

Задача 101. Найдите все значения a, при которых является возрастающей последовательность: 1) $x_n = n^2 - an$; 2) $x_n = 5^n - a \cdot 2^n$; 3) $x_n = \dfrac{an+1}{n+1}$; 4) $x_n = an + (-1)^n$.

Имеет смысл рассмотреть разность $x_{n+1} - x_n$ и найти условие, при котором при любом натуральном n она является положительным числом.

1) $x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - a(n+1) - n^2 + an = 2n + 1 - a > 0$, если $a < 2n + 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что имеет место, если $a < 3$. Заметим, что при $a = 3$ первые два члена этой последовательности совпадают.

2) $x_{n+1} - x_n = 5^{n+1} - a \cdot 2^{n+1} - 5^n + a \cdot 2^n = 4 \cdot 5^n - a \cdot 2^n > 0$, если $a < 4 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что имеет место, если $a < 10$.

3) В этом случае стоит выписать только числитель дроби, полученной после приведения к общему знаменателю разности $\dfrac{a(n+1)+1}{n+2} - \dfrac{an+1}{n+1}$. Он равен

$$\begin{aligned} &a(n+1)^2 + n + 1 - (an+1)(n+2) = \\ &\qquad = an^2 + 2an + a + n + 1 - an^2 - 2an - n - 2 = a - 1\,. \end{aligned}$$

Таким образом, при $a > 1$ данная последовательность является возрастающей, а при $a < 1$ — убывающей.

Приведем еще два решения этой задачи, в которых преобразований будет существенно меньше.

В первом из них надо просто преобразовать формулу, определяющую данную последовательность,

$$x_n = \frac{an+1}{n+1} = \frac{an+a+1-a}{n+1} = a + \frac{1-a}{n+1}\,.$$

Поскольку последовательность $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ — убывающая, то поведение данной последовательности зависит от знака разности $1-a$.

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{ax+1}{x+1}$ на луче $[0;+\infty)$. Это дробно-линейная функция, поведение которой хорошо известно (см. задачу 9а домашнего задания в теме 3). Если $a < 1$, то она является убывающей, если $a > 1$, — возрастающей. Так как $x_n = f(n)$, то, например, при $a < 1$ из неравенства $n+1 > n$ следует, что $x_{n+1} = f(n+1) < f(n) = x_n$. Таким образом, в этом случае рассматриваемая последовательность является убывающей.

4) Если число n четно, то $x_n = an+1$, а $x_{n+1} = a(n+1)-1$, поэтому $x_{n+1} - x_n = a-2$. Если же n нечетно, то $x_{n+1} - x_n = a+2$. Следовательно, разность $x_{n+1} - x_n$ положительна при любом n тогда и только тогда, когда $a > 2$.

Последовательность x_n называется *периодической*, если существует такое натуральное число k, что $x_{n+k} = x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее из чисел k, обладающих указанным свойством, называется *периодом* данной последовательности.

Примеры периодических последовательностей были даны ранее. При этом порою их внешний вид никак не говорил о том, что рассматриваемая последовательность как-то связана с тригонометрическими функциями.

Задача 102. Выясните, какие из следующих последовательностей являются периодическими: а) $x_n = \sin(18^\circ \cdot n)$; б) $x_n = \sin(180^\circ \sqrt{2}\, n)$; в) $x_n = \sin\bigl(180^\circ \cdot \dfrac{n}{2n+1}\bigr)$.

а) Поскольку $x_{n+20} = \sin\bigl(18^\circ(n+20)\bigr) = \sin\bigl(18^\circ n + 360^\circ\bigr) = x_n$, то данная последовательность — периодическая.

б) Если $x_{n+k} = x_n$ хотя бы при некоторых натуральных n и k, то из равенства $\sin\bigl(180^\circ\sqrt{2}\,(n+k)\bigr) = \sin(180^\circ\sqrt{2}\,n)$ следовало бы, что $180^\circ\sqrt{2}\,(n+k) = 180^\circ\sqrt{2}\,n + 360^\circ m$ или же $180^\circ\sqrt{2}\,(n+k) = 180^\circ - 180^\circ\sqrt{2}\,n + 360^\circ m$. Оба варианта невозможны, так как в первом случае $k\sqrt{2} = 2m$, во втором случае $(2n+k)\sqrt{2} = 2m$, что противоречит тому, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

в) Данная последовательность не является периодической хотя бы потому, что она — возрастающая. Действительно, так как является возрастающей последовательность $y_n = 180^\circ \cdot \dfrac{n}{2n+1}$, то из того, что $0 < y_n < 90^\circ$, следует, что возрастает и данная последовательность $x_n = \sin y_n$.

Задача 103. Пусть $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Докажите, что последовательность x_n — периодическая.

В следующей таблице указаны значения первых элементов данной последовательности.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2

Поскольку, как мы видим, $x_7 = x_1$ и $x_8 = x_2$, то $x_9 = x_3$ и так далее. Таким образом, рассматриваемая последовательность имеет период 6.

Задача 104. Предположим, что непостоянная последовательность x_n такова, что $x_{n+9} = x_n$ и $x_{n+15} = x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что период этой последовательности равен 3.

Поскольку $x_{n+6} = x_{n+15} = x_n$, то $x_{n+3} = x_{n+9} = x_n$. Докажем, что $k = 3$ и есть период данной последовательности. Для этого достаточно доказать, что число 2 не является ее периодом.

Если $x_{n+2} = x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $x_{n+1} = x_{n+3} = x_n$, таким образом, в этом случае последовательность была бы постоянной.

Результат следующей задачи имеет глубокие обобщения, связанные с именами *Ферма* и *Эйлера*, но это — тема будущего.

Задача 105. Выясните, является ли периодической последовательность остатков от деления числа 3^n на: а) 7; б) 10; в) 27.

а) Из таблицы вычисленных значений остатков

n	1	2	3	4	5	6	7
$3^n \pmod 7$	3	2	6	4	5	1	3

ясно видно, что числа 3^n и 3^{n+6} имеют одинаковые остатки при делении на 7. Для того чтобы в этом не осталось никаких сомнений, можно проделать следующее преобразование:

$$3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1) = 3^n(3^3 - 1)(3^3 + 1) = 3^n \cdot 26 \cdot 28,$$

из которого и следует, что $3^{n+6} - 3^n$ делится на 7 для любых натуральных n.

б) Из таблицы вычисленных значений остатков

n	1	2	3	4	5
$3^n \pmod{10}$	3	9	7	1	3

видно, что числа 3^n и 3^{n+4} имеют одинаковые остатки при делении на 10. Конечно, разность $3^{n+4} - 3^n = 3^n(81 - 1) = 80 \cdot 3^n$ делится на 10.

в) Конечно, рассматриваемая последовательность не является периодической, так как первые два ее члена равны, соответственно, 3 и 9, а все последующие члены этой последовательности равны нулю.

В заключение этой темы приведем одну задачу, решение которой являет собой пример синтеза логики и конкретных вычислений.

Задача 106. Найдите все натуральные числа n, при которых справедливо неравенство $9^n + 10^n \leqslant 11^n$.

Предположим, что при некотором натуральном k имеет место неравенство $11^k \geqslant 10^k + 9^k$. Тогда $11^{k+1} = 11 \cdot 11^k \geqslant 11(10^k + 9^k) > 10^{k+1} + 9^{k+1}$. Следовательно, неравенство $9^n + 10^n \leqslant 11^n$ будет выполняться при всех $n \geqslant k$. Поэтому, если мы найдем первое натуральное число, при котором верно данное неравенство, то оно будет верно для всех чисел, начиная с найденного. Подчеркнем, что пока не доказано, что такое число вообще найдется.

Теперь покажем, как это можно доказать. Для этого поделим обе его части на его правую часть. В результате мы получим неравенство $\left(\frac{9}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{11}\right)^n \leqslant 1$. Утверждение следует из того, что последовательность, стоящая в левой части полученного неравенства, является убывающей и приближающейся к нулю.

Теперь надо просто посчитать. Умножать «в столбик» не очень хочется, поэтому естественно воспользоваться калькулятором. Так как $9^4 + 10^4 = 16561 > 14641 = 11^4$, но $9^5 + 10^5 = 159049 < 161051 = 11^5$, то данное неравенство верно при всех $n \geqslant 5$.

Основное в этой теме — логика проверки определений и построение контрпримеров. С технической точки зрения, никаких новых идей нет: для проверки возрастания данной последовательности можно проверить, что разность $x_{n+1} - x_n$ любых двух ее последовательных членов есть число положительное, для чего в большинстве примеров надо провести несложное преобразование.

Задачи для домашних заданий по теме 14

1. Выясните, является ли монотонной последовательность:
1) $x_n = \sin(11^\circ \cdot n)$; 2) $x_n = \sin\dfrac{11^\circ}{n}$; 3) $x_n = \dfrac{n}{100} + \dfrac{1}{n}$; 4) заданная соотношением $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{n}$.

2. Пусть $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 1$, $x_1 = a$. Докажите, что если $a > 1$ или же $a < -2$, то данная последовательность — возрастающая.

3. Высните, верно ли, что для любой возрастающей последовательности x_n является также возрастающей последовательность: а) $y_n = x_n^2$; б) $z_n = \sqrt{x_n}$ (конечно, если эта последовательность определена).

4. Найдите все значения a, при которых является монотонной последовательность: а) $x_n = an + b$; б) $x_n = a^n$; в) $x_n = \dfrac{1}{an-3}$.

5. Найдите все значения коэффициентов, при которых является возрастающей последовательность $x_n = an^2 + bn + c$.

6. Исследуйте на монотонность последовательности, заданные соотношением $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1$ (в зависимости от значения первого члена).

7. Выясните, является ли периодической последовательность x_n, где x_n есть: а) остаток от деления числа n^2 на 9; б) дробная часть числа $\dfrac{3n}{11}$; в) дробная часть числа $n\sqrt{2}$.

8. Пусть $x_n = \{an\}$, где a — некоторое число, а через $\{c\}$ обозначена дробная часть числа c. Докажите, что последовательность x_n периодична тогда и только тогда, когда число a рационально.

9. Выясните, может ли сумма двух строго монотонных последовательностей быть непостоянной периодической последовательностью.

10. Последовательность x_n задана соотношением $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \sqrt{3}}{1 - x_n\sqrt{3}}$.
а) Пусть $x_1 = 1$. Докажите, что эта последовательность — периодическая. б) Может ли последовательность x_n быть постоянной? в) Найдите все периодические последовательности данного вида.

11. Пусть $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. а) Пусть $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Докажите, что последовательность x_n — периодическая. б) Докажите, что при любых значениях членов x_1 и x_2 последовательность x_n является периодической.

12. Пусть x_n и y_n — периодические последовательности, а $z_n = x_n y_n$.
а) Докажите, что если период каждой из последовательностей x_n и y_n равен k, то последовательность z_n также является периодической.

б) Выясните, может ли в условии предыдущего пункта число, меньшее k, быть периодом последовательности z_n. в) Докажите, что произведение любых двух периодических последовательностей является периодической последовательностью.

13*. Последовательность x_n строится по следующему правилу: если x_n — четное натуральное число, то $x_{n+1} = x_n/2$, если же x_n нечетно, то $x_{n+1} = x_n + 5$. Найдите периодические последовательности данного вида.

Решения домашних задач по теме 14

1. Ответы: 1) нет; 2) да. 3) Так как $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{n(n+1)}$, то эта разность отрицательна, если $n(n+1) < 100$, т. е. при $n = 1, 2, \ldots, 9$. Таким образом, $x_1 > x_2 < \ldots > x_{10} < x_{11} < \ldots$. 4) Поскольку $\dfrac{1}{n} > 0$, то $x_{n+1} > x_n$, значит, данная последовательность — возрастающая.

2. Пусть $x_1 > 1$. Так как $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 1$, то $x_2 > x_1 > 1$, и так далее по индукции. Если $x_1 = a < -2$, то $x_2 - 1 = a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2) > 0$, поэтому $x_2 > 1$. Таким образом, $x_2 > x_1$, а из проведенного рассуждения следует, что и $x_3 > x_2$, и так далее.

3. а) Конечно, последовательность y_n может не быть возрастающей, что показывает пример последовательности $x_n = n - 2$.

б) Если $x_{n+1} > x_n$, то $\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n}$, значит, z_n — возрастающая последовательность.

4. а) Если $a > 0$, то последовательность — возрастающая, если $a < 0$, то она — убывающая. При $a = 0$ она постоянна.

б) Если $a > 1$, то последовательность $x_n = a^n$ является возрастающей, если $0 < a < 1$, то эта последовательность — убывающая. При $a = 0; 1$ последовательность x_n постоянна. Если же $a < 0$, то соседние члены последовательности x_n имеют противоположные знаки, а потому она не является монотонной.

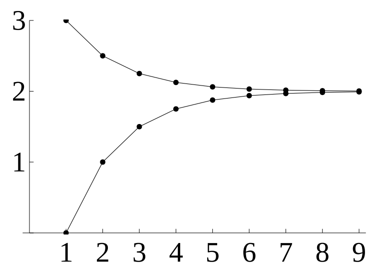
в) Данная последовательность монотонна, если $a \leqslant 0$ или же $a > 3$. Пусть $a < 0$. Так как в этом случае $a(n+1) - 3 < an - 3 < 0$, то $x_{n+1} = \dfrac{1}{a(n+1)-3} > \dfrac{1}{an-3} = x_n$ и данная последовательность — возрастающая. При $a = 0$ получаем постоянную последовательность.

Теперь предположим, что $a > 0$. Рассмотрим те номера n, для которых $an > 3$. Так как $x_{n+1} = \dfrac{1}{a(n+1)-3} < \dfrac{1}{an-3} = x_n$, то, начиная с некоторого номера, каждый последующий член последовательности меньше предыдущего. Поэтому если эта последовательность является монотонной, то она — убывающая. Если же некоторый ее член отрицателен, то убывающей она быть не может. Следовательно, все ее члены будут положительными, если положителен первый член этой послдеовательности, что имеет место при $a > 3$.

5. Ясно, что значение коэффициента c на поведение последовательности не влияет, поэтому далее положим $c = 0$. Пусть $a = 0$. Тогда данная последовательность возрастает, если $b > 0$. Пусть $a \neq 0$. Так как $x_1 = a + b$ и $x_2 = 4a + 2b$, то $x_1 < x_2$, если $3a + b > 0$. Неравенство $x_{n+1} > x_n$ верно тогда и только тогда, когда $(2n+1)a + b > 0$. Конечно, что коэффициент a должен быть положительным. Поэтому для произвольного натурального числа n справедливо неравенство $(2n+1)a + b \geqslant 3a + b$. Значит, если $a > 0$ и $3a + b > 0$, то не только $x_2 > x_1$, но и $x_{n+1} > x_n$ при всех натуральных n. Ответ: $(0, b, c)$, где $b > 0$, c — любое; (a, b, c), где $a > 0$, $3a + b > 0$, c — любое.

6. В этом случае рассуждать надо немного «хитрее», чем в решении задачи 100. Действительно, неравенство $x_{n+1} > x_n$ равносильно неравенству $x_n < 2$. Значит, если $x_1 < 2$, то $x_2 > x_1$, поэтому мы не можем сразу сделать вывод, что $x_2 < 2$, откуда бы следовало, что $x_3 > x_2$. Однако поскольку $x_2 = \dfrac{x_1}{2} + 1$, то из неравенства $x_1 < 2$ следует, что и $x_2 < 2$. Поэтому рассуждение естественнее провести в два шага. Если $x_n < 2$, то $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1 < 2$. Значит, если $x_1 < 2$, то $x_2 < 2$, и так далее. Таким образом, доказано, что если $x_1 < 2$, то $x_n < 2$ при всех натуральных n. Следовательно, $x_{n+1} > x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, таким образом, эта последовательность — возрастающая.

Если же $x_1 > 2$, то $x_n > 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$, откуда будет следовать, что $x_{n+1} < x_n$, так что в этом случае рассматриваемая последовательность является убывающей.



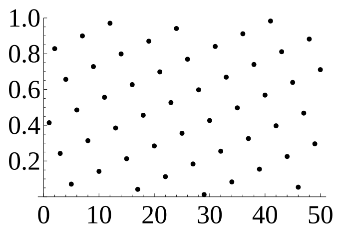
На рисунке изображено поведение последовательностей с начальными членами $x_1 = 0$ и $x_1 = 3$.

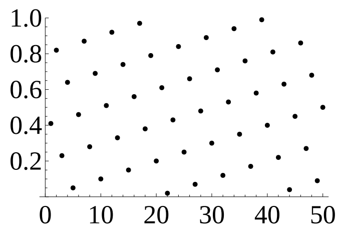
Конечно, можно было сделать преобразование, аналогичное тому, которое было проделано в одном из решений задачи 100. Положив $y_n = x_n - 2$, получим, что $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$, откуда и следует монотонность рассматриваемых последовательностей.

7. а) Да, является, поскольку числа n^2 и $(n+9)^2$ имеют одинаковые остатки при делении на 9.

б) Да, является, поскольку $\frac{3(n+11)}{11} = 3 + \frac{3n}{11}$, таким образом, разность дробей с номерами n и $n+11$ есть целое число, а потому их дробные части совпадают. Поэтому период этой последовательности равен 11.

в) Нет, не является. Более того, среди членов этой последовательности вообще нет двух равных, так как ни при каких различных числах n и k разность $n\sqrt{2} - k\sqrt{2}$ не является целым числом.





С другой стороны, покажите ученикам сначала левую картинку, затем правую. На каждой из них изображена зависимость значения члена последовательности от ее номера. На левой — дробной части произведения $n\sqrt{2}$, на правой — дробной части произведения $1{,}41n$. «По картинке» обе последовательности кажутся периодическими. Однако, как следует из решения задачи, первая из них периодической не является. Вторая последовательность действительно периодическая, но ее период увидеть из этой картинки невозможно, так как он равен 100.

8. Предположим, что последовательность x_n — периодическая. Тогда существует такое натуральное число k, что, в частности, $x_{k+1} = x_1$, $\{(k+1)a\} = \{a\}$, следовательно, разность чисел $(k+1)a$ и a есть целое число. Таким образом, $ka = \ell$, где число ℓ — целое, откуда и следует, что число a рационально.

Теперь пусть $a = \frac{\ell}{k}$. Так как разность $\frac{\ell}{k}(n+k) - \frac{\ell}{k}n = \ell$ есть целое число, то дробные части уменьшаемого и вычитаемого равны друг другу, откуда и следует, что $x_{n+k} = x_n$ для любого натурального n.

9. Оказывается, что может! Нетрудно видеть, что последовательность $x_n = 2n + (-1)^n$ является возрастающей, а последовательность $y_n = (-1)^n - 2n$ — убывающей, тогда как их сумма $z_n = x_n + y_n = 2 \cdot (-1)^n$ есть последовательность периода 2.

10. а) Если $x_1 = 1$, то

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{-2} = -2-\sqrt{3}\,,$$
$$x_3 = \frac{-2-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}+3} = \frac{-2}{4+2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2,$$
$$x_4 = \frac{\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-2} = 1 = x_1,$$

следовательно, данная последовательность имеет период 3.

б) Из равенства $x_2 = \dfrac{x_1+\sqrt{3}}{1-x_1\sqrt{3}} = x_1$ получим, что $x_1 + \sqrt{3} = x_1 - x_1^2\sqrt{3}$, или $x_1^2 = -1$, что невозможно. Следовательно, постоянных последовательностей данного вида не существует.

в) В действительности, все такие последовательности имеют период, равный трем. Проще всего это доказать следующим образом. Положим $x_1 = \operatorname{tg}\alpha \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$, то

$$x_2 = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 60^\circ}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 60^\circ} = \operatorname{tg}\left(\alpha + 60^\circ\right).$$

Аналогично, $x_3 = \operatorname{tg}\left(\alpha + 120^\circ\right)$ и $x_4 = \operatorname{tg}\left(\alpha + 180^\circ\right) = \operatorname{tg}\alpha = x_1$, что и доказывает, что период произвольной последовательности данного вида равен 3. Конечно, еще надо потребовать, чтобы $x_1 \neq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, в противном случае не будет существовать третий член последовательности.

Безусловно, можно провести прямое вычисление. При заданном значении x_1 получим, что

$$x_3 = \frac{x_2+\sqrt{3}}{1-x_2\sqrt{3}} = \frac{\frac{x_1+\sqrt{3}}{1-x_1\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,\frac{x_1+\sqrt{3}}{1-x_1\sqrt{3}}} = \frac{x_1-\sqrt{3}}{1+x_1\sqrt{3}}\,,$$

а $x_4 = x_1$.

11. а) Достаточно, как и при решении задачи 103, найти первые восемь значений данной последовательности, чтобы увидеть, что ее период равен 6.

б) Если данная последовательность постоянна, то $x_{n+1} = x_n$, значит, $x_{n+2} = 1$, поэтому $x_n = 1$ при всех натуральных n. Если хотя бы один из членов x_1 и x_2 не равен 1, то

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n}\,,\ x_{n+3} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{x_n \cdot x_{n+1}} = \frac{1}{x_n}\,,$$

поэтому $x_{n+6} = \dfrac{1}{x_{n+3}} = x_n$.

12. а) Утверждение очевидно, так как если $x_{n+k} = x_n$ и $y_{n+k} = y_n$, то и $z_{n+k} = x_{n+k}y_{n+k} = x_n y_n = z_n$.

б) Пусть, например, x_n и y_n — последовательности периода 4, первыми членами которых являются, соответственно, числа $1, 2, 3, 4$ и $3, 2, 1, 1$. В этом случае первыми четырьмя членами последовательности z_n являются числа $3, 4, 3, 4$, поэтому ее период равен двум.

в) Пусть период последовательности x_n равен k, а период последовательности y_n равен ℓ. Положим число m равным наименьшему общему кратному чисел k и ℓ. Так как числа $p = \dfrac{m}{k}$ и $q = \dfrac{m}{\ell}$ — натуральные, то $x_n = x_{n+k} = \ldots = x_{n+pk} = x_{n+m}$ и $y_n = y_{n+\ell} = \ldots = y_{n+q\ell} = y_{n+m}$, поэтому $z_{n+m} = z_n$, таким образом, z_n — периодическая последовательность.

13. Следующая таблица содержит значения начальных членов последовательности, первым членом которой является единица.

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	1	6	3	8	4	2	1

Мы видим, что и $x_7 = 1$, а потому $x_8 = 6$, $x_9 = 3$, и так далее. Таким образом, если первым членом последовательности является одно из чисел множества $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, то она является периодической с периодом 6, $x_{n+6} = x_n$ при всех натуральных n.

Если $x_1 = 5$, то $x_2 = 10$, $x_3 = 5$, $x_4 = 10$. Поэтому последовательности, первый член которых равен 5 или 10, являются периодическими периода два.

Можно доказать, что других периодических последовательностей данного вида не существует. Если, например, $x_1 = 7$, то $x_2 = 12$, $x_3 = 6$, и далее значениями членов этой последовательности могут быть только числа множества $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, в котором нет «семерки».

Самостоятельная работа 9 (тема 14)

Вариант 1

1. Докажите, что следующие последовательности являются возрастающими: а) $x_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$; б) $x_n = \left(\operatorname{tg} 72^\circ\right)^n$.

2. Выясните, верно ли, что для всякой возрастающей последовательности x_n последовательность $|x_n|$ является монотонной.

3. Найдите все положительные значения a, при которых являются возрастающими последовательности: а) $x_n = n^2 - 2an$; б) $x_n = \dfrac{2n+1}{n+a}$.

4. Выясните, является ли периодической последовательность:
а) $x_n = \operatorname{tg}(36^\circ \cdot n)$; б) $x_n = \operatorname{tg}\dfrac{36^\circ}{n}$; в) $x_n = \left\{\dfrac{2n}{7}\right\}$. В случае положительного ответа на данный вопрос укажите ее период.

Вариант 2

1. Докажите, что следующие последовательности являются убывающими: а) $x_n = \dfrac{2n+5}{n+2}$; б) $x_n = \left(\operatorname{tg} 36^\circ\right)^n$.

2. Выясните, верно ли, что для всякой возрастающей последовательности x_n последовательность nx_n является монотонной.

3. Найдите все положительные значения a, при которых являются убывающими последовательности: а) $x_n = an - n^2$; б) $x_n = \dfrac{n+1}{2n+a}$.

4. Выясните, является ли периодической последовательность:
а) $x_n = \operatorname{tg}(20^\circ \cdot n)$; б) $x_n = \operatorname{tg}\dfrac{20^\circ}{n}$; в) $x_n = \left\{\dfrac{3n}{5}\right\}$. В случае положительного ответа на данный вопрос укажите ее период.

Вариант 3

1. Выясните, являются ли монотонными последовательности:
а) $x_n = n + \dfrac{1}{n}$; б) $x_n = n + \dfrac{3}{n}$; в) $x_{n+1} = x_n^2 + 2$, $x_1 = c$.

2. Найдите все положительные значения a, при которых являются возрастающими последовательности: а) $x_n = \dfrac{2n+1}{n+a}$; б) $x_n = n^3 - an$.

3. Выясните, являются ли периодическими последовательности остатков от деления: а) числа n^2 на 5; б) числа n^2 на $n+2$.

4. Докажите, что последовательность, заданная соотношением $x_{n+1} = \dfrac{8-3x_n}{3-x_n}$, является периодической.

Вариант 4

1. Выясните, являются ли монотонными последовательности:
а) $x_n = 2n + \dfrac{1}{n}$; б) $x_n = 2n + \dfrac{5}{n}$; в) $x_{n+1} = x_n^2 + 1$, $x_1 = c$.

2. Найдите все положительные значения a, при которых являются убывающими последовательности: а) $x_n = \dfrac{n+1}{2n+a}$; б) $x_n = an - n^3$.

3. Выясните, являются ли периодическими последовательности остатков от деления: а) числа n^2 на 7; б) числа n^2 на $n+3$.

4. Докажите, что последовательность, заданная соотношением $x_{n+1} = \dfrac{3 - 2x_n}{2 - x_n}$, является периодической.

Дополнительные упражнения по теме 14

9.1. Выясните, существуют ли возрастающие последовательности: 1) все члены которых являются целыми отрицательными числами; 2) все члены которых являются отрицательными числами; 3) в которых только один член является отрицательным числом; 4) в которых только один член является положительным числом.

9.2. Выясните, существуют ли такие невозрастающие последовательности: 1) все члены которых являются натуральными числами; 2) все члены которых положительны; 3) множество значений которых содержит все натуральные числа; 4) в которых только один член является положительным числом.

9.3. Докажите, что следующие последовательности не являются монотонными: 1) $x_n = n^2 - 100n$; 2) $x_n = n + \dfrac{100}{n}$; 3) $x_n = \left\{\dfrac{10}{n}\right\}$; 4) $x_n = \dfrac{n^4}{2^n}$; 5) $x_n = \cos(n \cdot 5^\circ)$.

9.4. Докажите, что следующие последовательности являются монотонными: 1) $x_n = n^2 - n$; 2) $x_n = n^3 - 3n$; 3) $x_n = n + \dfrac{2}{n}$; 4) $x_n = \left\{\dfrac{2}{n+2}\right\}$; 5) $x_n = \dfrac{n^3}{10^n}$; 6) $x_n = \cos\dfrac{45^\circ}{n}$.

9.5. Выясните, может ли быть возрастающей: 1) разность двух убывающих последовательностей; 2) произведение двух убывающих последовательностей; 3) сумма двух убывающих последовательностей; 4) отношение двух убывающих последовательностей.

9.6. Рассмотрим последовательность, для которой $x_{n+1} = 3x_n + 1$ и $x_1 = a$. 1) Докажите, что если $a = -5$, то эта последовательность является убывающей. 2) Докажите, что если $a \geqslant 0$, то эта последовательность — возрастающая. 3) Найдите все значения a, при которых эта последовательность является возрастающей. 4) Выясните, существуют ли значения a, при которых эта последовательность не является монотонной.

9.7. Выясните, какие из следующих последовательностей являются периодическими: 1) $x_n = \cos(1^\circ \cdot n)$; 2) $x_n = \left\{\frac{n}{5}\right\}$; 3) $x_n = \cos\frac{1000^\circ}{n}$; 4) $x_n = \left\{\frac{3^n}{5}\right\}$; 5) $x_n = \{n\sqrt{5}\}$; 6) $x_n = 3 - x_{n-1}$ при $n \geqslant 2$, $x_1 = a$.

9.8. Пусть $y_n = (x_n)^2$. Выясните, верно ли, что: 1) если x_n — возрастающая последовательность, то и y_n — возрастающая последовательность; 2) если x_n — монотонная последовательность, то и y_n — монотонная последовательность; 3) если последовательность x_n не является монотонной, то и последовательность y_n не является монотонной; 4) если x_n — периодическая последовательность, то и y_n — периодическая последовательность; 5) если y_n — периодическая последовательность, то и x_n — периодическая последовательность.

9.9. Докажите, что если $x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$ и $x_1 \neq x_2$, то последовательность x_n не является периодической.

Тема 15. Ограниченные последовательности

Предположим, что мы изучаем возрастающие последовательности. В чем разница между поведением последовательностей $x_n = \frac{10n-1}{n}$ и $y_n = \frac{n}{10} - 1$? В следующей таблице приведены значения их начальных членов.

n	1	2	3	4	5
x_n	9	$\frac{19}{2} = 9{,}5$	$\frac{29}{3} \approx 9{,}67$	$\frac{39}{4} = 9{,}75$	$\frac{49}{5} = 9{,}8$
y_n	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$

С одной стороны, указанные значения членов первой последовательности больше значений членов второй из них. С другой стороны, ясно, что для членов с большими номерами все будет наоборот. Конечно, $x_n = \frac{10n-1}{n} < \frac{10n}{n} = 10$ при всех $n \in \mathbb{N}$, тогда как $y_n = \frac{n}{10} - 1 \geqslant 10$ при всех $n \geqslant 110$. Более того, каким бы ни было число c, найдется член второй из рассматриваемых последовательностей, значение которого больше этого числа. Этот пример является мотивировкой введения следующего определения.

Последовательность x_n называется *ограниченной сверху*, если существует число c, такое, что $x_n \leqslant c$ при всех $n \in \mathbb{N}$. С наглядно-геометрической точки зрения это означает, что на числовой прямой все точки x_n лежат левее точки c. Последовательность x_n называется *ограниченной снизу*, если существует число c, такое, что $x_n \geqslant c$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена как сверху, так и снизу, т. е. если найдутся такие числа a и b, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ при всех $n \in \mathbb{N}$. С геометрической точки зрения последовательность ограничена, если все ее члены лежат в некотором отрезке числовой прямой.

Вместо «двух букв» в определении ограниченной последовательности можно ограничиться одной. Дело в том, что всякий отрезок числовой прямой содержится в отрезке, серединой которого является точка 0, т. е. в отрезке вида $[-c; c]$. Условие $-c \leqslant x_n \leqslant c$ можно записать в виде $|x_n| \leqslant c$. Поэтому последовательность x_n является ограниченной, если найдется число c, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant c$.

Применим данное определение для доказательства первого общего (и простого) факта.

Задача 107. Докажите, что сумма и разность двух ограниченных последовательностей суть ограниченные последовательности.

Пусть x_n и y_n — ограниченные последовательности. По определению найдутся такие числа a и b, что для всех натуральных n выполнены неравенства $|x_n| \leqslant a$ и $|y_n| \leqslant b$. Тогда $|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| \leqslant a + b$, что и означает, что последовательность $x_n + y_n$ ограничена. Для разности $x_n - y_n$ справедливо в точности то же неравенство.

Последовательность называется *неограниченной*, если она не является ограниченной. Таким образом, последовательность не ограничена, если она не ограничена сверху или же не ограничена снизу.

Задача 108. Выясните, является ли каждая из следующих последовательностей ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной.
1) $x_n = \dfrac{1000}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{1000}$; 3) $x_n = \dfrac{100n}{2n-3}$; 4) $x_n = \dfrac{100n}{n^2+1}$;
5) $x_n = n\bigl(1 + (-1)^n\bigr)$.

1) Так как $0 \leqslant x_n \leqslant 1000$, то данная последовательность — ограниченная.

2) Если число n четно, то $x_n = \dfrac{n}{1000}$. Поскольку четное число может быть взято сколь угодно большим, то эта последовательность не ограничена сверху. Если же n нечетно, то $x_n = -\dfrac{n}{1000}$, таким образом, данная последовательность не является и ограниченной снизу.

3) Так как $x_1 = -100$, а все остальные члены этой последовательности положительны, то она ограничена снизу, $x_n \geqslant -100$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, $x_2 = 200$. Теперь воспользуемся следующим «правдоподобным соображением»: если n «достаточно велико», то $2n - 3 \approx 2n$, поэтому $x_n \approx 50$. Докажем, что $\dfrac{100n}{2n-3} \leqslant 200$ при всех $n \geqslant 2$. Преобразуя, получим неравенство $100n \leqslant 400n - 600$, или $600 \leqslant 300n$, т. е. $n \geqslant 2$. Следовательно, она является также и ограниченной сверху. С другой стороны, можно было воспользоваться тем, что эта последовательность убывает, начиная с номера $n = 2$.

4) Лучше всего воспользоваться неравенством $n^2 + 1 \geqslant 2n$, откуда следует, что $x_n \leqslant 50$. Так как $x_n \geqslant 0$, то это — ограниченная последовательность.

5) Чтобы понять поведение последовательности x_n, можно просто начать вычислять: $0, 4, 0, 8, 0, 12, \ldots$ Таким образом, каждый второй ее член равен нулю. Конечно, $x_n \geqslant 0$ при всех n, поэтому последовательность ограничена снизу. С другой стороны, в ней содержатся числа вида $4k$ при всех натуральных k, поэтому данная последовательность не ограничена сверху.

Этот пример показывает, что не только возрастающие последовательности являются не ограниченными сверху.

Задача 109. Известно, что $x_n \leqslant y_n$. Выясните, верно ли, что: 1) если последовательность y_n ограничена, то и последовательность x_n ограничена; 2) если последовательность x_n не ограничена, то и последовательность y_n не ограничена; 3) если последовательность x_n ограничена снизу, то и последовательность y_n ограничена снизу; 4) если последовательность x_n не ограничена снизу, то и последовательность y_n не ограничена снизу; 5) если последовательность x_n не ограничена сверху, то и последовательность y_n не ограничена сверху.

Конечно, из этих утверждений верными являются только утверждения (3) и (5). В этой задаче важно построение контрпримеров к утверждениям (1), (2) и (4).

Задача 110. Выясните, являются ли ограниченными последовательности: а) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; б) $x_n = (1{,}01)^n$; в) $x_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

а) Начнем с того, что произведем вычисления:

n	1	2	3	4	5
$\dfrac{n^2}{2^n}$	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{9}{8}$	1	$\dfrac{25}{32}$

Похоже, что при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$. Преобразовав его, получим неравенство $2n^2 > (n+1)^2$, или $n(n-2) > 1$, которое верно при всех $n \geqslant 3$. Таким образом, значения всех членов этой последовательности лежат в отрезке $\left[0; \frac{9}{8}\right]$, поэтому данная последовательность — ограниченная.

б) Конечно, считать здесь сложнее, но, возможно, стоит с этого начать, чтобы догадаться до нужной оценки.

n	1	2	3	4
$1{,}01^n$	1,01	1,0201	1,030301	1,04060401

Мы видим, что $1{,}01^n > 1 + 0{,}01n$ при $n = 2, 3, 4$. Доказать это можно по индукции, что будет проделано уже после решения этой задачи.

А можно было поступить иначе. Оценив разность двух соседних членов последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = 1{,}01^{n+1} - 1{,}01^n = 1{,}01^n \cdot 0{,}01 > 0{,}01,$$

получаем, что $x_{n+1} - x_n > 0{,}01$ при всех натуральных n, следовательно,

$$x_n > x_1 + 0{,}01(n-1) = 1 + \tfrac{n}{100},$$

откуда и следует, что данная последовательность ограниченной не является.

в) Подсчеты показывают, что эта последовательность достаточно быстро растет. Действительно,

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n!}{2^n} \geqslant 2x_n \text{ при всех } n \geqslant 3.$$

Поэтому $x_n \geqslant 2^{n-3}x_3 = \frac{3}{32} \cdot 2^n$, значит, эта последовательность не является ограниченной.

Обобщим неравенство, использованное при решении пункта (а) предыдущей задачи. А именно, докажем классическое *неравенство Бернулли*

$$(1+h)^n \geqslant 1 + hn \text{ при всех } h \geqslant -1 \text{ и } n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

При $n = 1$ правая и левая части равны друг другу, при $n = 2$ получаем неравенство $(1+h)^2 \geqslant 1 + 2h$, справедливое при всех h. Умножив обе части неравенства $(1+h)^n \geqslant 1 + hn$ на число $1 + h$, которое по предположению является неотрицательным, получим неравенство

$$(1+h)^{n+1} \geqslant (1+h)(1+nh) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geqslant 1 + (n+1)h.$$

Поскольку неравенство верно при $n = 1$ и $n = 2$, следовательно, оно верно при $n = 3, 4, \ldots$ Неравенство Бернулли доказано.

Задача 111. Выясните, являются ли ограниченными последовательности: а) $x_n = \sqrt[100]{n}$; б) $x_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$; в) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

а) Конечно, эта последовательность не ограничена. Если зафиксировать произвольное натуральное число k, то при $n \geqslant k^{100}$ значения x_n будут не меньше, чем число k.

б) Конечно, эта последовательность не ограничена, поскольку

$$x_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{2n} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}\,,$$

а последовательность $a\sqrt{n}$ не является ограниченной ни при каких $a \neq 0$.

в) Данная последовательность ограничена, что следует хотя бы из того, что она является неотрицательной и убывающей (см. предыдущую тему). Или еще проще:

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2}\,.$$

Задача 112. Выясните, может ли возрастающая последовательность: 1) быть не ограниченной снизу; 2) быть не ограниченной сверху; 3) достигать наибольшего значения; 4) не достигать наименьшего значения.

1) Нет, не может. Так как по условию последовательность x_n — возрастающая, то $x_n > x_1$ при всех $n \geqslant 2$. Значит, эта последовательность ограничена снизу. Более того, значение x_1 является наименьшим значением данной последовательности, что дает отрицательный ответ и на вопрос пункта (4) задачи.

2) Конечно, может. Если, например, $x_n = n$, то не существует такого числа c, которое было бы не меньше каждого из натуральных чисел.

3) Нет, не может. Значение $c = x_k$ не может быть наибольшим, поскольку, по определению возрастающей последовательности, значение ее следующего члена будет больше c.

Задача 113. а) Докажите, что сумма ограниченной последовательности и неограниченной последовательности есть неограниченная последовательность. б) Верно ли предыдущее утверждение для произведения таких последовательностей?

а) Проще всего рассуждать следующим образом. Пусть последовательность x_n ограничена, последовательность y_n — не ограничена. Предположим, что их сумма $z_n = x_n + y_n$ есть ограниченная последовательность. Но тогда в силу задачи 107 и последовательность $y_n = z_n - x_n$ будет ограниченной, что противоречит условию.

б) Конечно, утверждение неверно. Например, можно взять $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = n$. Первая последовательность ограничена, вторая — не ограничена. Тем не менее произведение $z_n = x_n y_n = 1$ есть ограниченная последовательность. Можно привести и более яркий пример, взяв последовательность, все члены которой равны 0.

В заключение вернемся к решению задачи 106. Для доказательства того, что неравенство $9^n + 10^n \leqslant 11^n$ верно для всех натуральных n, начиная с некоторого номера, можно было воспользоваться понятиями монотонности и ограниченности. Перепишем данное неравенство в виде

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n + 1 < \left(\frac{11}{10}\right)^n.$$

В его левой части стоит убывающая последовательность, тогда как в его правой части — возрастающая и неограниченная последовательность. Поэтому найдется такое число k, что это неравенство верно при всех $n \geqslant k$. Конечно, и при таком способе рассуждения без вычислений не обойтись.

Задачи для домашних заданий по теме 15

1. Выясните, являются ли ограниченными последовательности: 1) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$; 2) $x_n = \dfrac{n^3}{2^n}$; 3) $x_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+1}$; 4) $x_n = \sqrt[n]{n}$. Укажите также в каждом случае отрезок наименьшей длины, содержащий все члены рассматриваемой последовательности.

2. Приведите пример последовательности, не ограниченной ни сверху, ни снизу.

3. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$ ограничена.

4. Предположим, что последовательности x_n и y_n являются ограниченными. а) Докажите, что является ограниченной последовательность $x_n y_n$. Предположим, что последовательности x_n и y_n являются неограниченными. Выясните, верно ли, что являются неограниченными последовательности: б) $x_n y_n$; в) $x_n + y_n$.

5. Найдите все значения a, при которых является ограниченной последовательность:
а) $x_n = an + b$; б) $x_n = a^n$; в) $x_n = \dfrac{an}{n+1}$; г) $x_n = \sqrt{n+1} - a\sqrt{n}$.
При найденных значениях параметра укажите также отрезок, в котором лежат все члены соответствующей последовательности.

6. Пусть последовательность задана соотношением $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. Докажите, что она является ограниченной тогда и только тогда, когда $|x_1| \leqslant 1$.

7. Докажите, что: а) $2^n \geqslant n+1$; б) $\sqrt[n]{100} \leqslant 1 + \dfrac{99}{n}$.

8. Докажите, что при всех натуральных n и всех $h \geqslant -1$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{1+h} \leqslant 1 + \dfrac{h}{n}$.

Решения домашних задач по теме 15

1. 1) Так как $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$, то данная последовательность убывает, поэтому ее наибольшим членом является $x_1 = \sqrt{2}-1$. Поскольку $x_n < \dfrac{1}{2n}$, то значение x_n может быть произвольно малым. Следовательно, отрезком наименьшей длины, содержащим все члены этой последовательности, является отрезок $[0; \sqrt{2}-1]$.

2) Составим таблицу значений первых членов данной последовательности.

n	1	2	3	4	5	6
x_n	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{27}{8}$	4	$\frac{125}{32}$	$\frac{27}{8}$

Глядя на нее, можно предположить, что, начиная с четвертого члена, последовательность является убывающей. Действительно, поскольку отношение
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^3}{2n^3} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$
меньше 1 при $n \geqslant 4$, то $x_{n+1} < x_n$ при всех $n \geqslant 4$. Значит, наибольшим членом последовательности является $x_4 = 4$. Так как $x_n > 0$, то последовательность — ограниченная. Интуитивно понятно, что значения могут быть сколь угодно малы, но доказывать это строго, видимо, не стоит. Искомый отрезок — отрезок $[0; 4]$.

3) Ясно, что $x_1 = 1$ и $x_n > 1$ при всех $n \geqslant 2$, поэтому последовательность ограничена снизу. Можно догадаться, какое ее значение является наибольшим, вычислив значения ее первых членов. Так как $x_2 = \dfrac{6}{5} = x_3 > x_4$, то и будем доказывать, что $x_n \leqslant \dfrac{6}{5}$. Преобразуя

неравенство $\dfrac{n^2+n}{n^2+1} \leqslant \dfrac{6}{5}$, придем к неравенству $(n-2)(n-3) \geqslant 0$, которое верно для всех натуральных n. Искомый отрезок — $\left[1; \dfrac{6}{5}\right]$.

4) Так как $x_n \geqslant 1$, то последовательность ограничена снизу. Применяя тот же подход, что и при решении предыдущих пунктов, приходим к предположению, что поскольку $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} > \ldots$, то надо доказать, что $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt{2}$, или $n^2 \leqslant 2^n$ при $n \geqslant 4$, а это было установлено ранее. Таким образом, последовательность — ограниченная, и наименьшим содержащим все ее члены отрезком является отрезок $[1; \sqrt[3]{3}]$.

Конечно, можно доказать, что $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ при $n \geqslant 3$, однако доказательство этого факта лучше отложить до старших классов.

2. Такой является, например, последовательность $x_n = (-1)^n n$.

3. Если $n \geqslant 10$, то $\dfrac{10}{n+1} < 1$, следовательно, $x_{n+1} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} = x_n \cdot \dfrac{10}{n+1} < x_n$. Если $n = 1, 2, \ldots, 8$, то $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{10}{n+1} > x_n$. Поэтому

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_9 = x_{10} > x_{11} > \ldots ,$$

откуда следует, что все значения этой последовательности лежат в отрезке $\left[0; \dfrac{10^9}{9!}\right]$. Таким образом, данная последовательность — ограниченная.

4. а) Утверждение следует из неравенства $|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| \leqslant ab$.

б) Рассмотрим последовательности $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots$ и $1, 0, 2, 0, 3, \ldots$ Обе они не ограничены, тогда как их произведение является нулевой, а потому — ограниченной последовательностью.

в) В этом случае то, что утверждение неверно, доказывается еще проще. Достаточно положить $y_n = -x_n$. Из неограниченности одной из этих последовательностей следует неограниченность другой, тогда как их сумма есть тождественно равная нулю последовательность.

5. а) Конечно, данная последовательность ограничена лишь при $a = 0$, т. е. если она является постоянной.

б) Данная последовательность ограничена тогда и только тогда, когда $|a| \leqslant 1$. При указанных значениях a все члены последовательности лежат в отрезке $[-1; 1]$. Конечно, отрезок, содержащий все члены последовательности, можно взять «поменьше». Если $0 < a < 1$, то все члены последовательности лежат в отрезке $[0; a]$. Если же $-1 < a < 0$, то они лежат в отрезке $[a; a^2]$.

в) Из неравенства

$$|x_n| = \left|\frac{an}{n+1}\right| = |a| \left|\frac{n}{n+1}\right| \leqslant |a|$$

следует, что данная последовательность ограничена при любом значении a и что все ее члены лежат в отрезке $[-a; a]$.

г) В силу задачи 111 последовательность $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ является ограниченной. Таким образом, при $a = 1$ данная последовательность ограничена. Если же $a \neq 1$, то

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + (1-a)\sqrt{n} = y_n + (1-a)\sqrt{n}\,,$$

поэтому последовательность x_n не ограничена как сумма неограниченной последовательности $(1-a)\sqrt{n}$ и ограниченной последовательности y_n.

6. Если $|x_1| \leqslant 1$, то $0 \leqslant x_1^2 \leqslant 1$, значит, $-1 \leqslant 2x_1^2 - 1 \leqslant 1$, таким образом, $|x_2| \leqslant 1$. Рассуждая далее по индукции, получаем, что $|x_n| \leqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $x_1 < -1$ или $x_1 > 1$, то $x_2 > 1$ и, более того, $x_n > 1$ при всех $n \geqslant 2$, поэтому оба этих случая можно рассматривать одновременно. Далее

$$x_{n+1} - 1 = 2x_n^2 - 2 = 2(x_n+1)(x_n-1) > 4(x_n-1) \text{ при всех } n \geqslant 2,$$

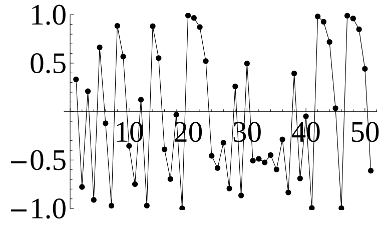
откуда и следует, что в этих случаях последовательность x_n — неограниченная.

Не следует думать, что случай ограниченной последовательности «проще», чем неограниченной. Формула, по которой вычисляется следующий член, очень проста, однако можно ли по ней считать? Предположим, что $x_1 = \dfrac{1}{3}$. Как найти следующие члены? Конечно, $x_2 = -\dfrac{7}{9}$, $x_3 = \dfrac{17}{81}$, далее

$$x_4 = -\frac{5983}{6561}\,, \quad x_5 = \frac{28\,545\,857}{43\,046\,721}\,,$$

а дальше вычислять не хочется. Конечно, можно вычислять приближенно, однако, при $x_1 = \dfrac{1}{3}$ получим, что $x_{10} \approx -0{,}749302$, а при $x_1 = 0{,}33$, — что $x_{10} \approx 0{,}362049$. Между этими значениями нет ничего общего!

На следующем рисунке изображено поведение последовательности x_n с начальным данным $x_1 = \underbrace{0{,}33\ldots3}_{20\text{ цифр}}$.



Это — «хаос».

7. а) В силу неравенства Бернулли $2^n = (1+1)^n \geqslant 1+n$. б) В силу неравенства Бернулли $\left(1+\dfrac{99}{n}\right)^n \geqslant 1+99=100$.

8. Так как $h \geqslant -1$, то $1+\dfrac{h}{n} \geqslant 0$. После возведения в степень n обеих частей мы получим неравенство Бернулли.

Самостоятельная работа 10 (тема 15)

Вариант 1

1. Докажите, что последовательность $x_n = n - \dfrac{10}{n}$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.
2. Выясните, какие из следующих последовательностей являются ограниченными: а) $x_n = (0{,}2)^{15}\, n$; б) $x_n = \sqrt[15]{2n}$; в) $x_n = \sqrt[2n]{15}$.
3. Выясните, верно ли, что для всякой неограниченной последовательности x_n последовательности $y_n = nx_n$ и $z_n = \dfrac{x_n}{n}$ также являются неограниченными.
4. Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий все члены последовательности $x_n = \dfrac{n-2}{2n+1}$.

Вариант 2

1. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{20}{n} - n$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.
2. Выясните, какие из следующих последовательностей являются ограниченными: а) $x_n = \sqrt[n]{13}$; б) $x_n = \sqrt[13]{2n}$; в) $x_n = (0{,}3)^{13}\, n$.
3. Выясните, верно ли, что для всякой ограниченной последовательности x_n последовательности $y_n = nx_n$ и $z_n = \dfrac{x_n}{n}$ также являются ограниченными.
4. Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий все члены последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$.

Вариант 3

1. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{n^2}{2n-3}$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2. Пусть x_n — неограниченная последовательность, каждый член которой отличен от нуля. Выясните, верно ли, что для любой ограниченной последовательности y_n последовательность $z_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ также является ограниченной.

3. Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий все члены последовательности $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$.

4. Докажите, что последовательность, заданная соотношением $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{2}$, ограничена при любом значении ее первого члена.

Вариант 4

1. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{2n^2}{2n-5}$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2. Предположим, что последовательность x_n является возрастающей, ограниченной сверху и ни один ее член не равен нулю. Выясните, верно ли, что последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ является ограниченной снизу.

3. Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий все члены последовательности $x_n = \dfrac{2\sqrt{n}}{n+3}$.

4. Докажите, что последовательность, заданная соотношением $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{2}$, ограничена при любом значении ее первого члена.

Дополнительные упражнения по теме 15

10.1. Пусть последовательность x_n ограничена сверху. Выясните, является ли ограниченной снизу последовательность: а) $y_n = -x_n$; б) $y_n = -|x_n|$; в) $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ (конечно, при дополнительном предположении, что $x_n \neq 0$).

10.2. Предположим, что последовательность x_n не является ограниченной. Выясните, будет ли неограниченной также и последовательность: а) $y_n = \dfrac{x_n}{1000}$; б) $y_n = \sqrt[2015]{x_n}$; в) $y_n = \dfrac{x_n}{2^n}$.

10.3. Докажите, что следующие последовательности являются ограниченными:

1) $x_n = \dfrac{1}{n^2+2}$; 2) $x_n = \dfrac{n}{n^2+2}$; 3) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+2}$; 4) $x_n = (2-\sqrt{3})^n$; 5) $x_n = \dfrac{2^n}{3^n - 2^n}$; 6) $x_n = \dfrac{n^3}{3^n}$.

10.4. Докажите, что следующие последовательности не являются ограниченными:
1) $x_n = \dfrac{n^3}{n^2+2}$; 2) $x_n = \sqrt[3]{n^2+1}$; 3) $x_n = (\sqrt{6}-\sqrt{2}\,)^n$; 4) $x_n = \dfrac{2^n}{n}$.

10.5. Выясните, верно ли, что: а) если последовательность убывает, то она ограничена сверху; б) если последовательность возрастает, то она не ограничена сверху; в) если последовательность не ограничена, то она непериодична.

Тема 16. Суммирование последовательностей

Задача 114. Найдите формулу для суммы n первых: а) нечетных чисел; б) четных чисел; в) натуральных чисел.

а) Глядя на таблицу

$$\begin{aligned}
&1+3=4=2^2,\\
&1+3+5=4+5=9=3^2,\\
&1+3+5+7=9+7=16=4^2
\end{aligned}$$

можно предположить, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2. Докажем это утверждение посредством индукционного метода. Действительно, если $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$, то

$$1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Поскольку мы убедились, что формула верна при $n=1,2,3,4$, то она, значит, верна при $n=5$, а потому верна и при $n=6$, и так далее. Значит, она верна и для суммы любого числа последовательных нечетных чисел.

б) Если к каждому из первых n нечетных чисел прибавить единицу, то мы получим n первых четных чисел, следовательно,

$$2+4+\ldots+2n=1+3+\ldots+(2n-1)+n=n^2+n$$

в силу формулы предыдущего пункта.

в) Поскольку сумма n первых четных чисел вдвое больше суммы первых n натуральных чисел, то

$$2(1+2+\ldots+n)=2+4+\ldots+2n=n^2+n=n(n+1),$$

поэтому

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Приведем еще один способ решения пункта (а) этой задачи. Его отправной точкой является равенство $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$. Поэтому

$$\begin{gathered} 1^2 - 0^2 = 1, \\ 2^2 - 1^2 = 3, \\ 3^2 - 2^2 = 5, \\ \ldots \\ n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1. \end{gathered}$$

Сложив эти равенства, мы и получим, что

$$n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n-1).$$

Это рассуждение важно тем, что его нетрудно *обобщить*.

Задача 115. Найдите формулу для суммы n первых чисел Фибоначчи.

Положим $S_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ и посчитаем первые из этих сумм, составив следующую таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34
S_n	1	2	4	7	12	20	33	54	88

Рассматривая числа этой таблицы, легко высказать предположение, что

$$S_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{2}$$

В таком случае

$$S_{n+1} = S_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1.$$

Таким образом, рассуждая по индукции, получаем, что формула (2) верна при всех натуральных n.

Задача 116. Вычислите сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{4096}$.

Нам представляется важным обсудить с учащимися несколько подходов к решению этой задачи. Первый из них аналогичен использованному в решении предыдущей задачи: надо посчитать и догадаться.

Действительно, вычисляя первые суммы, мы получим последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \text{ и так далее.}$$

Таким образом, возникает предположение, что

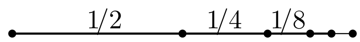
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}\,.$$

Доказать его по индукции ничего не стоит. Следующая по порядку сумма равна

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{2-1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

В частности, искомая сумма равна $1-\dfrac{1}{4096}=\dfrac{4095}{4096}\,.$

Приведем также геометрическую интерпретацию данной задачи. Рассмотрим отрезок длины 1 (рисунок). Длина его левой половины равна $\dfrac{1}{2}$. Добавив к ней левую половину правой половины исходного отрезка, получим отрезок длины $\dfrac{3}{4}$.



Длина оставшейся части исходного отрезка равна $\dfrac{1}{4}$. На следующем шаге мы добавляем половину этой оставшейся части, и остается также ее половина длины $\dfrac{1}{8}$. Таким образом, когда на последнем шаге добавляется отрезок длины $\dfrac{1}{4096}$, то он является половиной отрезка длины $\dfrac{1}{2048}$, и оставшийся отрезок (дополняющий до единичного отрезка) также имеет длину $\dfrac{1}{4096}$. Из этого и следует, что искомая сумма равна $1-\dfrac{1}{4096}=\dfrac{4095}{4096}\,.$

Можно действовать алгебраически и доказать существенно более общее утверждение, однако сделать это будет естественнее после решения следующей задачи.

Задача 117. а) Найдите последовательность, обладающую тем свойством, что для любого числа n сумма n первых членов этой последовательности равна 3^n-1. б) Выясните, существует ли последовательность, сумма первых n членов которой равна 5^n.

а) Решение очевидно, поскольку, если x_n — это n-й член этой последовательности, где $n\geqslant 2$, то $x_n=3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\cdot 3^{n-1}$. Осталось заметить, что при $n=1$, действительно, $x_1=2=3-1$.

б) Может показаться, что такой последовательности нет. С одной стороны, $x_n=5^n-5^{n-1}=4\cdot 5^{n-1}$. С другой стороны, $x_1=5$, что не согласуется с полученной формулой.

Однако никакого противоречия в проведенном рассуждении нет. Давайте рассуждать аккуратнее. Итак, пусть x_n — члены искомой последовательности, $s_n = x_1+x_2+\ldots+x_n$. По условию $s_n = 5^n$. Равенство $x_n = s_n - s_{n-1}$ имеет место при всех $n \geqslant 2$. Поэтому $x_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Но $x_1 = s_1 = 5$. И ничего нет странного в том, что значение x_1 не определяется общей формулой (функции могут быть и кусочно заданными).

Теперь проведем рассуждение *в общем виде.* Найдем последовательность x_n, суммы n первых членов которой задаются формулой $s_n = a^n$. Тогда при всех $n \geqslant 2$ верна формула $x_n = a^n - a^{n-1} = a \cdot a^{n-1} - a^{n-1} = (a-1)a^{n-1}$, тогда как $x_1 = a$. Следовательно,

$$a + (a-1)a + (a-1)a^2 + \ldots + (a-1)a^{n-1} = a^n,$$
$$(a-1) + (a-1)a + (a-1)a^2 + \ldots + (a-1)a^{n-1} = a^n - 1,$$

откуда и следует, что

$$(a-1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) = a^n - 1. \qquad (3)$$

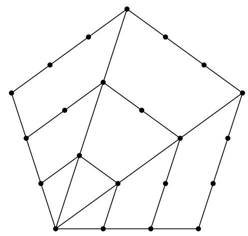
Формула (3) является обобщением хорошо известных «формул сокращенного умножения»

$$(a-1)(a+1) = a^2 - 1 \quad \text{и} \quad (a-1)(a^2+a+1) = a^3 - 1.$$

В будущем нам будет полезна другая форма этого равенства, справедливая при дополнительном условии $a \neq 1$:

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}\,. \qquad (4)$$

Следующее понятие восходит еще к *пифагорейцам. Пятиугольным числом* называется количество точек, расположенных на сторонах всех изображенных на следующем рисунке пятиугольников.



По определению первое пятиугольное число равно 1. Второе пятиугольное число равно 5, третье — 12.

Задача 118. Найдите формулу для n-го пятиугольного числа.

Для краткости обозначим n-е пятиугольное число через p_n. Разность $p_n - p_{n-1}$ есть число точек, расположенных на трех сторонах пятиугольника. На каждой из его сторон лежат по n точек. Поскольку две из них лежат одновременно на двух сторонах, то всего на трех сторонах лежит $3n-2$ точек. Таким образом,

$$p_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2).$$

Теперь поступим так же, как и при выводе формулы для суммы первых n четных чисел. Добавив по 2 к каждому из чисел в сумме, получим, что

$$p_n + 2n = 3 + 6 + \ldots + 3n = 3(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{3n(n+1)}{2},$$

следовательно,

$$p_n = \frac{3n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n^2 + 3n - 4n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Задачи для домашних заданий по теме 16

1. Найдите формулу для суммы n первых натуральных чисел, имеющих остаток 2 при делении на 3.

2. Найдите формулу для суммы:
а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$;
в) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$.

3. Найдите формулу для произведения $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

4. а) Найдите формулу для суммы

$$s_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

б) Докажите, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

является неограниченной.

5. а) Найдите формулу общего члена последовательности, суммы n первых членов которой определяются формулой $S_n = n^3$. б) Выведите формулу для суммы квадратов n первых натуральных чисел.

6. Как обычно, обозначим через S_n сумму первых n членов некоторой последовательности. Предположим, что при любых n и k справедливо равенство $S_{nk} = S_n S_k$. а) Приведите несколько примеров таких последовательностей. б) Докажите, что если эта последовательность не состоит из одних нулей, то ее первый член равен 1.

7. Докажите, что для любого натурального числа n и любого натурального числа $k \geqslant 2$ число n^k может быть представлено как сумма n последовательных нечетных чисел.

8. Найдите формулу для суммы квадратов n первых чисел Фибоначчи.

Решения домашних задач по теме 16

1. Число x_n, имеющее остаток 2 при делении на 3, может быть записано формулой $x_n = 3n-1$. Надо найти сумму $2+5+\ldots+(3n-1)$. Тогда

$$2 + 5 + \ldots + (3n-1) = (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) + \ldots + (3n-1) =$$
$$= 3(1 + 2 + \ldots + n) - n = \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2 + 3n - 2n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}\,.$$

2. Ответы: а) $1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$; б) $(n+1)! - 1$; в) $1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$. Подходы к решению все те же: 1) «посчитать, догадаться, доказать» или 2) «правильно преобразовать». А правильные преобразования выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,; \quad k \cdot k! = (k+1)! - k!\,; \quad \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\,.$$

3. Так как $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, то данное произведение можно записать в виде дроби

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}{n! \cdot n!} = \frac{n+1}{2n}\,.$$

4. а) Так как $\dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, то данная сумма равна

$$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1.$$

б) Ясно, что $x_n > n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, откуда и следует неограниченность данной последовательности.

5. а) Так как $S_n = x_1+x_2+\ldots+x_n = S_{n-1}+x_n$, то $x_n = S_n-S_{n-1} = n^3-(n-1)^3 = 3n^2-3n+1$. При этом $x_1 = 1$, что согласуется с формулой $S_1 = 1$.

б) Положим $Q_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ и воспользуемся ранее доказанным равенством $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} n^3 = S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \\ = 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) - 3(1+2+\ldots+n) + (1+1+\ldots+1) = \\ = 3Q_n - \frac{3n(n+1)}{2} + n = 3Q_n - \frac{3n^2+n}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$3Q_n = n^3 + \frac{n(3n+1)}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

откуда и следует формула

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{5}$$

6. а) Если $S_n = n$, то соотношение выполняется. Имеем $x_n = S_n - S_{n-1} = n-(n-1) = 1$. Соотношение также выполнено, если $S_n = n^2$. Как мы знаем, в этом случае $x_n = 2n-1$. Возможно, что $S_n = n^3$. Как следует из решения предыдущей задачи, тогда последовательность x_n задается формулой $x_n = 3n^2-3n+1$.

б) Положив $k = 1$, получим, что для любого натурального n верно равенство $S_n = S_nS_1$. Поскольку по условию хотя бы для одного n число S_n отлично от нуля, то $S_1 = x_1 = 1$.

7. Рассмотрим сумму последовательных нечетных чисел, начиная с $(m+1)$-го и заканчивая $(m+n)$-м нечетным числом. Эта сумма равна $(m+n)^2-m^2 = n^2+2mn$. Таким образом, если взять $m = \dfrac{n^{k-1}-n}{2}$, то сумма этих чисел будет равна n^k,

$$(n^{k-1}-n+1)+(n^{k-1}-n+3)+\ldots+(n^{k-1}+n-1) = n^k.$$

8. Положим $Q_n = F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2$ и посчитаем первые из этих сумм, составив следующую таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7
F_n	1	1	2	3	5	8	13
Q_n	1	2	6	15	40	104	273

Так как $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $40 = 5 \cdot 8$, $104 = 8 \cdot 13$, то возникает предположение, что $Q_n = F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$. Далее рассуждаем по индукции. Поскольку

$$Q_{n+1} = Q_n + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2},$$

то формула верна при всех натуральных n.

Самостоятельная работа 11 (тема 16)

Вариант 1

1. Вычислите сумму $7 + 14 + 21 + \ldots + 1001$.
2. Найдите формулу для суммы $n + (n+1) + \ldots + (2n-1)$.
3. Найдите последовательность, сумма n первых членов которой при любом натуральном n равна $n(2n+1)$.
4. Вычислите сумму $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{28 \cdot 31}$.
5. Вычислите сумму $2^{10} + 2^9 \cdot 3 + 2^8 \cdot 3^2 + \ldots + 3^{10}$.

Вариант 2

1. Вычислите сумму $9 + 18 + 27 + \ldots + 1008$.
2. Найдите формулу для суммы $(n+1) + (n+2) + \ldots + 2n$.
3. Найдите последовательность, сумма n первых членов которой при любом натуральном n равна $n(2n-1)$.
4. Вычислите сумму $\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 8} + \ldots + \dfrac{1}{29 \cdot 32}$.
5. Вычислите сумму $3^9 + 3^8 \cdot 4 + 3^7 \cdot 4^2 + \ldots + 4^9$.

Вариант 3

1. Найдите все натуральные n, при которых сумма n первых натуральных чисел, имеющих остаток 2 при делении на 5, делится на 6.
2. Найдите формулу для суммы n первых чисел Фибоначчи с нечетными номерами.
3. Докажите неравенство $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} \leqslant \dfrac{1}{3}$.
4. Найдите формулу для суммы $1 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot 3^{n-1}$.

Вариант 4

1. Найдите все натуральные n, при которых сумма n первых натуральных чисел, имеющих остаток 3 при делении на 7, делится на 6.

2. Найдите формулу для суммы n первых чисел Фибоначчи с четными номерами.

3. Докажите неравенство $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\leqslant\frac{1}{6}$.

4. Найдите формулу для суммы $5+2\cdot 5^2+\ldots+n\cdot 5^n$.

Дополнительные упражнения по теме 16

11.1. Найдите формулу для сумм:
а) $1+2+\ldots+2n$; б) $n+2n+\ldots+n^2$; в) $3^{10}+3^{11}+\ldots+3^{20}$.

11.2. Вычислите суммы: а) $10+20+\ldots+1000$; б) $11+21+\ldots+1001$.

11.3. Найдите сумму всех: а) двузначных чисел; б) трехзначных чисел.

11.4. Найдите формулу для суммы первых n членов последовательности: а) $x_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$; б) $x_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$.

11.5. Найдите последовательность, сумма первых n членов которой для любого натурального числа n равна: 1) 30; 2) n; 3) $2n^2$; 4) n^3-n; 5) $n+30$; 6) $n^2(n+1)^2$.

11.6. Найдите сумму n первых чисел, которые: а) имеют остаток 1 при делении на 3; б) имеют остаток 2 при делении на 4.

Тема 17. Прогрессии: арифметическая и геометрическая

Последовательность a_n называется *арифметической прогрессией с разностью* d, если при всех натуральных n справедливо равенство $a_{n+1}=a_n+d$. Другими словами, разность двух ее последовательных членов постоянна и равна d, $a_{n+1}-a_n=d$.

Последовательность натуральных чисел является арифметической прогрессией с разностью 1, последовательности нечетных чисел и четных чисел являются арифметическими прогрессиями с разностью 2. Ясно, что последовательность квадратов последовательных натуральных чисел не является арифметической прогрессией. Действительно, разность $(n+1)^2-n^2=2n+1$ зависит от n, поэтому последовательность $x_n=n^2$ не есть арифметическая прогрессия. Заметим на будущее, что сами эти разности образуют арифметическую прогрессию.

Из определения арифметической прогрессии нетрудно получить формулу ее общего члена, так как

$$a_n = a_{n-1}+d = (a_{n-2}+d)+d = a_{n-2}+2d = a_{n-3}+3d = \ldots = a_1+(n-1)d.$$

Таким образом, доказана *формула общего члена арифметической прогрессии*:

$$a_n = a_1 + d(n-1). \tag{6}$$

Другое дело, что часто без этой формулы можно обойтись.

Задача 119. Пусть x_n — арифметическая прогрессия, $a_1 = 1$ и $a_{10} = 2$. Найдите: 1) a_{19}; 2) $a_2 + a_9$; 3) $a_3 + a_8$; 4) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$.

Конечно, из общей формулы следует, что $2 = a_{10} = 1 + 9d$, откуда $d = \dfrac{1}{9}$, значит, мы сможем найти произвольный член данной прогрессии. Однако проще действовать иначе.

1) Так как $19 - 10 = 10 - 1$, то $a_{19} - a_{10} = a_{10} - a_1$, откуда $a_{19} = 3$. 2) Так как $a_2 = a_1 + d$ и $a_9 = a_{10} - d$, то $a_2 + a_9 = 3$. 3) Аналогично, $a_3 + a_8 = a_1 + a_{10} = 3$. 4) Искомая сумма равна $5 \cdot (a_1 + a_{10}) = 15$.

Задача 120. Известно, что последовательности a_n и b_n являются арифметическими прогрессиями. Выясните, обязаны ли быть арифметическими прогрессиями последовательности: а) $a_n + b_n$; б) $a_n - 2b_n$; в) $a_n \cdot b_n$.

Обозначим через d_1 разность прогрессии a_n, через d_2 разность прогрессии b_n. а) Так как $a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n = d_1 + d_2$, то последовательность $a_n + b_n$ является арифметической прогрессией.

б) Аналогичное вычисление показывает, что последовательность $a_n - 2b_n$ является арифметической прогрессией, разность которой равна $d_1 - 2d_2$.

в) Уже пример с последовательностью $x_n = n^2$ показывает, что произведение арифметических прогрессий может не быть арифметической прогрессией. Более того, нетрудно показать, что произведение двух арифметических прогрессий есть арифметическая прогрессия только в том случае, когда хотя бы одна из данных арифметических прогрессий является постоянной последовательностью.

Задача 121. Предположим, что последовательность a_n является арифметической прогрессией. Докажите, что для любого натурального числа n справедливы равенства:

а) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$; б) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

а) Так как $a_2 = a_1 + d$ и $a_{n-1} = a_n - d$, то $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$. Далее рассуждаем аналогичным образом: $a_3 + a_{n-2} = a_2 + d + a_{n-1} - d = a_2 + a_{n-1}$, и т. д.

б) Положим $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. В следующих двух равенствах попарные суммы слагаемых, одно из которых стоит над другим, как мы только что доказали, равны друг другу.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s,$$
$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 = s.$$

Поэтому, сложив их, мы получим, что $n(a_1 + a_n) = 2s$, откуда и следует требуемое равенство.

Задача 122. Известно, что первый член арифметической прогрессии равен -85, а ее девятнадцатый член является ее первым положительным членом. Найдите все возможные значения разности этой прогрессии.

Пусть a_n — значение n-го члена арифметической прогрессии. По условию $a_1 = -85$, $a_{18} \leqslant 0$ и $a_{19} > 0$. Обозначим через d разность этой прогрессии. Так как $a_{18} = -85 + 17d$ и $a_{19} = -85 + 18d$, то $17d \leqslant 85$, а $18d > 85$, откуда получаем, что $d \in \left(\frac{85}{18}\,; 5\right]$.

Задача 123. Докажите, что последовательность a_n является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда: а) $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 2$; б) точки плоскости с координатами $(n; a_n)$ лежат на некоторой прямой.

а) Утверждение очевидно, поскольку данное равенство можно переписать в виде $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, а это означает, что разности любых двух последовательных членов последовательности равны друг другу.

б) Если a_n — арифметическая прогрессия, то $a_n = a_1 + d(n-1) = dn + a_1 - d$. Положив $b = a_1 - d$, получим, что точки (n, a_n) лежат на прямой $y = dx + b$.

Обратно, если точки (n, a_n) лежат на прямой $y = kx + b$, то $a_n = kn + b = k(n-1) + b + k$, таким образом, последовательность a_n является арифметической прогрессией с разностью k и первым членом $a_1 = b + k$.

Равенство $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ называется *характеристическим свойством* арифметической прогрессии.

Задача 124. Найдите наибольшее значение разности арифметической прогрессии, членами которой являются числа: а) $2, 14, 29$; б) $\frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; в) $1, \sqrt{2}, \sqrt{19}$.

Воспользуемся тем свойством, что разность между любыми членами арифметической прогрессии кратна разности этой прогрессии.

а) В первом случае $14 - 2 = 12 = kd$ и $29 - 14 = 15 = nd$. Таким образом, $kd = 12$ и $nd = 15$, где числа k и n являются натуральными. При этом нельзя утверждать, что они обязаны быть делителями 12 и 15, так как ниоткуда не следует, что число d должно быть натуральным. Однако чем больше d, тем меньше k и n, и наоборот. Так как $\frac{k}{n} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ и дробь $\frac{4}{5}$ несократима, то наименьшими возможными значениями являются $k = 4$ и $n = 5$. Поэтому наибольшей разностью прогрессии является число $d = 3$.

б) Имеем $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21} = kd$ и $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = nd$, откуда $\frac{k}{n} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$. Поэтому наименьшим значением числа k является $k = 8$, следовательно, наибольшей разностью прогрессии является $d = \frac{1}{42}$.

в) Если $\sqrt{2} - 1 = kd$ и $\sqrt{19} - 1 = nd$, то $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{19} - 1} = \frac{k}{n}$, откуда следует, что $k\sqrt{19} - n\sqrt{2} = k - n$, чего быть не может. Действительно, возведя это равенство в квадрат, мы получим, что

$$19k + 2n - 2kn\sqrt{38} = (k - n)^2, \text{ или } 2kn\sqrt{38} = 19k + 2n - (k - n)^2.$$

Поскольку числа k и n — натуральные, то в левой части полученного равенства стоит иррациональное число, тогда как число в его правой части рационально. Таким образом, не существует арифметической прогрессии, содержащей данные числа.

Последовательность b_n называется *геометрической прогрессией*, если каждый ее последующий член равен ее предыдущему члену, умноженному на некоторое число, называемое *знаменателем* этой прогрессии, т. е. если $b_{n+1} = qb_n$, где $q \neq 0$, при всех $n \in \mathbb{N}$. Конечно, такому определению удовлетворяет последовательность, состоящая из одних нулей, которую мы не будем называть геометрической прогрессией. Поэтому в определение геометрической прогрессии надо еще добавить требование, что каждый ее член отличен от нуля.

Прямо из определения следует общая формула для n-го члена геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{7}$$

Задача 125. Докажите, что последовательность b_n является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $b_n b_{n+2} = b_{n+1}^2$ и $b_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, так как $b_n \neq 0$, то равенство $b_n b_{n+2} = b_{n+1}^2$ можно переписать в виде $\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Таким образом,

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \ldots$$

Обозначив это отношение через q, мы и получим, что $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$ для любого натурального числа n, т. е. $b_{n+1} = qb_n$, а это означает, что данная последовательность является геометрической прогрессией.

Равенство $b_n^2 = b_{n+1}b_{n-1}$ называется *характеристическим свойством* геометрической прогрессии.

Задача 126. Докажите, что если b_n — (непостоянная) геометрическая прогрессия, то и последовательность $c_n = b_n - b_{n-1}$ является геометрической прогрессией.

Действительно, так как

$$c_n = b_n - b_{n-1} = qb_{n-1} - qb_{n-2} = qc_{n-1}\,,$$

то c_n — геометрическая прогрессия, знаменатель которой совпадает со знаменателем данной прогрессии.

Задача 127. Пусть a_n и b_n — геометрические прогрессии. Выясните, обязательно ли являются геометрическими прогрессиями последовательности: а) $a_n + b_n$; б) $a_n \cdot b_n$.

Пусть q_1 — знаменатель первой из данных прогрессий, q_2 — знаменатель второй из них. С формальной точки зрения, проще ответить на вопрос пункта (б). Так как $\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_n b_n} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q_1 q_2$, то произведение данных геометрических прогрессий есть геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен произведению знаменателей этих прогрессий.

С суммой сложнее. Например, пусть $a_n = 2^n$ и $b_n = 3^n$. «Ясно», что отношение $\dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ зависит от n. Действительно, при $n = 1$ оно равно $\dfrac{13}{5}$, а при $n = 2$ — равно $\dfrac{35}{13}$. С другой стороны, если $q_1 = q_2$, то

$$\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = \frac{qa_n + qb_n}{a_n + b_n} = q,$$

поэтому в этом случае сумма является геометрической прогрессией.

Возможно, что вычисление «в общем виде» будет слишком сложным для учащихся, так что можно ограничиться представленными примерами. Для полноты приведем результат этого вычисления. Дело в том, что равенство

$$\frac{a_1q_1+b_1q_2}{a_1+b_1}=\frac{a_1q_1^2+b_1q_2^2}{a_1q_1+b_1q_2}$$

преобразуется к виду $2q_1q_2=q_1^2+q_2^2$, или $(q_1-q_2)^2=0$. Таким образом, сумма геометрических прогрессий есть геометрическая прогрессия тогда и только тогда, когда совпадают знаменатели исходных прогрессий и $a_1+b_1\neq 0$.

Задача 128. Произведение третьего и шестого членов геометрической прогрессии равно 2. Найдите произведение первых восьми членов этой прогрессии.

Так как $b_2=\dfrac{b_3}{q}$, а $b_7=b_6q$, то $b_2b_7=\dfrac{b_3}{q}\cdot b_6q=b_3b_6$. Аналогично, $b_1b_8=b_2b_7=b_3b_6=b_4b_5=2$, следовательно, произведение всех этих членов равно $2^4=16$.

Подводя итог решения этой задачи, стоит отметить, что если b_n есть геометрическая прогрессия, то для любых натуральных чисел k и $n\geqslant 2$ справедливо равенство $b_kb_n=b_{k+1}b_{n-1}$.

Задача 129. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма второго и четвертого равна 60. Найдите первый член этой прогрессии.

По условию $b_1+b_1q^2=20$, а $b_1q+b_1q^3=60$. Поделив второе уравнение на первое, получим, что $q=3$. Подставив $q=3$, например, в первое уравнение, получим, что $b_1=2$.

Задача 130. Вычислите суммы:
а) $1+2+4+\ldots+2^{n-1}$; б) $1+3+9+\ldots+3^{n-1}$.

а) Так как $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, то нетрудно догадаться, что $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$. А далее рассуждаем по индукции: если при некотором n эта формула верна, то, увеличив это число на 1, получим, что

$$1+2+4+\ldots+2^n=1+2+4+\ldots+2^{n-1}+2^n=2^n-1+2^n=2^{n+1}-1,$$

таким образом, она верна и для числа $n+1$. Следовательно, данная формула верна при всех натуральных n.

б) В этом случае догадаться до явной формулы сложнее. Действительно, из равенств $1+3=4$, $1+3+9=13$, $1+3+9+27=40$ как-то не видна общая формула, частными случаями которой являются найденные равенства. Но можно воспользоваться формулой (4) (см. с. 210), из которой получим, что

$$1+3+\ldots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2}\,.$$

Из этой же формулы следует и формула для суммы первых членов геометрической прогрессии. Если числа $b_1, b_2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q \neq 1$, то

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=\frac{b_1-b_nq}{1-q}=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\,. \tag{8}$$

Действительно, поскольку $b_k=b_1q^{k-1}$, то

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=b_1+b_1q+\ldots+b_1q^{n-1}=b_1(1+q+\ldots+q^{n-1})=$$
$$=b_1\,\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{b_1-b_1q^{n-1}\cdot q}{1-q}=\frac{b_1-b_nq}{1-q}\,.$$

Задача 131. Найдите сумму: а) первых 10 членов геометрической прогрессии, если $b_1=3$ и $b_5-b_3=36$; б) квадратов первых 10 членов геометрической прогрессии, если $b_1=3$ и $q=\sqrt{2}$.

а) Так как $b_1=3$, а $b_5-b_3=b_1(q^4-q^2)=3(q^4-q^2)=36$, то $q^4-q^2-12=0$, поэтому $q^2=4$ и $q=\pm 2$. Если $q=2$, то $S_{10}=$ $=\dfrac{b_1(q^{10}-1)}{q-1}=3\cdot 1023=3069$. Если же $q=-2$, то $S_{10}=-1023$.

б) Так как $b_n=b_1q^{n-1}$, то $b_n^2=b_1^2q^{2n-2}=b_1^2\big(q^2\big)^{n-1}$. Следовательно, квадраты членов геометрической прогрессии сами образуют геометрическую прогрессию. В данном случае получаем прогрессию с первым членом 9 и знаменателем 2. Значит, $S_{10}=9\cdot 1023=9207$.

Задачи для домашних заданий по теме 17

1. Пусть последовательности a_n и b_n связаны друг с другом посредством соотношения $b_n=c^{a_n}$, где c — это некоторое положительное число. Докажите, что последовательность a_n является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда последовательность b_n является геометрической прогрессией.

2. Найдите сумму первых 13 членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма ее четвертого, седьмого и десятого членов равна шести.

3. Первый и десятый члены возрастающей арифметической прогрессии являются натуральными числами. Выясните, верно ли, что: а) сотый член; б) девяностый член этой прогрессии также являются натуральными числами.

4. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 1000, а ее первый член равен 1. Найдите разность этой прогрессии.

5. Найдите наибольшее значение произведения второго и седьмого членов арифметической прогрессии, четвертый член которой равен 1.

6. Как обычно, будем обозначать через S_n сумму n первых членов арифметической прогрессии. Известно, что первый член арифметической прогрессии равен 78, а второй ее член равен 70. Найдите наибольшее возможное значение суммы S_n.

7. Выясните, является ли арифметической прогрессией последовательность, сумма S_n первых n членов которой равна: а) $2n^2 + 3n$; б) $2n^2 + 3n + 1$.

8. Пусть b_n — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 1$ и $b_{10} = 2$. Найдите: 1) b_{19}; 2) b_4; 3) $b_3 b_8$; 4) $b_1 b_2 \dots b_{10}$.

9. Выясните, могут ли числа 2, 3 и 17 быть членами (не обязательно последовательными) некоторой геометрической прогрессии.

10. Докажите, что если числа a^2, b^2 и c^2 образуют арифметическую прогрессию, то и числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

11. Вычислите сумму $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Решения домашних задач по теме 17

1. Так как $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{c^{a_{n+1}}}{c^{a_n}} = c^{a_{n+1}-a_n}$, то постоянство отношения $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ равносильно постоянству разности $a_{n+1} - a_n$.

2. Так как

$$a_1 + a_{13} = a_2 + a_{12} = a_3 + a_{11} = a_4 + a_{10} = a_5 + a_9 = a_6 + a_8 = 2a_7,$$

то из равенства $6 = a_4 + a_7 + a_{10} = 3a_7$ следует, что $a_7 = 2$, поэтому $a_1 + a_{13} = 4$, значит, $S_{13} = \dfrac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = 26$.

3. Пусть d — это разность прогрессии a_n. Так как $a_{10} = a_1 + 9d$ и по условию числа a_1 и a_{10} — натуральные (причем второе — больше первого), то является натуральным и число $c = 9d$. Поскольку $a_{100} = a_1 + 99d = a_1 + 11c$, то ответ на вопрос (а) — положительный: член a_{100} также является натуральным числом. С другой стороны, так как $a_{90} = a_1 + 89d$, то этот член не обязан быть натуральным числом. Например, так будет в случае прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и разностью d, равной $\frac{1}{9}$. Поэтому ответ на вопрос (б) — отрицательный.

4. По условию $\frac{1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 1000$, значит, $a_{10} = 199$. Из равенства $199 = 1 + 9d$ получаем, что $d = 22$.

5. Пусть d — разность арифметической прогрессии a_n. Так как $a_2 = a_4 - 2d = 1 - 2d$ и $a_7 = a_4 + 3d = 1 + 3d$, то $a_2 a_7 = (1 - 2d)(1 + 3d) = 1 + d - 6d^2$. Осталось заметить, что наибольшее значение полученного квадратного трехчлена равно $\frac{25}{24}$ — его значение при $d = \frac{1}{12}$.

6. Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то неравенство $S_n > S_{n-1}$ справедливо тогда и только тогда, когда $a_n > 0$. Поскольку $a_1 = 78$ и $a_2 = 70$, то $d = -8$, следовательно, $a_n = 78 - 8(n - 1) = 86 - 8n > 0$, если $8n < 86$, что имеет место при $n \leqslant 10$. Поэтому наибольшей из сумм S_n является число S_{10}. Так как $a_{10} = 86 - 80 = 6$, то $S_{10} = \frac{78 + 6}{2} \cdot 10 = 420$.

7. а) Если $n \geqslant 2$, то

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 3n - 2(n - 1)^2 - 3(n - 1) = 4n + 1.$$

Так как $a_1 = S_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$, то a_n — арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 5$ и разностью $d = 4$.

б) В этом случае, как и в предыдущем, $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n + 1$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, последовательность $a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией с разностью $d = 4$. Однако $a_1 = 6$, а $a_2 = 9$, так что $a_2 - a_1 = 3 \neq d = 4$. Таким образом, данная последовательность не является арифметической прогрессией.

8. Так как $b_{10} = b_1 q^9$, то $q^9 = 2$. 1) Имеем: $b_{19} = b_1 q^{18} = \left(q^9\right)^2 = 4$. 2) Аналогично, $b_4 = b_1 q^3 = \sqrt[3]{2}$.

3) Имеем: $b_3 b_8 = b_2 b_9 = b_1 b_{10} = 2$. 4) Продолжая рассуждать аналогичным образом, получим, что

$$b_1 b_2 \ldots b_{10} = b_1 b_{10} \cdot b_2 b_9 \cdot b_3 b_8 \cdot b_4 b_7 \cdot b_5 b_6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

9. Предположим, что такая прогрессия существует. Тогда существует число q и такие натуральные числа k и n, что $3 = 2 \cdot q^k$ и

$17 = 2 \cdot q^n$. Из первого равенства следует, что $q > 1$. Так как $q^k = \frac{3}{2}$ и $q^n = \frac{17}{2}$, то $n > k$. Возведя обе части равенства для q^k в степень n, получим, что $q^{nk} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, аналогично, $q^{nk} = \left(\frac{17}{2}\right)^k$, следовательно, $\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{17}{2}\right)^k$, значит, $3^n = 17^k \cdot 2^{n-k}$. Полученное равенство невозможно, так как в его левой части стоит нечетное число, тогда как число в его правой части является четным.

10. Итак, надо доказать, что

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}, \quad \text{или} \quad (a+c)(a+2b+c) = 2(a+b)(b+c), \quad \text{или}$$
$$a^2 + 2ac + c^2 + 2ab + 2bc = 2ab + 2ac + 2b^2 + 2bc,$$

что верно, так как по условию $a^2 + c^2 = 2b^2$.

11. Так как $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1$, то искомая сумма равна сумме

$$3 + 7 + \ldots + 199 = \frac{3 + 199}{2} \cdot 50 = 5050.$$

Тема 18. «Текстовые» задачи на прогрессии.

Подавляющее большинство так называемых «задач на прогрессии» являются «текстовыми» в том смысле, что для их решения надо просто перевести условие данной задачи из словесной формы в формульную, воспользовавшись одним из определений арифметической и (или) геометрической прогрессии. Собственно говоря, такими являются почти все задачи, в которых идет речь о прогрессиях, что ясно видно из разбора задач предыдущей темы. Приведем еше два типичных примера.

Задача 132. Найдите пятидесятый член арифметической прогрессии, если ее двадцатый член равен 30, а ее тридцатый член равен 20.

Пусть a первый член этой прогрессии, а d — ее разность. В силу формулы общего члена арифметической прогрессии мы получим систему

$$\begin{cases} a + 19d = 30, \\ a + 29d = 20, \end{cases}$$

откуда $d = -1$ и $a = 49$. Поэтому пятидесятым членом этой прогрессии будет число $49 + 49 \cdot (-1) = 0$.

Конечно, рассуждать можно проще, и такое рассуждение учащимся обязательно надо показать. Так как $a_n - a_k = d(n-k)$, то $a_{30} - a_{20} = 10d = -10$, а $a_{50} - a_{20} = 30d = -30$. Поэтому $a_{50} = 30 - 30 = 0$.

Задача 133. Найдите шестой и девятый члены возрастающей геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение второго и тринадцатого членов этой прогрессии равно 60.

В силу общей формулы для членов геометрической прогрессии справедливы равенства
$$\begin{cases} aq^5 + aq^8 = 16, \\ aq \cdot aq^{12} = 60. \end{cases}$$
Теперь можно заметить, что $aq^5 \cdot aq^8 = aq \cdot aq^{12}$, а если u и v — это шестой и девятый члены рассматриваемой прогрессии, то
$$\begin{cases} u + v = 16, \\ uv = 60, \end{cases}$$
откуда $u = 6$ и $v = 10$ в силу того, что данная прогрессия — возрастающая.

Задача 134. Выясните, существует ли арифметическая прогрессия, сумма первого и третьего члена которой равна 5, сумма первого и пятого членов равна 8, а сумма всех членов этой прогрессии равна: а) 63; б) 64.

Пусть a — первый член прогрессии, а d — это ее разность. Так как $x_1 + x_3 = a + a + 2d = 2a + 2d = 5$, а $x_1 + x_5 = 2a + 4d = 8$, то $d = \dfrac{3}{2}$ и $a = 1$. а) Далее,
$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2}\, n = \frac{2a + (n-1)d}{2}\, n = \frac{3n+1}{4}\, n = 63,$$
откуда $3n^2 + n - 252 = 0$. По условию число n должно быть натуральным, поэтому вместо того, чтобы решать полученное квадратное уравнение, проще подобрать его корень, который равен 9. Конечно, дискриминант этого уравнения равен 3025, что есть квадрат числа 55.

В случае (б) мы придем к уравнению $3n^2 + n - 256 = 0$, которое не имеет натуральных решений, поэтому искомой прогрессии не существует.

Задача 135. Отношение суммы первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно $\dfrac{7}{3}$. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\dfrac{7}{4}$.

Пусть a – это первый член прогрессии, d – ее разность. Сумма первых трех ее членов равна $3 \cdot \dfrac{a+a+2d}{2} = 3(a+d)$, сумма последующих семи равна $7 \cdot \dfrac{a+3d+a+9d}{2} = 7(a+6d)$. В силу первого условия имеем

$$\frac{3(a+d)}{7(a+6d)} = \frac{7}{3}, \text{ или } 8a = -57d.$$

В силу второго условия найдется такое натуральное число k, что

$$(a+kd)(a+(k+1)d) = -\tfrac{7}{4}, \text{ или } d^2\big(k-\tfrac{57}{8}\big)\big(k-\tfrac{49}{8}\big) = -\tfrac{7}{4},$$

следовательно, $\dfrac{49}{8} < k < \tfrac{57}{8}$, поэтому $k=7$. Значит, $\dfrac{7}{64}\,d^2 = \dfrac{7}{4}$, откуда следует, что $d=4$.

А теперь давайте рассмотрим более интересную задачу.

Задача 136. Найдите все арифметические прогрессии a_n, обладающие тем свойством, что $a_n + a_k = a_{n+k}$ при всех натуральных n и k.

Итак, по условию задачи

$$a + d(n-1) + a + d(k-1) = a + d(n+k-1),$$

откуда следует, что $a = d$. Таким образом, указанным свойством обладают те и только те арифметические прогрессии, у которых разность прогрессии равна их первому члену.

Кстати, после того как задача решена, полезно ее переформулировать. Предложите учащимся решить следующую задачу.

Задача 137. Найдите все последовательности x_n, обладающие тем свойством, что $x_n + x_k = x_{n+k}$ при любых натуральных n и k.

Идея состоит в том, что указанное соотношение влечет за собой то, что данная последовательность является арифметической прогрессией. Действительно, по условию $x_{n+1} - x_n = x_1$, значит, x_n — арифметическая прогрессия, разность которой равна ее первому члену.

Задача 138. Докажите, что во всякой арифметической прогрессии a_n равенство $a_n + a_k = a_m + a_\ell$ имеет место тогда и только тогда, когда $n + k = m + \ell$.

Собственно говоря, утверждение задачи очевидно, так как $a_n + a_k = 2a_1 + d(n+k-2)$ и $a_m + a_\ell = 2a_1 + d(m+\ell-2)$. Однако сформулировать задачу было полезно.

Задача 139. Как обычно, через S_n будем обозначать сумму первых n членов арифметической прогрессии. Пусть n и m — различные натуральные числа. Найдите S_{n+m}, если известно, что $S_n = S_m$.

Пусть a — первый член прогрессии, d — ее разность. По условию $S_n = S_m$, поэтому $\dfrac{2a+d(n-1)}{2}n = \dfrac{2a+d(m-1)}{2}m$. Преобразуя это равенство, получим

$$\begin{aligned}&2an + d(n^2-n) = 2am + d(m^2-m), \text{ или}\\ &\qquad 2a(n-m) + d(n-m)(n+m) - d(n-m) = 0,\\ &\qquad\qquad \text{откуда } (n-m)(2a + d(n+m-1)) = 0.\end{aligned}$$

Так как $n \neq m$, то $2a + d(n+m-1) = 0$, поэтому, $S_{n+m} = 0$.

Эта задача имеет и другое решение, которое имеет смысл показать. Пусть для определенности $n > m$. По условию

$$0 = S_n - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n = \frac{(a_{m+1}+a_n)(n-m)}{2}.$$

В силу утверждения предыдущей задачи $a_1 + a_{m+n} = a_{m+1} + a_n = 0$, значит, $S_{n+m} = 0$.

Последняя из приводимых задач интересна тем, что сначала непонятно — при чем же здесь прогрессии.

Задача 140. В 6 часов утра часовая стрелка показывает на цифру 6 циферблата, а минутная — на число 12. На «правильных» часах невозможна ситуация, в которой они меняются местами, т. е. когда часовая указывает на 12, а минутная — на 6. Определите, сколько существует моментов времени от 0 часов ночи до 12 часов дня, в которых, поменяв местами минутную и часовую стрелки, мы снова получим определенный момент времени.

За нулевое положение стрелок будем принимать их вертикальное положение (когда они указывают на 12), а угол отсчитывать по направлению их движения. Минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой. Поэтому, если положение часовой стрелки определяется углом α, то положение минутной стрелки — углом $\beta = 12\alpha$. Поменяв местами стрелки, получим, что положение часовой стрелки определяется углом β, следовательно, положение минутной должно определяться углом 12β. Поэтому $12\beta = 144\alpha = \alpha + 360^\circ k$, откуда $\alpha = \dfrac{360^\circ k}{143}$. Поскольку $\alpha \in [0; 360^\circ)$, то $k = 0, 1, \ldots, 142$. Таким образом, всего имеется 143 таких момента времени.

Задачи для домашних заданий по теме 18

1. Первый член арифметической прогрессии a_n равен 1. Найдите значение разности этой прогрессии, при котором является наименьшим число $a_1a_3 + a_2a_3$.

2. Три различных числа a, b и c, наибольшее из которых равно 4, в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдите эту прогрессию, если известно, что после некоторой перестановки ее членов из нее получается арифметическая прогрессия.

3. Докажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, то он подобен треугольнику со сторонами 3, 4 и 5 (т. е. «египетскому» треугольнику).

4. Рассмотрим треугольник, длины сторон которого образуют неубывающую геометрическую прогрессию. Найдите значения, которые принимает знаменатель этой прогрессии.

5. Как обычно, через S_n будем обозначать сумму первых n членов арифметической прогрессии. Пусть n и m — различные натуральные числа. Найдите S_{n+m}, если известно, что $S_n = m$ и $S_m = n$.

6. Том Сойер красил забор длиной 105 метров, причем день за днем количество метров выкрашенного им за день забора уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был покрашен забор, если за первые три дня Том покрасил 36 метров забора, а за последние три дня — только 27 метров?

7. а) Докажите, что если последовательность a_n является арифметической прогрессией, то $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$ при всех натуральных n. б) Получите аналогичное соотношение между пятью последовательными членами произвольной арифметической прогрессии.

8. Найдите произведение первых 10 членов геометрической прогрессии, если известно, что их сумма равна 20, а сумма обратных им чисел равна 10.

9. Найдите явную формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 1$.

10. Выясните, может ли среди членов бесконечной арифметической прогрессии быть: а) только одно целое число; б) только два целых числа.

11. Рассмотрим арифметические прогрессии, все члены которых являются натуральными числами. а) Приведите пример прогрессии, в которой ни один член не является квадратом натурального числа.

б) Докажите, что если в такой прогрессии есть член, являющийся квадратом натурального числа, то эта прогрессия содержит бесконечно много таких чисел.

12. а) Найдите сумму первых 40 членов арифметической прогрессии, если известно, что $S_{15} = 30$ и $S_{25} = 93$. б) В стандартных обозначениях для суммы первых членов арифметической прогрессии найдите выражение для разности $S_n - S_k$ через S_{n+k}.

Решения домашних задач по теме 18

1. Обозначим через d разность прогрессии. Так как $a_2 = 1 + d$ и $a_3 = 1 + 2d$, то $a_1a_3 + a_2a_3 = 2d^2 + 5d + 2$. Полученный квадратный трехчлен принимает наименьшее значение при $d = -\dfrac{5}{4}$.

2. По условию $b = aq$ и $c = aq^2$, где $q \neq 1$. Предположим вначале, что b является также вторым членом арифметической прогрессии. Тогда $a + c = 2b$, или $a + aq^2 = 2aq$. Тогда $(q - 1)^2 = 0$, что невозможно по условию. Пусть теперь вторым членом арифметической прогрессии является число a. Тогда $2a = b + c$, т. е. $aq^2 + aq - 2a = 0$, или $q^2 + q - 2 = 0$. Так как $q \neq 1$, то остается случай $q = -2$. Таким образом, геометрическая прогрессия имеет вид $a, -2a, 4a$. Если $a > 0$, то наибольшим среди этих чисел является $4a$, по условию $4a = 4$, откуда $a = 1$. Если $a < 0$, то тогда $-2a = 4$, так что $a = -2$. Следовательно, мы получаем две геометрические прогрессии: $1, -2, 4$ и $-2, 4, -8$. Наконец, пусть вторым членом арифметической прогрессии является число c. В этом случае мы получим уравнение $2q^2 - q - 1 = 0$, так что $q = -\dfrac{1}{2}$. Среди чисел $a, -\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{4}$ наибольшим может быть a, а тогда $a = 4$, или $-\dfrac{a}{2}$, откуда $a = -8$. Значит, мы получим еще две геометрические прогрессии: $4, -2, 1$ и $-8, 4, -2$.

3. Из уравнения $a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2$ получим, что $a = 3d$, поэтому длины сторон этого треугольника равны $3d$, $4d$ и $5d$. Следовательно, он подобен треугольнику со сторонами 3, 4 и 5.

4. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — данные числа, причем $b = aq$ и $c = aq^2$. Треугольник с длинами сторон a, b и c существует тогда и только тогда, когда $a + b > c$, или $q^2 - q - 1 < 0$. Значит, $1 \leqslant q < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

5. По условию $2an + d(n^2 - n) = 2m$ и $2am + d(m^2 - m) = 2n$. Взяв разность этих равенств, получим, что $2a + d(n + m - 1) = -2$, откуда следует, что $S_{n+m} = -n - m$.

6. Пусть на покраску забора у Тома ушло n дней. Обозначим через a_k количество метров забора, покрашенного им в k-й день. По условию последовательность a_k является арифметической прогрессией. Так как $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$, то

$$3(a_1 + a_n) = a_1 + a_2 + a_3 + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 36 + 27 = 63,$$

откуда $a_1 + a_n = 21$. Так как $105 = S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{21n}{2}$, то $n = 10$.

7. а) В силу основного свойства арифметической прогрессии $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ и $a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} = 0$. Вычтя из второго равенства первое, мы и получим требуемое равенство.

б) Рассуждение аналогично предыдущему. Так как по доказанному в предыдущем пункте $a_{n+4} - 3a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_{n+1} = 0$ и $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$, то $a_{n+4} - 4a_{n+3} + 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.

8. По условию

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = 20, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_{10}} = 10, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_1(1 + q + \ldots + q^9) = 20, \\ \dfrac{1}{b_1}\left(1 + \dfrac{1}{q} + \ldots + \dfrac{1}{q^9}\right) = 10. \end{cases}$$

Поделив первое уравнение этой системы на второе, получим равенство $b_1^2 q^9 = 2$. Осталось заметить, что $b_1^2 q^9 = b_1 q^4 \cdot b_1 q^5 = b_5 b_6$, поэтому, как и в задаче 8 из предыдущего домашнего задания, $b_1 b_2 \ldots b_{10} = 32$.

9. Ответ: $x_n = 2^n - 1$. Приведем одно из возможных решений. Прибавив по 1 к обеим частям равенства $x_{n+1} = 2x_n + 1$, получим, что $x_{n+1} + 1 = 2(x_n + 1)$. Поэтому

$$x_n + 1 = 2(x_{n-1} + 1) = 2^2(x_{n-2} + 1) = \ldots = 2^{n-1}(x_1 + 1) = 2^n,$$

откуда и следует искомое равенство.

10. а) Например, таким свойством обладает прогрессия с общим членом $a_n = \sqrt{2}(n-1)$.

б) Если a_n и a_k — целые числа, то разность этой прогрессии является рациональным числом, поэтому в ней будет содержаться бесконечно много членов, являющихся целыми числами.

11. а) Рассмотрим прогрессию $2, 6, 10\ldots$ Поскольку каждый ее член есть четное число, не делящееся на 4, то он не есть квадрат натурального числа.

б) Предположим, что $a_n = k^2$. Пусть d — разность прогрессии. По условию d — натуральное число. Так как $(k+d)^2 = k^2 + 2kd + d^2 = k^2 + d(2k+d)$, то $a_{n+2k+d} = (k+d)^2$.

12. а) Можно найти первый член и разность данной прогрессии. Числа получаются не очень «красивыми», $a_1 = -\frac{51}{125}$ и $d = \frac{43}{125}$, откуда $S_{40} = 252$. Конечно, гораздо проще сначала решить пункт (б).

б) Проведем вычисление «в две строчки». Для определенности предположим, что $n > k$. Тогда

$$S_n - S_k = a_{k+1} + \ldots + a_n = \frac{a_{k+1} + a_n}{2}\,(n-k) = \\ = \frac{a_1 + a_{n+k}}{2}\,(n-k) = \frac{n-k}{n+k}\,S_{n+k}.$$

Это равенство можно записать в виде: $\dfrac{S_n - S_k}{n-k} = \dfrac{S_{n+k}}{n+k}$. Поэтому ответ пункта (а) задачи получается так: $S_{40} = \dfrac{40}{10}\cdot 63 = 252$. Этим равенством можно воспользоваться и для решения задачи 5.

Самостоятельная работа 12 (темы 17 и 18)

Вариант 1

1. Найдите седьмой член арифметической прогрессии, если сумма третьего и одиннадцатого ее членов равна 20.
2. Третий член геометрической прогрессии равен 4. Найдите произведение первых пяти членов этой прогрессии.
3. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии $b_n = 5 \cdot 2^n$.
4. Первый член геометрической прогрессии положителен. Найдите значение знаменателя этой прогрессии, при котором сумма ее первых трех членов принимает наименьшее значение.
5. Вставьте между числами 1 и 8: а) четыре числа так, чтобы шесть этих чисел образовали арифметическую прогрессию; б) пять чисел так, чтобы семь этих чисел образовали геометрическую прогрессию.

Вариант 2

1. Найдите шестой член арифметической прогрессии, если сумма третьего и девятого ее членов равна 30.
2. Четвертый член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых семи членов этой прогрессии.
3. Найдите сумму первых девяти членов прогрессии $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
4. Первый член геометрической прогрессии отрицателен. Найдите значение знаменателя этой прогрессии, при котором сумма ее первых трех членов принимает наибольшее значение.
5. Вставьте между числами 1 и 9: а) шесть чисел так, чтобы восемь этих чисел образовали арифметическую прогрессию; б) пять чисел так, чтобы семь этих чисел образовали геометрическую прогрессию.

Вариант 3

1. Найдите сумму первых одиннадцати членов арифметической прогрессии a_n, если известно, что $a_2 + a_4 + a_8 + a_{10} = 16$.
2. Пятый член арифметической прогрессии равен 2. Найдите разность прогрессии, при которой сумма попарных произведений ее четвертого, седьмого и восьмого членов принимает наименьшее значение.
3. Третий член геометрической прогрессии равен 9, а шестой член равен 243. Найдите сумму ее первых шести членов.
4. Выясните, может ли сумма первых n членов геометрической прогрессии при любом натуральном n быть равной: а) $3^n - 1$; б) $2^{n+1} - 1$.
5. Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если первый ее член равен 64, а второй равен 58.

Вариант 4

1. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии a_n, если известно, что $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 12$.
2. Четвертый член арифметической прогрессии равен 3. Найдите разность прогрессии, при которой сумма попарных произведений ее третьего, шестого и седьмого членов принимает наименьшее значение.
3. Четвертый член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых семи членов этой прогрессии.
4. Выясните, может ли сумма первых n членов геометрической прогрессии при любом натуральном n быть равной: а) $2^n + 1$; б) $3^{n+1} - 3$.
5. Найдите наименьшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если первый ее член равен -35, а второй равен -31.

Дополнительные упражнения по темам 17 и 18

Всюду далее через a_n обозначены члены арифметической прогрессии, d – разность прогрессии, через b_n — члены геометрической прогрессии, q — знаменатель прогрессии, а через S_n — суммы первых n членов арифметической (или геометрической) прогрессии.

12.1. Найдите: 1) a_{16}, если $a_{15} = 3$ и $a_{17} = 5$; 2) a_{10}, если $a_5 + a_7 = 10$ и $a_2 = 2$; 3) S_{10}, если $a_n = 3n - 1$; 4) S_9, если $a_3 + a_7 = 5$; 5) S_{12}, если $a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} = 10$; 6) d, если $a_1 = 7$ и $S_{10} = 25$.

12.2. Найдите: 1) b_{16}, если $b_{15} = 0{,}2$ и $b_{17} = 5$; 2) $b_7 \cdot b_8$, если $b_5 \cdot b_{10} = 10$; 3) S_8, если $b_n = 4 \cdot 3^n$; 4) $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{11} \cdot b_{12}$, если $b_2 \cdot b_{11} = 2$; 5) q, если $b_1 + b_3 = 10$ и $b_2 + b_4 = 20$.

12.3. Найдите наибольшее значение произведения $a_4 \cdot a_8$, если известно, что $a_5 = 3$.

12.4. Докажите, что числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $(a-b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2$.

12.5. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 12. а) Докажите, что одно из этих чисел равно 4. б) Найдите наибольшее значение произведения этих чисел.

12.6. Найдите все арифметические прогрессии, среднее арифметическое первых n членов которых равно n.

12.7. Два положительных числа являются первым и третьим членами некоторой арифметической прогрессии и первым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Выясните, у какой из этих прогрессий сумма первых трех членов больше.

12.8. Найдите разность арифметической прогрессии, в которой $a_1 \cdot a_5 = 64$ и $a_2 + a_4 = 16$.

12.9. Выясните, является ли арифметической прогрессией последовательность, члены которой равны: а) отношению соответствующих членов двух арифметических прогрессий; б) модулю членов некоторой арифметической прогрессии.

12.10. Выясните, могут ли числа: а) 2, 3, 4; б) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ — быть членами (не обязательно последовательными) некоторой геометрической прогрессии.

12.11. Докажите, что если числа y, x, $2z-x$ образуют геометрическую прогрессию, то числа x^2, yz, xy образуют арифметическую прогрессию.

12.12. Найдите явную формулу последовательности, заданную соотношениями $x_{n+1}=2x_n-1$ и $x_1=4$.

Тема 19*. Сравнение арифметических прогрессий и геометрических прогрессий

Задача 141. а) Докажите, что три различных числа не могут быть последовательными членами арифметической прогрессии и в то же время быть последовательными членами геометрической прогрессии. б) Пусть положительные числа a, b и c образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Докажите, что $c-b>b-a$.

а) Действительно, если $2b=a+c$ и $b^2=ac$, то $4ac=4b^2=(a+c)^2$, откуда $(a-c)^2=0$, т. е. $a=c=b$.

б) Утверждение пункта (б) просто уточняет утверждение пункта (б). Проделаем преобразования, аналогичные уже проведенным. Неравенство $c-b>b-a$ равносильно неравенству $2b<a+c$, или $4b^2<a^2+2ac+c^2$, или $(a-c)^2>0$.

Задача 142. Рассмотрим четыре стандартных средних двух различных положительных чисел a и b: среднее гармоническое $H = \dfrac{2ab}{a+b}$, среднее геометрическое $G = \sqrt{ab}$, среднее арифметическое $A = \dfrac{a+b}{2}$ и среднее квадратичное $Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Выясните, могут ли некоторые три из них образовать: а) арифметическую прогрессию; б) геометрическую прогрессию.

Собственно говоря, здесь 8 разных задач.

Является ли АП:	H, G, A	H, G, Q	H, A, Q	G, A, Q
Является ли ГП:	H, G, A	H, G, Q	H, A, Q	G, A, Q

Поскольку $G = \sqrt{HA} < \sqrt{HQ}$, то числа H, G, A образуют геометрическую прогрессию, тогда как числа H, G, Q ее не образуют. Так как $G = \sqrt{HA} < \dfrac{H+A}{2} < \dfrac{H+Q}{2}$, то числа H, G, A так же, как и числа H, G, Q, арифметическую прогрессию не образуют. Далее, поскольку

$$A = \sqrt{\frac{G^2+Q^2}{2}} > \frac{G+Q}{2} > \frac{H+Q}{2}\,,$$

то числа G, A, Q и H, A, Q арифметическую прогрессию не образуют. Из этого же равенства следует, что

$$A = \sqrt{\frac{G^2+Q^2}{2}} > \sqrt{GQ} > \sqrt{HQ}\,,$$

поэтому числа G, A, Q и H, A, Q не образуют и геометрической прогрессии. Таким образом, лишь один ответ из восьми — утвердительный.

Задача 143. Пусть бесконечная последовательность a_n является непостоянной арифметической прогрессией, состоящей из положительных чисел, а последовательность b_n является геометрической прогрессией. Докажите, что если $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, то $a_n < b_n$ при всех $n \geqslant 3$.

Пусть d — разность арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической прогрессии. Ясно, что из положительности чисел a_n следует, что $d > 0$. По условию $d = a_2 - a_1 = b_2 - b_1 = a_1(q-1)$, откуда, в частности, $q > 1$. Следовательно, неравенство $a_n < b_n$ равносильно неравенству $a_1 + (n-1)d < a_1q^{n-1}$, или $1 + (n-1)(q-1) < q^{n-1}$, которое есть неравенство Бернулли (см. с. 199).

Задача 144. Найдите условие на знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, при котором члены этой прогрессии являются также некоторыми (не обязательно последовательными) членами некоторой арифметической прогрессии. Рассмотрите отдельно случаи, когда геометрическая прогрессия является: а) конечной; б) бесконечной.

Например, если $q = 2$ и $b_1 = 1$, то членами этой геометрической прогрессии являются степени числа 2, лежащие в последовательности всех натуральных чисел, являющейся арифметической прогрессией. Более того, всегда, когда знаменатель геометрической прогрессии является натуральным числом, члены такой геометрической прогрессии являются и членами некоторой арифметической прогрессии.

Рассмотрим геометрическую прогрессию из n членов, знаменатель которой равен q:

$$b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots,\ bq^{n-1}.$$

Предположим, что все эти числа являются членами некоторой арифметической прогрессии. Тогда

$$bq = b + k_1 d,\ bq^2 = bq + k_2 d,\ \ldots,\ bq^{n-1} = bq^{n-2} + k_{n-1} d,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — натуральные числа. Таким образом,

$$b(q-1) = k_1 d,\ bq(q-1) = k_2 d,\ bq^2(q-1) = k_3 d,\ \ldots,\ bq^{n-2}(q-1) = k_{n-1} d,$$

откуда $q^{i-1} = \dfrac{k_i}{k_1}$, или $k_i = k_1 q^{i-1}$, где $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Из равенства $k_2 = k_1 q$ следует, что число q — рациональное. Предположим, что оно не является натуральным, $q = \dfrac{p}{r}$, где $r \geqslant 2$. Из формулы $k_{n-1} = k_1 q^{n-2}$ следует, что k_1 должно делиться на r^{n-2} при любом $n \geqslant 2$, что невозможно.

Таким образом, если знаменатель конечной геометрической прогрессии является рациональным числом, то найдется арифметическая прогрессия, членом которой является каждый из членов данной геометрической прогрессии. С другой стороны, если мы рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию, то ее члены будут также членами некоторой арифметической прогрессии только в том случае, если знаменатель геометрической прогрессии есть натуральное число.

Задача 145. Предположим, что $q > 1$. Докажите, что последовательность $u_n = \dfrac{q^n - 1}{n}$ — возрастающая.

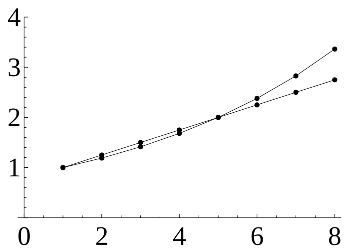
Преобразуем неравенство $u_n < u_{n+1}$ следующим образом:

$$\frac{q^n - 1}{n} < \frac{q^{n+1} - 1}{n+1}\,, \quad (n+1)q^n - n - 1 < nq^{n+1} - n,$$
$$q^n - 1 < nq^n(q-1), \quad q^{n-1} + q^{n-1} + \ldots + 1 < nq^n.$$

Последнее неравенство верно, так как из неравенства $q > 1$ следует, что $q^n > q^k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Задача 146. Пусть a_n — арифметическая прогрессия, b_n — возрастающая геометрическая прогрессия. Предположим, что $a_1 = b_1$ и $a_k = b_k$. Докажите, что тогда: а) $a_n > b_n$ при $n = 2, 3, \ldots, k-1$; б) $a_n < b_n$ при всех $n > k$.

Следующий рисунок является иллюстрацией к этой задаче.



Само решение задачи не слишком сложно, но кое-что придется подсчитать. Для краткости положим $a = a_1 = b_1$. Так как $a_n = a+(n-1)d$ и $b_n = aq^{n-1}$, то $a + (k-1)d = aq^{k-1}$, откуда $d = \dfrac{a(q^{k-1}-1)}{k-1}$. Поэтому

$$b_n - a_n = aq^{n-1} - a - (n-1)\,\frac{a(q^{k-1}-1)}{k-1} = a(n-1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{n-1} - \frac{q^{k-1}-1}{k-1}\right).$$

Осталось воспользоваться утверждением задачи 145.

Решения задач самостоятельных работ

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. 1) При $x \geqslant 0$, точнее (поскольку функция определена на отрезке $[-3; 3]$) при $x \in [0; 3]$, функция принимает все значения из отрезка $[-2; 2]$. 2) Горизонтальная прямая $y = 1$ пересекает данный график в двух точках. Абсцисса правой из них равна 2, абсцисса левой равна $\frac{3}{4}$, что вытекает из рассмотрения подобных треугольников. 3) Решением данного неравенства является объединение отрезка $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ и точки 3. 4) Ответ: $f(x) = 3 - x$.

2. Объем увеличится в 27 раз.

3. а) Имеем $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)x = \frac{x^2+1}{x} = f(x)$. б) Поскольку $f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{x^2+4}{2x}$, то мы получаем уравнение $\frac{x^2+4}{2x} = \frac{x^2+1}{x}$, или $x^2 + 4 = 2x^2 + 2$, откуда $x = \pm\sqrt{2}$.

4. а) Так как $f(x+1) = (x+1)^2 - 4(x+1) = x^2 - 2x - 3$, а $f(x) + 1 = x^2 - 4x + 1$, то $2x = 4$, откуда $x = 2$. б) Если $f(x) = -4$, то $x = 2$, поэтому $f(3x - x^2) = -4$, если $3x - x^2 = 2$, или $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x = 1; 2$.

Вариант 2

1. 1) Все значения из промежутка $[-3; 3)$. 2) $x = \frac{5}{3}; 3$. 3) $[-5; 1] \cup \{5\}$. 4) $f(x) = x - 5$.

2. Объем уменьшится в 8 раз.

3. а) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)x = \frac{1-x^2}{x} = -f(x)$; б) $x = \pm\sqrt{2}$.

Комментарий. При решении последнего уравнения можно было заменить вычисления рассуждением. Данная функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Так как знаки чисел $\frac{2}{x}$ и x совпадают, то из того, что $f\left(\frac{2}{x}\right) = f(x)$, следует, что $\frac{2}{x} = x$. Однако подобные рассуждения появятся у нас несколько позже.

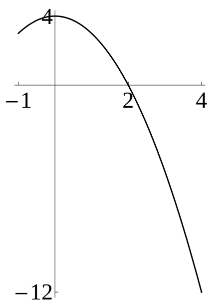
4. а) $x = 4$; б) $x = 1; 3$.

Вариант 3

1. Если a, b и c — это длины ребер прямоугольного параллелепипеда, то его полная поверхность S_1 равна $2(ab + bc + ac)$. Если длину каждого из ребер увеличить в 3 раза, то получим параллелепипед, площадь полной поверхности которого равна $S_2 = 2(9ab + 9dc + 9ac) = 9S_1$. Таким образом, площадь увеличилась в 9 раз.

2. 1) Одним из решений уравнения $f(x) = f(1)$, является $x = 1$. Второе решение, конечно, тоже можно найти без вычислений, пользуясь свойствами графика квадратичной функции. Однако пока придется посчитать. Получаем уравнение $4 - x^2 = 3$, откуда $x = \pm 1$. Осталось заметить, что оба найденных корня лежат в отрезке $[-1; 4]$. 2) $f(x) \leqslant 0$, если $x^2 - 4 \geqslant 0$ и $x \in [-1; 4]$, откуда следует, что $x \in [2; 4]$. 3) Функция принимает свое наибольшее значение 4 при $x = 0$. Наименьшим ее значением (на данном отрезке) является $f(4) = -12$. Поэтому данная функция принимает все значения из отрезка $[-12; 4]$.

Конечно, ответ следует и из изображенного на рисунке графика данной функции.



4) Решение этого пункта будет существенно проще, если мы воспользуемся графиком функции. Прямая $y = a$ пересекает его в одной точке при $a \in [-12; 3) \cup \{4\}$.

3. а) Имеем $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} = f(x)$. б) В силу результата пункта (а) получим уравнение $4f(x) = \frac{1}{f(x)}$, откуда $f(x) = \pm\frac{1}{2}$. Поэтому $x^2 + 1 = \pm 2x$, значит, $x = \pm 1$.

4. а) Подставив $x = 2$ в данное соотношение, получим, что $f(1) = 2$. б) Записав (для удобства) данное соотношение в виде $f(2a - 3) = a$ и положив $2a - 3 = x$, получим, что $a = \frac{x + 3}{2}$, откуда и следует, что $f(x) = \frac{x + 3}{2}$.

Вариант 4

1. Площадь полной поверхности уменьшится в 4 раза.
2. 1) $x = \pm 2$. 2) $x \in [-4; -3]$. 3) Множеством значений является отрезок $[-9; 7]$. 4) $a \in (-5; 7] \cup \{-9\}$.
3. б) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
4. а) $f(8) = 2$. б) $f(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. а) Например, при $a = 0$ и $b = -3$ получаем, что $a^2 + 2a = 0 < 3 = b^2 + 2b$. б) Произведем разложение на множители:

$$a^2 + 2a - b^2 - 2b = (a+b)(a-b) + 2(a-b) = (a+b+2)(a-b) > 0,$$

поскольку $a > b$ и $a + b > -2$. Можно рассуждать иначе. Прибавив по 1 к обеим частям данного неравенства, получим неравенство $(a+1)^2 > (b+1)^2$, которое выполнено в силу того, что $a + 1 > b + 1 \geqslant 0$.
2. Поскольку данная функция возрастает на промежутке $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и так как $\frac{31}{39} > \frac{30}{40} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, то $f\left(\frac{31}{39}\right) > f\left(\frac{3}{4}\right)$.
3. Так как функция $f(x) = \sqrt{2x+1} + x$ возрастает на всей своей области определения — промежутке $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то при всех натуральных значениях x выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(1) = \sqrt{3} + 1$.
4. а) Проще всего преобразовать выражение для данной функции следующим образом: $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x+3}$. Следовательно, данная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. б) Из равенства $\dfrac{x+2}{x+3} = a$ следует, что $x = \dfrac{3a-2}{1-a}$. Из условия $x \geqslant 0$ получим, что $\frac{2}{3} \leqslant a < 1$. Таким образом, функция принимает все значения из промежутка $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Вариант 2

2. Поскольку данная функция убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$ и так как $\frac{1}{3} < \frac{11}{28} < \frac{2}{5}$, то $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{11}{28}\right)$.
3. Функция $f(x) = \sqrt{4x-2} + 3x$ возрастает на всей области определения, поэтому при всех натуральных значениях x верно неравенство $f(x) = \sqrt{4x-2} + 3x \geqslant f(1) = \sqrt{2} + 3$.

4. б) Функция принимает все значения из промежутка $(1; 3]$.

Вариант 3

1. а) См. вариант 1. б) В силу свойств числовых неравенств, если $a > b$, то $a^3 > b^3$ и $2a > 2b$, а потому $a^3 + 2a > b^3 + 2b$.
2. Функция $f(x) = x\sqrt{2x-1}$ возрастает на своей области определения как произведение двух возрастающих и неотрицательных функций. Поэтому $f(x) \geqslant f(1) = 1 \geqslant \dfrac{1}{x}$ при любом натуральном значении x.
3. Пусть x и y целые числа, сумма которых равна 10. Тогда их отношение задается формулой $f(x) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{10-x}{x} = \dfrac{10}{x} - 1$. Данная функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Если x — целое отрицательное число, то $-1 > f(x) \geqslant f(-1) = -11$. Если x — натуральное число, то $-1 < f(x) \leqslant f(1) = 9$. Следовательно, наибольшее значение отношения этих чисел равно 9, а наименьшее равно -11.
4. а) При $a = 1$ получаем формулу $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$, поэтому данная функция убывает на промежутке $(-2; +\infty)$. б) Так как $f(x) = \dfrac{ax+3}{x+2} = \dfrac{ax+2a+3-2a}{x+2} = a + \dfrac{3-2a}{x+2}$, то эта функция убывает на $(-2; +\infty)$ тогда и только тогда, когда $3-2a > 0$, т. е. если $a \in \left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$.

Вариант 4

3. а) 7. б) -9.
4. б) $a \in \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

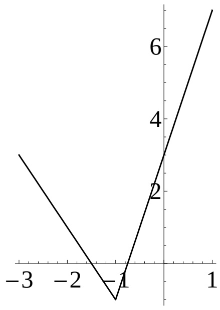
Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. а) Имеем $k = \dfrac{6-8}{8-7} = -2$, $y - 8 = -2(x-7)$, откуда $y = 22 - 2x$. б) На прямой AB лежит точка $D(13; -4)$, значит, точка $C(13; -3)$ лежит выше этой прямой.
2. а) Данная функция задается формулами

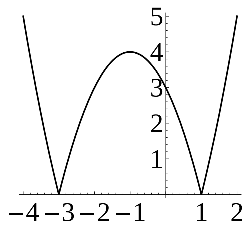
$$f(x) = \begin{cases} 4x+3, \text{если } x \geqslant -1, \\ -3-2x, \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Ее график изображен на следующем рисунке.



По графику видно, что множеством значений этой функции является промежуток $[-1; +\infty)$.

3. а) На следующем рисунке изображен график данной функции.



Она возрастает на каждом из промежутков $[-3; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; -3]$ и $[-1; 1]$. б) Данное уравнение имеет два решения при $a \in \{0\} \cup (4; +\infty)$.

4. а) Данная функция возрастает на промежутке $[0; 4]$, поэтому множеством ее значений на нем является отрезок $[f_1(0); f_1(4)] = [-5; 1]$. б) Так как $0 \leqslant 9 - |x+1| \leqslant 9$, то множеством значений данной функции является отрезок $[0; 6]$.

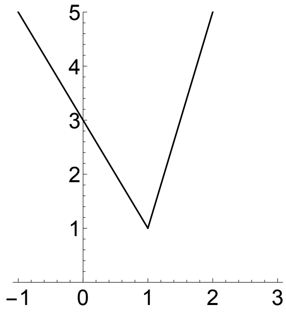
Вариант 2

1. а) $y = 13 - 2x$. б) Точка C лежит ниже прямой AB.

2. а) Данная функция задается формулами

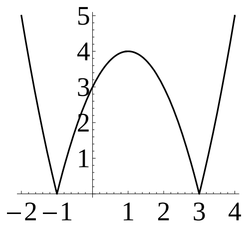
$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, \text{если } x \geqslant 1, \\ 3 - 2x, \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Ее график изображен на следующем рисунке.



По графику видно, что множеством значений этой функции является промежуток $[1; +\infty)$.

3. а) На следующем рисунке изображен график данной функции.



Она возрастает на каждом из промежутков $[-1; 1]$ и $[3; +\infty)$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[1; 3]$. б) Данное уравнение имеет два решения при $a \in \{0\} \cup (4; +\infty)$.

4. а) $[-6; 0]$; б) $[0; 2]$.

Вариант 3

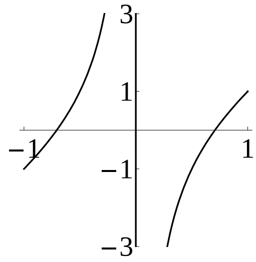
1. а) Уравнение прямой AB: $y = \dfrac{x+3}{2}$. б) На этой прямой лежат точки $K(15; 9)$ и $L(19; 11)$. Следовательно, обе точки C и D лежат ниже этой прямой, поэтому они расположены по одну сторону от нее.

2. а) См. вариант 1. б) Поскольку

$$f(x) = \begin{cases} (a+3)x + 3, & x \geqslant -1, \\ (a-3)x - 3, & x \leqslant -1, \end{cases}$$

то множеством значений данной функции не будет вся числовая прямая тогда и только тогда, когда эта функция не является строго монотонной на $\mathbb{R}$, т. е. когда $(a-3)(a+3) \leqslant 0$, что имеет место при $a \in [-3; 3]$.

3. Данная функция возрастает на каждом из промежутков $[-1; 0)$ и $(0; 1]$. Эскиз ее графика изображен на рисунке.



Поэтому уравнение имеет одно решение при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и имеет два решения при $a \in [-1; 1]$.

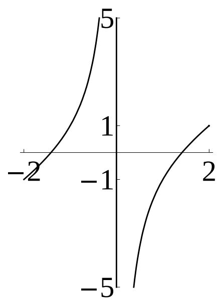
4. а) Квадратичная функция $y = 8 - 2x - x^2$ достигает своего наибольшего значения $y = 9$ при $x = -1$. Таким образом, множество значений функции f_1 — это отрезок $[0; 6]$. б) При $x \in [0; 9]$ значениями $t = \sqrt{x}$ являются все числа отрезка $[0; 3]$. Так как квадратичная функция $y = 2t - t^2$ возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на $[1; 3]$, то ее наибольшее значение равно 1, а наименьшее значение равно -3. Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок $[-3; 1]$.

Вариант 4

1. а) Уравнение данной прямой: $y = 2x - 3$. б) Точка C лежит выше прямой AB, тогда как точка D — ниже этой прямой. Таким образом, эти точки лежат по разные стороны от прямой AB.

2. а) См. вариант 2. б) Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

3. Данная функция возрастает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; 2]$. Эскиз ее графика изображен на рисунке.



Поэтому уравнение имеет одно решение при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и два решения при $a \in [-1; 1]$.
4. а) $[0; 1]$; б) $[-7; 9]$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. а) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+1}$, областью определения данной функции является промежуток $[-3; +\infty)$; $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}+3} = \sqrt{\dfrac{3x+4}{x+1}}$, область определения — объединение $\left(-\infty; -\dfrac{4}{3}\right] \cup (-1; +\infty)$. б) Функция h убывает на всей своей области определения.
2. Функция f убывает на промежутке $(-\infty; 1]$, возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.
3. Поскольку функция $f(x) = \sqrt{5x-1} + x^3$ возрастает на своей области определения, то данное уравнение имеет не более одного решения. Осталось заметить, что $f(2) = 11$, поэтому ответ: $x = 2$.
4. а) Преобразуем выражение

$$f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1} = x^2 + \frac{1}{x^2+1} = x^2+1+\frac{1}{x^2+1} - 1.$$

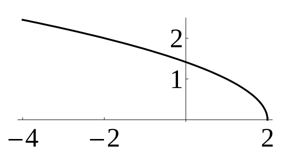
Пусть $t = x^2+1 \geqslant 1$. Тогда $f(x) = t + \dfrac{1}{t} - 1 \geqslant 1$, при этом $f(0) = 1$ и значение $f(x)$ может быть сколь угодно большим. Следовательно, множеством значений данной функции является промежуток $[1; +\infty)$.
б) Поскольку функция $g(t) = t + \dfrac{1}{t} - 1$ возрастает на $[1; +\infty)$, то функция f убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

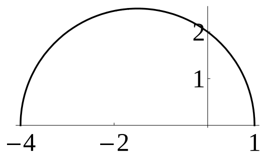
Вариант 2

1. а) Ответы: $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+2}$ при $x \in [2; +\infty)$; $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{-2x-3}{x+2}}$ при $x \in \left(-2; -\dfrac{3}{2}\right]$. б) Функция h убывает на всей ее области определения.
2. Функция h возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$ и убывает на промежутке $[-2; +\infty)$.
3. $x = 3$.
4. а) Множество значений: $[1; +\infty)$. б) Функция f убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

Вариант 3

1. а) $g(x) = \sqrt{4-(x+2)} = \sqrt{2-x}$; график на левом рисунке. б) $h(x) = \sqrt{4-(x^2+3x)} = \sqrt{4-3x-x^2}$; графиком является полуокружность, изображенная на правом рисунке.

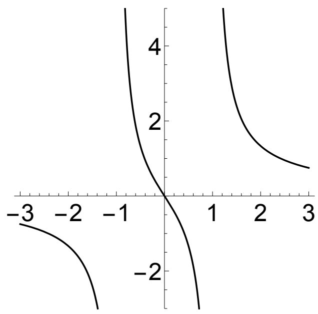




2. Функция $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. Решив неравенство $\dfrac{1}{x-1} \leqslant 1$, получим, что $x < 1$ или $x \geqslant 2$. Следовательно, на промежутках $(-\infty; 1)$ и $[2; +\infty)$ функция g является убывающей, а на промежутке $(1; 2]$ — возрастающей (как композиция двух убывающих функций).

3. Положив $t = x^2 - 2x$, получим уравнение $t^5 + t + 1 = 247$, или $t^5 + t = 246$. Поскольку левая часть этого уравнения определяет возрастающую на $\mathbb{R}$ функцию, то это уравнение имеет не более одного решения. Так как при $t = 3$ получаем верное равенство, то $t = 3$ является единственным решением этого уравнения. Решив уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, получим ответ: $x = -1; 3$.

4. Способ 1. Поскольку $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$, то уравнение преобразуется к виду $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = a - 1$. Выражение в левой части этого уравнения определяет функцию, убывающую на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$. Изобразив эскиз графика этой функции (рисунок),

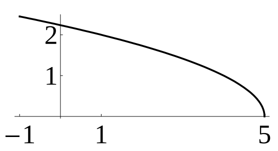


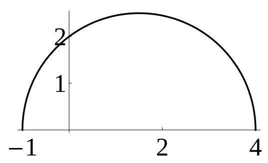
получим, что данное уравнение имеет единственное решение при $a = 1$, а при всех остальных значениях a уравнение имеет два решения.

Способ 2. Данное уравнение преобразуется к уравнению $(a-1)x^2 - 2x + (1-a) = 0$. Заметим, что ни $x = 1$, ни $x = -1$ не являются его решениями, а потому это уравнение равносильно исходному. При $a = 1$ оно имеет единственное решение $x = 0$. При всех других значениях a мы получаем квадратное уравнение с положительным дискриминантом, следовательно, оно имеет два решения.

Вариант 4

1. $g(x) = \sqrt{5-x}$ и $h(x) = \sqrt{4+3x-x^2}$; графики — на рисунках.





2. Данная функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 2)$ и $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(2; \frac{5}{2}\right]$.
3. Ответ: $x = -3; -1$.
4. Ответ: одно решение при $a = -1$, при остальных значениях a уравнение имеет два решения.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. а) Так как $f(3) = 5$, то $g(5) = 3$. б) Если $2x + 1 = 5$, то $x = 2$, поэтому $g(5) = 2$. в) Если $\sqrt{3x+1} = 5$, то $x = 8$, значит, $g(5) = 8$.
2. Функция $g_1(x) = x^2 - 2x$ обратима на промежутке $(-\infty; 1]$, функция $g_2(x) = a - 2x$ обратима на промежутке $(1; +\infty)$ (она обратима и на всей числовой прямой). Функция $f(x)$ будет обратимой, если множества значений функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ не имеют общих точек. Множеством значений первой из них является промежуток $[-1; +\infty)$, множеством значений второй функции является промежуток $(-\infty; a-2)$. Эти множества значений не пересекаются, если $a - 2 \leqslant -1$. Отсюда и следует ответ: данная функция обратима, если $a \leqslant 1$.
3. а) Пусть $f_1(x) = 2f(x)$. Если $f_1(b) = a$, то $f(b) = \frac{a}{2}$, так что $b = g\left(\frac{a}{2}\right)$. Следовательно, функцией, обратной функции $2f(x)$, является функция $g_1(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$. б) Если $2 - f(b) = a$, то $f(b) = 2 - a$,

поэтому $b = g(2 - a)$. Значит, функцией, обратной функции $2 - f(x)$, является функция $g_2(x) = g(2 - x)$.
4. Если $b^3 + 3b^2 + 3b = a$, то $(b + 1)^3 = a + 1$, $b + 1 = \sqrt[3]{a + 1}$. Поэтому функция, обратная данной функции f, задается формулой $g(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 1$.

Вариант 2

1. а) $g(3) = 5$; б) $g(3) = 1$; в) $g(3) = 2$.
2. $a \geqslant -1$.
3. а) $g(2x)$; б) $g(x + 2)$.
4. $g(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 1$.

Вариант 3

1. а) Множеством значений функции f_1 является промежуток $[0; +\infty)$, а потому это множество есть область определения функции g_1, обратной данной функции f_1. Если $f_1(b) = \sqrt{1 - 2b} = a$, то $b = \dfrac{1 - a^2}{2}$. Следовательно, $g_1(x) = \dfrac{1 - x^2}{2}$, при этом $x \geqslant 0$. б) Функция $f_2(x) = x^2 + 4x - 1$ обратима на промежутке $(-\infty; -2]$. Если $b^2 + 4b - 1 = a$, то, по формуле корней квадратного уравнения, $b = -2 \pm \sqrt{a + 5}$. Однако поскольку множеством значений функции g_2, обратной функции f_2, должен быть промежуток $(-\infty; -2]$, то $g_2(x) = -2 - \sqrt{x + 5}$.
2. Функция $f(x)$ задается равенствами

$$f(x) = \begin{cases} (2 + a)x - a \text{ при } x \geqslant 1, \\ (2 - a)x + a \text{ при } x < 1. \end{cases}$$

Эта функция будет обратимой, если она монотонна на всей числовой прямой, т. е. если она является либо возрастающей на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $[1; +\infty)$, либо убывающей на каждом из них. Таким образом, должно выполняться неравенство $(2 + a)(2 - a) > 0$, или $a^2 < 4$, откуда $a \in (-2; 2)$.
3. а) Если $\dfrac{2b + 3}{b - 2} = a$, то $2b + 3 = ab - 2a$, откуда $b = \dfrac{2a + 3}{a - 2}$. Таким образом, функция $f(x)$ является обратной самой себе. б) Найдем формулу для функции $g(x)$, обратной функции $f(x)$. Если $\dfrac{ay + b}{y + c} = x$, то $ay + b = xy + cx$, откуда $y = \dfrac{-cx + b}{x - a}$, следовательно, $g(x) = \dfrac{-cx + b}{x - a}$. Таким образом, равенство $f = g$ имеет место тогда и только тогда, когда $a = -c$.

4. Ясно, что если из чисел x_1 и x_2 оба являются рациональными, либо оба — иррациональными, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Предположим теперь, что x_1 — рациональное число, x_2 — иррациональное число, а $f(x_1) = f(x_2)$. Но тогда $x_1\sqrt{2} = \dfrac{x_2}{\sqrt{2}}$, откуда следует, что $x_2 = 2x_1$, что невозможно. Следовательно, данная функция обратима.

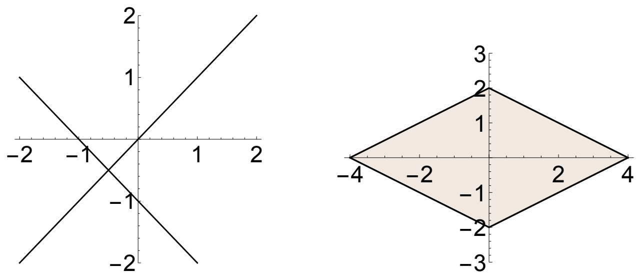
Вариант 4

1. а) $g_1(x) = 1 - x^3$; б) $g_2(x) = 1 - \sqrt{2-x}$.
2. $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
3. а) Функцией, обратной f является сама эта функция; б) $a = -c$.
4. Да, является.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. а) Сумма двух модулей может быть неположительной, только если оба из них равны нулю. Поэтому данное неравенство задает одну точку $M(1; -2)$. б) Так как $x^2 + x - y^2 - y = (x-y)(x+y) + (x-y) = (x-y)(x+y+1)$, то данное уравнение задает объединение прямых $y = x$ и $y = -1 - x$ (левый рисунок).

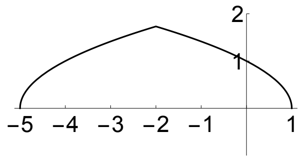


2. а) Данное неравенство задает ромб с вершинами в точках $(\pm 4; 0)$ и $(0; \pm 2)$ (правый рисунок), а потому его площадь равна 16. б) Поскольку множество, заданное данным неравенством, есть результат параллельного переноса множества, заданного неравенством предыдущего пункта, то его площадь также равна 16.
3. а) Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\sqrt{x} \overset{T_1}{\mapsto} \sqrt{-x} \overset{T_2}{\mapsto} \sqrt{-(x-3)} \overset{T_3}{\mapsto} \sqrt{3-|x|} \overset{T_4}{\mapsto} \sqrt{3-|x+2|}\,.$$

Здесь через T_i мы обозначаем преобразование, при помощи которого из графика функции, заданной левой формулой, получается график функции, заданной правой формулой. Преобразование T_1 есть симметрия относительно оси ординат, преобразование T_2 — параллельный перенос на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс. Преобразование T_3 заключается в том, что из предыдущего графика отбрасывается его часть, лежащая левее оси ординат, и к части, лежащей правее оси ординат, добавляется ее образ при симметрии относительно этой оси. Преобразование T_4 есть параллельный перенос на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс.

б) Ответ на рисунке.



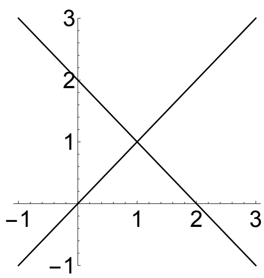
4. а) Так как $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-2)^2+1}$, то

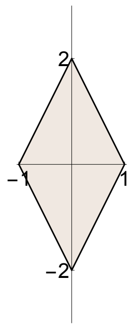
$$f(2-x) = \sqrt{(2-x)^2+1} + \sqrt{(-x)^2+1} = f(x).$$

Таким образом, прямая $x = 1$ является осью симметрии графика этой функции. б) Положим $f(x,y) = 2x^4 - xy + 2y^4$. Так как $f(x,y) = f(y,x) = f(-y,-x)$, то множество, заданное данным неравенством, симметрично относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

Вариант 2

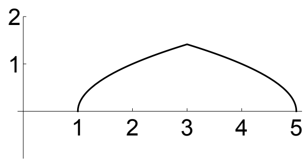
1. а) Точка $M(-2;3)$. б) Объединение прямых $y = x$ и $y = 2-x$ (левый рисунок).





2. а) Множество есть ромб (правый рисунок) площади 4. б) Ответ: 4.

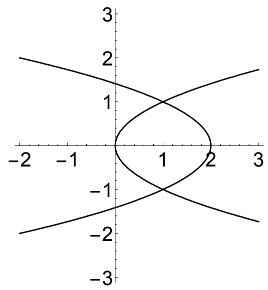
3. а) В обозначениях из решения задачи 3 варианта 1 надо изменить только преобразования T_2 и T_4: в данном случае T_2 есть параллельный перенос на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс, а T_4 — параллельный перенос на 3 единицы вправо вдоль той же оси. б) Ответ на рисунке.

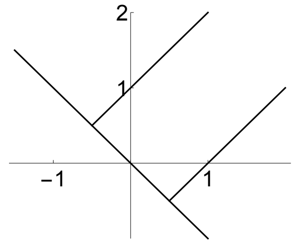


4. а) Ответ: прямая $x = -2$. б) Ответ: прямые $y = x$ и $y = -x$.

Вариант 3

1. а) Так как $x^2 - 2x - y^4 + 2y^2 = (x - y^2)(x + y^2 - 2)$, то искомое множество есть объединение «лежащих на боку» парабол $x = y^2$ и $x = 2 - y^2$ (левый рисунок).





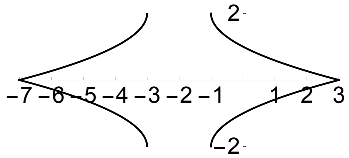
б) Из данного уравнения следует, что $x + y \geqslant 0$. При этом условии получаем, что $x^2 - y^2 = x + y$ или $y^2 - x^2 = x + y$. Поэтому $x + y = 0$ или $x - y = \pm 1$. Ответ на правом рисунке.

2. а) Данное неравенство преобразуется к виду $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 5$, поэтому оно задает круг с центром в точке $P(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Поэтому искомая площадь равна 5π. б) Первое неравенство данной системы задает круг с центром в точке $P(1;2)$ и радиусом $\sqrt{8}$. Данная система задает кольцо, границей которого являются концентрические окружности с радиусами $\sqrt{8}$ и $\sqrt{5}$. Площадь кольца равна $8\pi - 5\pi = 3\pi$.

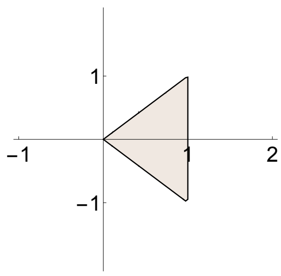
3. а) Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

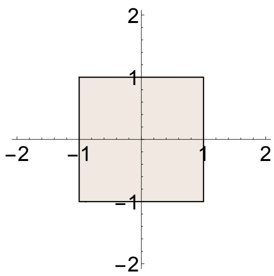
$$\sqrt{x} \overset{T_1}{\mapsto} \sqrt{x-1} \overset{T_2}{\mapsto} \sqrt{|x|-1} \overset{T_3}{\mapsto}$$
$$\sqrt{|x+2|-1} \overset{T_4}{\mapsto} -\sqrt{|x+2|-1} \overset{T_5}{\mapsto} 2 - \sqrt{|x+2|-1}\,.$$

Здесь через T_i мы обозначаем преобразование, при помощи которого из графика функции, заданной левой формулой, получается график функции, заданной правой формулой. T_1 есть параллельный перенос на 1 единицу вправо вдоль оси абсцисс. Преобразование T_2 заключается в том, что к графику $y = \sqrt{x-1}$ мы добавляем множество, симметричное этому графику относительно оси ординат. T_3 есть параллельный перенос на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс, T_4 — симметрия относительно оси абсцисс, а T_5 — параллельный перенос на 2 единицы вверх вдоль оси ординат. Для того чтобы получить из графика $y = 2 - \sqrt{|x+2|-1}$ множество, заданное уравнением $|y| = 2 - \sqrt{|x+2|-1}$, надо к части этого графика, лежащей выше оси абсцисс, добавить ее образ при осевой симметрии относительно этой оси. б) Ответ на рисунке.



4. а) Утверждение задачи следует из того, что левая часть данного неравенства не изменяется, если мы заменяем пару (x, y) парой (y, x) либо парой $(-y, -x)$. б) Изобразим вначале часть множества, лежащую в угле, заданном неравенствами $x + y \geqslant 0$ и $x - y \geqslant 0$. Так как при этих условиях мы получаем неравенство $x \leqslant 1$, то эта часть является треугольником, изображенным на левом рисунке.

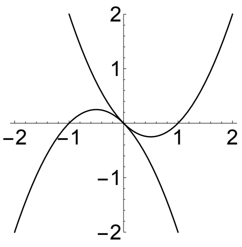


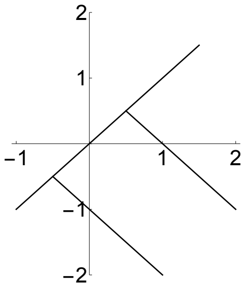


В силу установленной в первом пункте симметричности множества относительно прямых $y = x$ и $y = -x$, само это множество является квадратом, изображенным на правом рисунке.

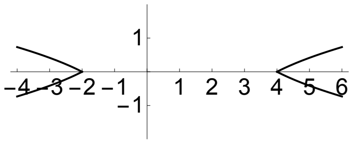
Вариант 4

1. Ответы: к пункту (а) на левом рисунке; к пункту (б) — на правом.

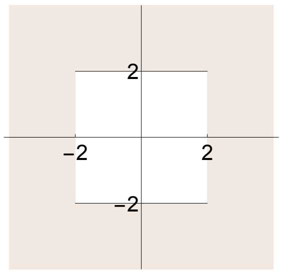




2. Ответы: а) 5π; б) π.
3. б) Ответ на рисунке.



4. б) Ответ на рисунке.

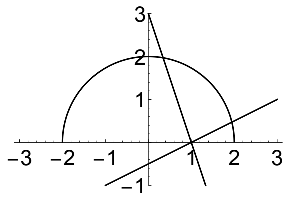


Самостоятельная работа 7

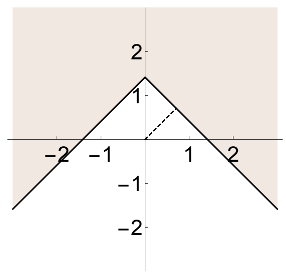
Вариант 1

1. Если $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2+a}$, то $x = a$. Однако найденное значение переменной является решением уравнения, только если $a^2 + a \geqslant 0$. Поэтому, если $a \in (-1; 0)$, то уравнение решений не имеет, если же $a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$, то уравнение имеет одно решение.

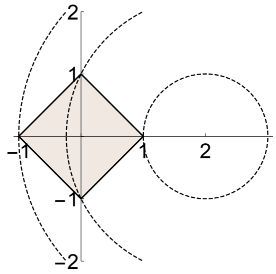
2. Если $a = 0$, то уравнение имет два решения $x = \pm 2$. При $a \neq 0$ будем рассуждать геометрически. График $y = \sqrt{4 - x^2}$ является полуокружностью, уравнение $y = a(x - 1)$ задает прямую, проходящую через точку $A(1; 0)$ (рисунок).



Каждая из таких прямых пересекает окружность в двух точках, одна из которых лежит выше оси абсцисс, а другая лежит ниже этой оси. Поэтому при всех $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение.
Ответ: $a = 0$.
3. На следующем рисунке изображено множество, заданное неравенством $y \geqslant \sqrt{2} - |x|$.

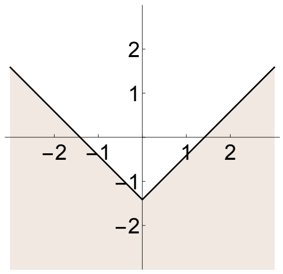


Точкой этого множества, ближайшей к началу координат, является $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (на таком же расстоянии находится и точка $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$). Следовательно, наименьшим значением суммы $x^2 + y^2$ является 1.
4. Неравенство $|x| + |y| \leqslant 1$ задает квадрат, изображенный на следующем рисунке. Ясно, что $a > 0$. Тогда уравнение данной системы задает окружность с центром в точке $P(2; 0)$. Данная система имеет конечное ненулевое число решений, если окружность пересекает квадрат не по дуге, а в конечном числе точек. В этом случае окружность должна проходить через точку квадрата, являющуюся либо ближайшей к точке P, либо самой далекой от нее. Такими являются точки $A(1; 0)$ и $B(-1; 0)$. Значит, радиус окружности равен 1 или 3. Поэтому ответ: $a = 1; 9$.



Вариант 2

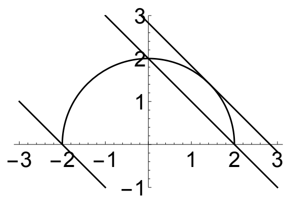
1. Ответ: уравнение не имеет решений при $a \in (0;2)$; если $a \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$, то уравнение имеет одно решение.
2. Ответ: при $a = 0$.
3. Ответ: 1 (рисунок).



4. Ответ: $a = 4; 16$.

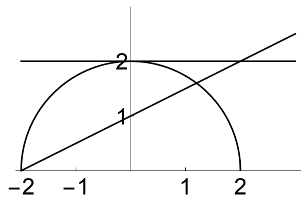
Вариант 3

1. Уравнение $y = \sqrt{4 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность радиусом 2, а уравнения вида $y = a - x$ — прямые, параллельные прямой $y = -x$. Система не имеет решений, если полуокружность не пересекается с прямой. Следовательно, эта прямая должна быть расположена либо ниже прямой $y = -2 - x$, либо выше касательной к этой полуокружности (рисунок).



Так как эта касательная перпендикулярна прямой $y = x$, то она проходит через точку $(\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,)$, откуда $a = 2\sqrt{2}$. Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (2\sqrt{2}\,; +\infty)$.

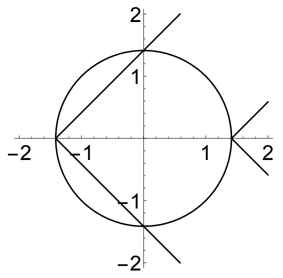
2. Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{4 - x^2} = a(x-2)+2$. Уравнение $y = a(x-2)+2$ задает прямую, проходящую через точку $P(2; 2)$. Такая прямая пересечет полуокружность $y = \sqrt{4 - x^2}$ в двух точках, если точка пересечения этой прямой с осью абсцисс лежит левее точки $B(-2; 0)$ (или совпадает с ней, см. рисунок).



Поэтому ответ: $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

3. Полезно привести несколько решений этой задачи, однако мы ограничимся одним из них. Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда число b является одним из значений функции $f(x) = 2|x| + |x - a|$. Множеством значений этой функции является промежуток $[c; +\infty)$, где c — это наименьшее из значений $f(0)$ и $f(a)$ этой функции. Так как $f(0) = |a|$, а $f(a) = 2|a|$, то $c = \min\{|a|, 2|a|\} = |a|$. Поэтому уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $b \geqslant |a|$.

4. Поскольку замена y на $-y$ не меняет систему, то вместе с решением (x_0, y_0) решением данной системы является пара $(x_0, -y_0)$. Следовательно, единственным решением этой системы должна быть пара $(x_0, 0)$. Подставив $y = 0$, получим, что $x^2 = 2$ и $x = -a$, откуда $a = \pm\sqrt{2}$. Однако ниоткуда не следует, что при всех найденных значениях a система действительно имеет единственное решение. Подставив $a = \sqrt{2}$, получим, что вместе с решением $(-\sqrt{2}\,, 0)$ система имеет еще два решения: $(0, \pm\sqrt{2}\,)$. Если $a = -\sqrt{2}$, то с одной стороны, $x \leqslant \sqrt{2}$, а с другой — наоборот, $x \geqslant \sqrt{2}$, поэтому пара $(\sqrt{2}\,, 0)$ является единственным решением данной системы. Таким образом, ответ: $a = -\sqrt{2}$. Геометрическая интерпретация системы и полученного ответа — на рисунке на следующей странице.



Вариант 4

1. Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup (3\sqrt{2}\,; +\infty)$. **2.** Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{2}\,; 0\right)$.
3. Ответ: при $a \geqslant |b|$. **4.** Ответ: $a = \sqrt{3}$.

Последовательности

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. а) $x_{30} = \left\{\frac{30}{4}\right\} = \left\{\frac{15}{2}\right\} = \frac{1}{2}$; $y_{30} = \left\{\frac{30!}{4}\right\} = 0$. б) Множество значений первой последовательности: $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$; множество значений второй последовательности: $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.
2. $x_{n+1} = n + 3 = x_n + 1$ и $x_1 = 3$; $y_{n+1} = \sqrt{n+2} = \sqrt{y_n^2 - 1 + 2} = \sqrt{y_n^2 + 1}$ и $y_1 = \sqrt{2}$.
3. а) $x_n = x_1 + 6(n-1) = 6n - 4$. б) $x_n = 3 + (-1)^n$.
4. а) Наибольшим членом последовательности является $x_1 = 5$, а наименьшего члена не существует. б) Наименьшим членом является $x_{10} = -100$, а наибольшего члена не существует. в) Наименьшим членом является $x_1 = 2$, наибольшего не существует. Заметим, что поведение данной последовательности зависит от ее начального члена, поэтому необходимо провести рассуждение. Так как $x_{n+1} - x_n = x_n - 1$, то по индукции доказывается, что если $x_1 > 1$, то последовательность является возрастающей.

Вариант 2

1. а) $x_{30} = \left\{\frac{30}{8}\right\} = \left\{\frac{15}{4}\right\} = \frac{3}{4}$; $y_{30} = \left\{\frac{30!}{8}\right\} = 0$. б) Множество значений первой последовательности: $\left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\}$; множество значений второй последовательности: $\left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$.

2. $x_{n+1} = x_n + 2$ и $x_1 = 3$; $y_{n+1} = \sqrt{y_n^2 + 1}$ и $y_1 = 1$.
3. а) $x_n = 8n - 6$. б) $x_n = 4 + 2 \cdot (-1)^n$.
4. а) Наибольшим членом последовательности является $x_1 = 6$, а наименьшего члена не существует. б) Наибольшим членом является $x_{15} = 225$, а наименьшего члена не существует. в) Наименьшим членом является $x_1 = 1$, наибольшего не существует.

Вариант 3

1. а) Так как $\frac{n}{n+2} < 1$, то $x_n < 3$. Решая неравенство $x_n \geqslant 1$, получим, что $n \geqslant 1$, что верно. б) $\frac{3n}{n+2} = 1$ при $n = 1$, $\frac{3n}{n+2} = 2$ при $n = 4$, а других целых значений эта последовательность принимать не может. в) Любое иррациональное число, например, $\sqrt{2}$.
2. а) $x_n = 2 \cdot 6^{n-1}$; б) $x_n = \frac{5 + (-1)^n}{2}$.
3. Составим таблицу нескольких первых значений членов данной последовательности

n	1	2	3	4
x_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$

Возникает предположение, что $x_n = \frac{n+1}{n}$. Докажем его по индукции: $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, что и требовалось.
4. а) Так как $x_n > n$, то наибольшего члена не существует. Так как $n + \frac{4}{n} \geqslant 2\sqrt{n \cdot \frac{4}{n}} = 4 = x_2$, то наименьшим членом данной последовательности является ее второй член. б) Так как $x_1 = -1$, а $x_n > 0$ при всех $n \geqslant 2$, то x_1 — наименьший член. Так как $x_{n+1} < x_n$ при всех $n \geqslant 2$, то $x_2 = \frac{1}{2}$ — наибольший член. в) Если $x_1 = c$, то $x_2 = 2c-1$, $x_3 = 4c-3$, $x_4 = 8c-7$. Возникает предположение, что $x_n = 2^{n-1}(c-1)+1$. По индукции: $x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2^n(c-1) + 2 - 1 = 2^n(c-1) + 1$. Поэтому при $c = 1$ последовательность постоянна. Если $c > 1$, то x_1 — ее наименьший член, а наибольшего не существует; если $c < 1$, то x_1 — наибольший член, а наименьшего не существует.

Вариант 4

1. б) $x_1 = 1$; $x_3 = 2$; $x_9 = 3$; в) $\sqrt{2}$.
2. а) $x_n = 2^{3n-2}$; б) $x_n = 3 + (-1)^n$.
3. $x_n = \frac{n}{n+1}$.

4. а) Наименьшим членом является $x_3 = 6$, наибольшего не существует. б) Наименьшим членом является $x_1 = -\frac{1}{2}$, наибольшим — $x_2 = 1$. в) Так как $x_n = (c+1)2^{n-1} - 1$, где $x_1 = c$, то при $c = -1$ последовательность постоянна, при $c > -1$ ее наименьшим членом является $x_1 = c$, а наибольшего члена не существует, при $c < -1$ ее наибольшим членом является $x_1 = c$, а наименьшего члена не существует.

Самостоятельная работа 9

Вариант 1

1. а) Так как $x_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right)$, то с увеличением n значение x_n также растет. Можно было проделать и формальное преобразование:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 0.$$

б) Поскольку $45^\circ < 72^\circ < 90^\circ$, то $a = \operatorname{tg} 72^\circ > 1$. Поэтому последовательность $x_n = a^n$ — возрастающая.
2. Нет, неверно. Пример: $x_n = n - 2$.
3. а) Неравенство $(n+1)^2 - 2a(n+1) > n^2 - 2an$ имеет место тогда и только тогда, когда $2n+1 > 2a$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. при $a < \frac{3}{2}$. Таким образом, ответ: $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. б) Поскольку $x_n = 2 + \frac{1-2a}{n+a}$, то при $a > \frac{1}{2}$ данная последовательность — возрастающая. Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
4. а) Да, периодическая; период равен 5. б) Эта последовательность является убывающей, а потому она непериодическая. в) Да, периодическая; период равен 7.

Вариант 2

1. а) $x_n = 2 + \frac{1}{n+2}$, а потому x_n убывает с ростом n. б) Так как $a = \operatorname{tg} 36^\circ \in (0; 1)$, то $x_n = a^n$ убывает.
2. Нет, неверно; пример: $x_n = n - 4$.
3. а) $a \in (0; 3)$. б) $a \in (0; 2)$.
4. а) Периодическая, период равен 9. б) Непериодическая. в) Периодическая, период равен 5.

Вариант 3

1. а) Так как $x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0$, то данная последовательность — возрастающая. б) Не является монотонной, поскольку

$x_1 = x_3 = 4$, а $x_2 = \dfrac{7}{2}$. в) Поскольку $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 2 > 0$ вне зависимости от значения x_n, то эта последовательность возрастает при любом начальном члене x_1.

2. а) $a > \dfrac{1}{2}$ (см. задачу 3б варианта 1). б) Неравенство $x_{n+1} > x_n$ равносильно неравенству $3n^2 + 3n + 1 > a$, которое верно для всех натуральных n при $a < 7$. Таким образом, ответ: $a \in (0; 7)$.

3. а) Так как $(n+5)^2 - n^2 = 10n + 25$, то числа $(n+5)^2$ и n^2 имеют одинаковые остатки при делении на 5. Таким образом, последовательность периодична и период равен 5. б) Посмотрим на значения первых членов этой последовательности:

n	1	2	3	4
x_n	1	0	4	4

Более того, при всех $n \geqslant 3$ остаток от деления n^2 на $n + 2$ равен 4 в силу тождества $n^2 = (n-2)(n+2) + 4$. Таким образом, данная последовательность непериодическая.

4. Ясно, что $x_1 \neq 3$. Ясно, что тогда и $x_n \neq 3$ при всех n. Данная последовательность постоянна, если $\dfrac{8 - 3x_n}{3 - x_n} = x_n$, откуда $x_n = 2$ или $x_n = 4$. Если $x_1 \neq 2; 3; 4$, то

$$x_{n+2} = 3 + \frac{1}{x_{n+1} - 3} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{x_n - 3}} = x_n.$$

В этом случае последовательность периодическая и ее период равен 2.

Вариант 4

1. а) Так как $x_{n+1} - x_n = 2 - \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$, то данная последовательность — возрастающая. б) Не является монотонной, поскольку $x_1 = 7$, $x_2 = 6{,}5$, а $x_3 = 7\dfrac{2}{3}$. в) Поскольку $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0$ вне зависимости от значения x_n, то эта последовательность возрастает при любом начальном члене x_1.

2. а) $a \in (0; 2)$. б) $a \in (0; 7)$.

3. а) Да, периодична; период равен 7. б) Нет, непериодична; она постоянна, начиная с номера 7.

4. Данная последовательность постоянна при $x_1 = 1; 3$. Если же $x_1 \neq 1; 2; 3$, то последовательность периодическая с периодом 2.

Самостоятельная работа 10

Вариант 1

1. Данная последовательность является возрастающей, поэтому она ограничена снизу. С другой стороны, $x_n \geqslant n-1$ при всех $n \geqslant 10$, значит, эта последовательность не ограничена сверху.

2. а) Так как $x_n = an$, то эта последовательность не ограничена. б) Если $n = 2^{15k-1}$, то $x_n = 2^k$, где k — произвольное натуральное число, а потому последовательность ограниченной не является. в) Очевидно, что $0 < x_n < 4$, значит, последовательность ограничена.

3. Конечно, если последовательность x_n не ограничена, то и последовательность y_n не ограничена. Однако, если $x_n = n$, то z_n — постоянная, а потому — ограниченная последовательность.

4. Ясно, что данная последовательность возрастает, а потому $x_1 = -\frac{1}{3}$ является ее наименьшим членом. Поскольку $x_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{2n+1}\right)$, то $x_n < \frac{1}{2}$, однако значение x_n может быть сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$. Поэтому ответ: отрезок $\left[-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Вариант 2

1. Данная последовательность является убывающей, поэтому она ограничена сверху. Поскольку $x_n \leqslant 20-n$, то она не является ограниченной снизу.

2. а) Ясно, что $1 \leqslant \sqrt[n]{13} \leqslant 13$, поэтому данная последовательность является ограниченной. б) Данная последовательность ограниченной не является. в) Данная последовательность линейна, $x_n = cn$, где $c > 0$. Очевидно, что она не ограничена.

3. Конечно, последовательность y_n не обязана быть ограниченной, для чего достаточно взять в качестве x_n постоянную и отличную от нуля последовательность. Так как $|z_n| \leqslant |x_n|$, то из ограниченности данной последовательности следует ограниченность последовательности z_n.

4. Данная последовательность убывает, при этом ее значения могут быть сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$. Ответ: $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$.

Вариант 3

1. Так как $x_1 = -1$, а все остальные члены этой последовательности положительны, то она ограничена снизу. Поскольку $x_n = \frac{n^2}{2n-3} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$ при $n \geqslant 2$, то эта последовательность не ограничена сверху.

2. Нет, неверно. Например, положим $x_n = n$, если число n нечетно, и $x_n = \dfrac{1}{n}$, если n четно. Рассмотрим постоянную последовательность $y_n = 1$. Тогда $z_n = n$ при четном n, поэтому последовательность z_n не ограничена.

3. Вычислим значения первых членов данной последовательности: $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Так как $3 > 2\sqrt{2}$, то $x_1 < x_2$. С другой стороны, так как $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$, то $x_2 > x_3$. Докажем, что $x_{n-1} > x_n$ при всех $n \geqslant 3$. Возведя в квадрат обе части неравенства $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} > \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$, избавившись от знаменателей, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим неравенство $n(n-1) > 4$, которое верно при всех $n \geqslant 3$. Конечно, можно было рассмотреть функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ и доказать, что на промежутке $[\sqrt{2}\,; +\infty)$ она является убывающей. Следовательно, все члены данной последовательности лежат в отрезке $\left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$. Осталось заметить, что $x_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому значения x_n могут быть сколь угодно малыми. Значит, отрезок $\left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$ и есть отрезок наименьшей длины, содержащий все члены этой последовательности.

4. Приведем два варианта рассуждения. В силу рекуррентной формулы для x_{n+1}, каждый следующий член последовательности является средним арифметическим для 1 и ее предыдущего члена, а потому все ее члены лежат в отрезке с концами в 1 и x_1. А можно написать явную формулу для значений x_n, для чего достаточно записать рекуррентное соотношение в виде $x_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2}(x_n - 1)$. Тогда $x_n - 1 = \dfrac{x_1 - 1}{2^{n-1}}$, поэтому $|x_n - 1| \leqslant |x_1 - 1|$.

Вариант 4

1. $x_n \geqslant x_1 = -\dfrac{2}{3}$, при этом $x_n \geqslant n$ при $n \geqslant 3$, откуда и следует, что эта последовательность не ограничена сверху.

2. Последовательность $x_n = -\dfrac{1}{n}$ возрастает и ограничена сверху, однако последовательность $y_n = -n$ не ограничена снизу.

3. Ответ: $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

4. Так как $x_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2}(x_n + 1)$, то $x_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2^n}(x_1 + 1)$, значит, данная последовательность ограничена.

Самостоятельная работа 11

Вариант 1

1. Имеем, $7 + 14 + \ldots + 1001 = 7(1 + 2 + \ldots + 143) = 7 \cdot \frac{143 \cdot 144}{2} =
= 7 \cdot 72 \cdot 143 = 72072$.

2. Имеем,

$$n+(n+1)+\ldots+(2n-1) = (1+2+\ldots+(2n-1))-(1+2+\ldots+(n-1)) = \\ = \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}\,.$$

3. Пусть $x_1+x_2+\ldots+x_n = S_n = n(2n+1)$. Тогда $x_1 = 3$, а если $n > 1$, то $x_n = S_n-S_{n-1} = n(2n+1)-(n-1)(2n-1) = 2n^2+n-2n^2+3n-1 = 4n-1$. При $n = 1$ формула также верна.

4. Ясно, что $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4-1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)$. Аналогично, $\frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$, и так далее до равенства $\frac{1}{28 \cdot 31} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31}\right)$. В результате получаем сумму

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{28} - \frac{1}{31}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{31}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{31} = \frac{10}{31}\,.$$

5. Воспользуемся равенством $x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})$. Домножив данную сумму на $3-2 = 1$, получим, что она равна $3^{11}-2^{11}$.

Вариант 2

1. Ответ: $9 \cdot 56 \cdot 113 = 56952$.

2. Ответ: $\frac{n(3n+1)}{2}$.

3. Ответ: $x_n = 4n-3$.

4. Рассуждая так же, как в предыдущем варианте, получим число $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{32} = \frac{5}{32}$.

5. Ответ: $4^{10} - 3^{10}$.

Вариант 3

1. Требуется определить все n, при которых сумма $2+7+\ldots+(5n-3)$ делится на 6. Преобразуем эту сумму следующим образом:

$$5(1 + 2 + \ldots + n) - 3n = \frac{5n(n+1)}{2} - 3n = \frac{5n^2-n}{2}\,.$$

Таким образом, следует найти все n, при которых число $n(5n-1)$ делится на 12. Составим таблицу остатков при делении на 12,

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n(5n-1) \pmod{12}$	0	4	6	6	4	0	6	10	0	0	10	6

из которой и получим ответ: $n \equiv 0; 5; 8; 9 \pmod{12}$.

2. Для наглядности составим таблицу, в которой запишем числа Фибоначчи с нечетными номерами, а строкой ниже — их суммы S_n.

n	1	3	5	7	9	11	13
F_n	1	2	5	13	34	89	233
S_n	1	3	8	21	55	144	377

В нижней строке располагаются числа Фибоначчи с четными номерами, таким образом, возникает предположение, что $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$. Докажем его по индукции,

$$F_1+F_3+\ldots+F_{2n+1} = F_1+F_3+\ldots+F_{2n-1}+F_{2n+1} = F_{2n}+F_{2n+1} = F_{2n+2},$$

что и требовалось.

3. Преобразовав данную сумму к виду:

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)},$$

мы и получаем, что она меньше, чем $\frac{1}{3}$.

4. Разобъем данную сумму на n сумм следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} \\ +3 + \ldots + 3^{n-1} \\ \ldots \\ +3^{n-1} \end{aligned}$$

Просуммировав стандартным образом каждую из них, получим сумму

$$\frac{3^n-1}{2} + \frac{3^n-3}{2} + \ldots + \frac{3^n-3^{n-1}}{2} = \frac{n \cdot 3^n}{2} - \frac{1}{2}(1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}) =$$
$$= \frac{n \cdot 3^n}{2} - \frac{3^n-1}{4} = \frac{(2n-1)3^n+1}{4}.$$

Вариант 4

1. Сумма $3 + 10 \ldots + (7n-4) = \frac{n(7n-1)}{2}$ делится на 6, если число $n(7n-1)$ делится на 12. Составив таблицу остатков, получим, что $n \equiv 0; 3; 4; 7 \pmod{12}$.

2. Справедливо равенство $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.
3. Данная сумма равна $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) < \frac{1}{6}$.
4. Ответ: $\frac{5^{n+1}(4n-1)+5}{16}$.

Самостоятельная работа 12

Вариант 1

1. Так как $20 = 2a_7 = a_3 + a_{11}$, то $a_7 = 10$.
2. Так как $b_3 = 4$, то $b_1b_2b_3b_4b_5 = b_3^5 = 2^{10} = 1024$.
3. По формуле искомая сумма равна $5(2^{11} - 2) = 10 \cdot 1023 = 10230$.
4. Сумма $b_1(1 + q + q^2)$ будет наименьшей, если $q = -\frac{1}{2}$.
5. а) Так как $a_1 = 1$ и $a_6 = 8$, то $d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{7}{5}$. Поэтому искомой арифметической прогрессией является последовательность $1, \frac{12}{5}, \frac{19}{5}, \frac{26}{5}, \frac{33}{5}, 8$. б) Так как $8 = b_7 = q^6 \cdot 1$, то $q = \pm\sqrt{2}$. Поэтому есть две геометрические прогрессии, а именно: $1, \pm\sqrt{2}, 2, \pm2\sqrt{2}, 4, \pm4\sqrt{2}, 8$.

Вариант 2

1. $a_6 = \frac{a_3 + a_9}{2} = 15$.
2. $b_1b_2 \ldots b_7 = b_4^7 = 128$.
3. Так как $b_1 = 3$ и $q = 2$, то $S_9 = 3(2^9 - 1) = 3 \cdot 511 = 1533$.
4. Ответ: $q = -\frac{1}{2}$.
5. а) Так как $d = \frac{8}{7}$, то ответ: $1, \frac{15}{7}, \frac{23}{7}, \frac{31}{7}, \frac{39}{7}, \frac{47}{7}, \frac{55}{7}, 9$. б) Ответ: две геометрические прогрессии: $1, \pm\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \pm3, 3\sqrt[3]{3}, \pm3\sqrt[3]{9}, 9$.

Вариант 3

1. Так как $a_2 + a_4 + a_8 + a_{10} = 4a_6$, то $a_6 = 4$, а $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = 11a_6 = 44$.
2. Обозначим разность прогрессии через x. Тогда $a_4a_7 + a_4a_8 + a_7a_8 = (2-x)(2+2x) + (2-x)(2+3x) + (2+2x)(2+3x) = x^2 + 16x + 12$, поэтому это значение минимально при $x = -8$.
3. Так как $b_6 = b_3q^3$, то $q^3 = 27$, откуда $q = 3$ и $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 1$. Поэтому $b_1 + b_2 + \ldots + b_6 = \frac{qb_6 - b_1}{2} = \frac{728}{2} = 364$.
4. а) По условию $b_1 = 2$. Если q — знаменатель прогрессии, то сумма ее первых n членов равна $\frac{2(q^n - 1)}{q - 1}$, что равно $3^n - 1$ при $q = 3$. Ответ: да, может.

б) По условию $b_1 = 3$, $b_1 + b_2 = 7$, откуда $b_2 = 4$. Далее, $b_1 + b_2 + b_3 = 15$, значит, $b_3 = 8$, однако числа $3, 4, 8$ геометрической прогрессии не образуют.

Можно рассуждать иначе. По условию $b_n = (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = 2^n$ при $n > 1$, поэтому эта последовательность будет геометрической прогрессией, если $b_1 = 2$, что противоречит условию.

5. По условию $a_1 = 64$, $a_2 = 58$, а потому $d = -6$. Так как $a_n = 64 - 6(n-1) = 70 - 6n$, то $a_n > 0$ при $n \leqslant 11$, поэтому наибольшей будет сумма первых одиннадцати членов этой прогрессии, равная

$$S_{11} = \frac{64 + 4}{2} \cdot 11 = 34 \cdot 11 = 374.$$

Вариант 4

1. Так как $4a_5 = 12$, то $a_5 = 3$, а сумма $S_9 = 9a_5 = 27$.

2. Если x — разность прогрессии, то выражение

$$a_3a_6 + a_3a_7 + a_6a_7 = (3-x)(3+2x) + (3-x)(3+3x) + (3+2x)(3+3x) = \\ = x^2 + 24x + 27$$

является минимальным при $x = -12$.

3. Так как $q^4 = \dfrac{b_6}{b_2} = 16$, то $q = \pm 2$. Если $q = 2$, то $b_1 = 2$, поэтому $b_1 + b_2 + \ldots + b_7 = 2 + 4 + \ldots + 128 = 254$. Если $q = -2$, то $b_1 = -2$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_7 = -2 + 4 + \ldots - 128 = -\dfrac{258}{3} = -86$.

4. Ответы: а) нет; б) да.

5. Поскольку $d = 4$, то $a_n = -35 + 4(n-1) = 4n - 39 < 0$ при $n \leqslant 9$. Поэтому наименьшей будет сумма $S_9 = \dfrac{-35 - 3}{2} \cdot 9 = -19 \cdot 9 = -171$.

Ответы к дополнительным упражнениям

По теме 1

1.1. 1) $f(1) = -1$; $f(x) = x-2$. 2) $f(1) = -1$; $f(x) = x-2$. 3) $f(1) = -\frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{x}{2} - 1$. 4) $f(1) = 0$; $f(x) = \frac{x-1}{2}$. 5) $f(1) = 1$; $f(x) = \frac{x+1}{2}$. 6) $f(1) = 0$; $f(x) = x^2 - 1$. 7) $f(1) = -2$; $f(x) = \frac{3}{x} - 5 = \frac{3-5x}{x}$. 8) $f(1)$ не определено; $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ при $x \neq 1$. **1.2.** $f(1+x) + g(1-x) = x$. **1.3.** а) $f(x+1) = 2x-1$, $f(1-x) = -2x-1$, потому получаем уравнение $2x - 1 = -2x - 1$, откуда $x = 0$. б) В этом случае получим уравнение $x^2 + 7x + 5 = x^2 - 7x + 5$, откуда $x = 0$. в) В данном случае уравнение $x^2 = (-x)^2$ справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

1.4. а) 1) $x = \frac{3}{2}$; 2) множество значений — промежуток $[-3; 5]$; 3) $a \in [-3; 5]$; 4) $a \in [-1; 3]$. б) 1) $x = 1$; 2) $[-2; 2]$; 3) $a \in [-2; 1) \cup \{2\}$; 4) $a \in (2; 3] \cup \{1\}$. в) 1) $x = 0; 1$; 2) $\left[\frac{7}{4}; 8\right]$; 3) $a \in \left\{\frac{7}{4}\right\} \cup (4; 8]$; 4) $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (2; 3]$. **1.5.** 1) Например, $f(x) = x$; эта же функция удовлетворяет и соотношениям (2) и (6). 3) Например, $f(x) = (x-1)^2$. 4) Например, $f(x) = x-1$. 5) Например, $f(x) = x^2$. *Комментарий.* Конечно, соотношение (5) есть определение четной функции, (6) — определение нечетной функции, соотношения (3) и (4) являются их обобщениями. **1.6.** $c = \frac{3}{2}$. **1.7.** 1) $(-\infty; 0) \cup \{1\}$. 2) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. 3) $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. 4) $a = \pm 1$.

По темам 2 и 3

2.1. Данная функция убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$. Так как: а) $\frac{1}{5} < \sqrt{2} < \sqrt{3}$, то $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$. б) $\frac{87}{88} < \frac{88}{89}$, значит, $-\frac{87}{88} > -\frac{88}{89}$, поэтому $f\left(-\frac{87}{88}\right) < f\left(-\frac{88}{89}\right)$.

2.2. Функция $f(x) = 103x^2 - 3x$ возрастает на промежутке $\left[\frac{3}{206}; +\infty\right)$. а) Поэтому, если $a > b > 1$, то $f(a) > f(b)$. б) Нет, неверно. Если $a = \frac{4}{206}$ и $b = \frac{2}{206}$, то $f(a) = f(b)$. **2.3.** 1) Если $f(x) = x$ и $g(x) = -2x$, то функция $h(x) = -x$ убывает. 2) В действительности, можно взять любую пару функций — возрастающую и убывающую, их разность всегда будет возрастающей функцией. 3) Например, можно взять $f(x) = 2^{2x}$ и $g(x) = 2^{-x}$. 4) Например, можно взять $f(x) = -2^{-2x}$ и $g(x) = 2^{-x}$. *Комментарий.* Показательные функции пока не изучались, задание можно упростить, говоря о функциях, заданных на некотором промежутке. **2.4.** Если $x_1 < x_2$, то по условию $f(x_1) < f(x_2)$. Поскольку эти значения неотрицательны, то $f^2(x_1) < f^2(x_2)$, что и означает, что функция $g(x) = f(x^2)$ — возрастающая. **2.5.** Наименьшим является произведение $1 \cdot 100 = 100$, наибольшим — $50 \cdot 51 = 2550$. **2.6.** По условию $xy = 8$, где $x, y > 0$. Поэтому $x + y = x + \frac{8}{x} \geqslant 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$, и равенство верно при $x = y = \sqrt{8}$. Наибольшего значения нет, сумма $x + \frac{8}{x} > x$ может быть сколь угодно большой. **2.7.** 1) Функция f_1 убывает на промежутке $(-\infty; -3]$ и возрастает на промежутке $[-3; +\infty)$. 2) Функция f_2 возрастает на всей своей области определения — промежутке $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. 3) Функция f_3 убывает на всей своей области определения — промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$. 4) Преобразуем выражение для функции f_4: $\frac{x-1}{2x+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2-3}{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(x+2)}$. Таким образом, эта функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$. 5) Так как $f_5(x) = -1 - \frac{7}{x-5}$, то эта функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 5)$ и $(5; +\infty)$. 6) Так как $f_6(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$, то эта функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. 7) Поскольку $f_7(x) = f_6(x^2)$, то по теореме о монотонности «сложной» функции данная функция убывает на промежутках $[0; \sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$, возрастает на промежутках $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}; 0]$. 8) Областью определения функции f_8 является отрезок $[1; 5]$. Эта функция возрастает на отрезке $[1; 3]$, убывает на отрезке $[3; 5]$. **2.8.** Пусть $-2 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 2$. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = 12x_2 - x_2^3 - 12x_1 + x_1^3 = 12(x_2 - x_1) - (x_2^3 - x_1^3) = \\ = (x_2 - x_1)(12 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2).$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, $x_1^2 \leqslant 4$, $x_1x_2 < 4$ и $x_2^2 \leqslant 4$, то $12 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 > 0$, поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, откуда и следует, что на данном отрезке эта функция — возрастающая. **2.9.** Например, такая «странная» функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

По темам 4 и 5

3.1. а) Нет, не лежат, так как $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$. б) Да, лежат на прямой $y = x+1$. **3.2.** 1) При $a = 1$ лежат на прямой $y = x + 1$. 2) При $a = -1$ лежат на прямой $y = x + 1$. 3) При $a = \frac{3}{2}$ лежат на прямой $y = 2x - 3$. 4) При $a = -\frac{7}{3}$ лежат на прямой $y = 2 - 3x$. **3.3.** 1) Квадратное уравнение имеет два решения, если его дискриминант положителен; в данном случае — при $a > -\frac{9}{4}$. 2) Уравнение $|x - 1| = a - 1$ имеет два решения, если $a - 1 > 0$, т. е. при $a > 1$. 3) При $a > 0$. 4) Полезно изобразить график $y = |x^2 - x - 1|$ и получить ответ: $a \in \{0\} \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. 5) Таких значений не существует, что очевидно из графика $y = |x - 2| - |x|$. 6) При $a > 1$. **3.4.** 1) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. 2) $[0; +\infty)$. 3) $[0; +\infty)$. 4) Число a входит в множество значений функции f_4, если имеет решение уравнение $\frac{x+1}{x^2} = a$, или $ax^2 - x - 1 = 0$, что имеет место, если $a = 0$ или $1 + 4a \geqslant 0$. Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **3.5.** По условию $E(f) = [-1; 2]$. 1) $E(g) = [-1; 2]$. 2) $E(g) = [-2; 1]$. 3) $E(g) = [-1; 2]$. 4) $E(g) = [-5; 1]$. 5) $E(g) = [0; 4]$. 6) Информации недостаточно, так как неизвестно множество значений функции f при $x \geqslant 0$. 7) $E(g) = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **3.6.** 1) $E(f_1) = [-20; +\infty)$. 2) $E(f_2) = [0; +\infty)$. 3) $E(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. 4) $E(f_4) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$. 5) $E(f_5) = [0; 2]$.

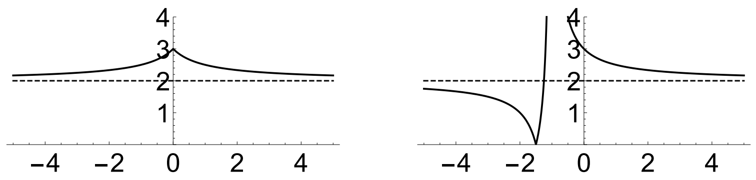
По темам 6–8

4.1. а) Так как $x^3 - 4x - 48 = (x - 4)(x^2 + 4x + 12)$, то $x = 4$. б) Так как функция $f(x) = 2^x + x$ возрастает, то данное уравнение имеет не более одного корня. Ясно, что $f(10) = 1034$, поэтому $x = 10$. в) В этом случае корень «не подобрать». Смысл задания состоит в том, чтобы найти приближенное значение корня данного уравнения: $x \approx 10$, так как эта функция «возрастает очень быстро». Например, $f(9) = 521$. Ответ с 5 верными знаками после запятой: $x = 9{,}98586$. **4.2.** а) $x = 7$. б) $x = \pm 3$. в) $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **4.3.** а) $x = -4; 1$. б) $x = 1$. **4.4.** 1) Да, является. 2) Да, является. 3) Нет, не является. 4) Да, является. 5) Нет, не является, поскольку, например, $g_5(0) = g_5(3) = g_5(-3)$ **4.5.** 1) Если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ либо $f(x) \leqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. 2) Если $f(x) > 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$ либо $f(x) < 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. 3) Функция $g_3(x)$ всегда будет возрастающей. 4) Если $f(x) \geqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$ либо $f(x) \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. **4.6.** а) Функция g_1 возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$, убывает на промежутке $[1; +\infty)$.

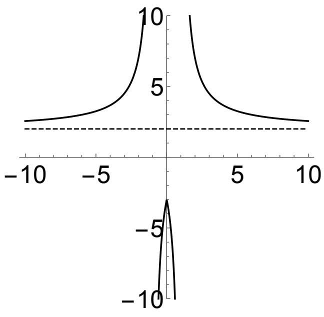
б) Функция g_2 возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-2]$ и $[0;2]$, убывает на каждом из промежутков $[-2;0]$ и $[2;+\infty)$. в) Функция g_3 возрастает на промежутке $(1;5]$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty;1)$ и $[5;+\infty)$. **4.7.** а) $g(x)=\dfrac{3x-1}{2}$. б) $g(x)=\dfrac{3x+1}{2}$.
4.8. а) Удобнее всего сделать замену $t=x-\dfrac{3}{2}$. Функция

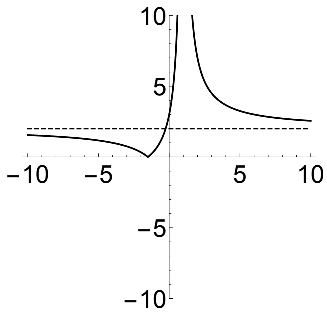
$$g(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)=\left(t^2-\frac{9}{4}\right)\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=t^4-\frac{5}{2}t^2+\frac{9}{16}$$

имеет то же самое множество значений, что и функция $f(x)$, а именно — промежуток $[-1;+\infty)$. б) При $a<-1$ уравнение не имеет решений; при $a=-1$ и $a>\dfrac{9}{16}$ уравнение имеет два решения; при $a=\dfrac{9}{16}$ уравнение имеет три решения; при $a\in\left(-1;\dfrac{9}{16}\right)$ уравнение имеет 4 решения.
4.9. Ответ: $(5;+\infty)$, так как $f(g(x))>f(x) \iff g(x)<x \iff x>5$.
4.10. Функция $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. 1) Множество значений функции f_1 совпадает с множеством значений функции f на промежутке $[0;+\infty)$ — промежутком $(2;3]$. Функция $f_1(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty;0]$ и убывает на промежутке $[0;+\infty)$. 2) Множеством значений функции f_2 является промежуток $[0;+\infty)$. Эта функция убывает на промежутках $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$ и $(-1;+\infty)$, возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right)$. На следующих рисунках изображены графики этих функций — f_1 (слева) и f_2 (справа).

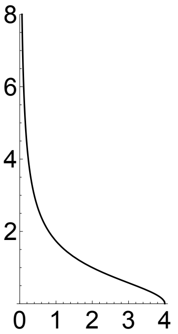


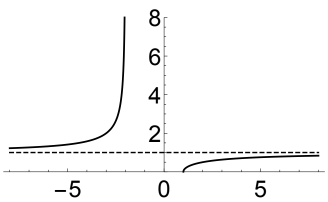
3) Множество значений функции f_3: $(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$. Эта функция убывает на промежутках $[0;1)$ и $(1;+\infty)$, возрастает на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(-1;0]$. 4) Множеством значений функции f_4 является промежуток $[0;+\infty)$. Эта функция убывает на промежутках $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$ и $(1;+\infty)$, возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{3}{2};1\right)$. На следующих рисунках изображены графики этих функций — f_3 (слева) и f_4 (справа).



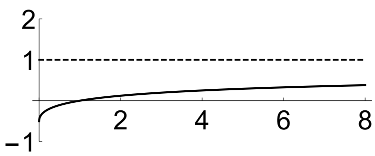


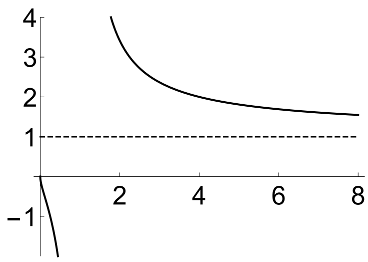
4.11. 1) Функция f_1 убывает на своей области определения — промежутке $(0;4]$. 2) Функция f_2 возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-2)$ и $[1;+\infty)$. На следующих рисунках изображены графики этих функций — f_1 (слева) и f_2 (справа).





3) Функция f_3 возрастает на своей области определения — промежутке $[0;+\infty)$. 4) Функция f_4 убывает на каждом из промежутков $[0;1)$ и $(1;+\infty)$. На следующих рисунках изображены графики этих функции — f_3 (слева) и f_4 (справа).





По теме 9

5.1. Покажем, что существует рациональное число a и иррациональное число b, такие, что $f(a) = f(b)$. Действительно, равенство $a\sqrt{2} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$ имеет место, если $a\sqrt{6} = b$, к примеру, при $a = 1$ и $b = \sqrt{6}$. Значит, данная функция не обратима. **5.2.** а) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция f задается формулой $f(x) = -(a + b)x + 2b$, на промежутке $[2; +\infty)$ — формулой $f(x) = (a+b)x-2b$. Если $a+b = 0$, то функция не обратима. Если $a+b \neq 0$, то на одном из этих промежутков функция убывает, на другом — возрастает. Так как на каждом из них она линейна, то данная функция не будет обратимой. б) На промежутке $[0; +\infty)$ функция f задается соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} (a-b)x + 2b, & \text{если } x \in [0; 2], \\ (a+b)x - 2b, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Поэтому функция будет обратима на $[0; +\infty)$, если $(a - b)(a + b) > 0$, т. е. при $|a| > |b|$. **5.3.** Предположим для определенности, что функция f является возрастающей, g — обратная ей функция. Пусть $y_1 < y_2$ — произвольные значения функции $f(x)$. Значит, $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Если мы предположим, что $x_1 \geqslant x_2$, то получим, что $y_1 \geqslant y_2$. Поэтому $x_1 = g(y_1) < x_2 = g(y_2)$, что и означает, что функция g является возрастающей. **5.4.** Ответ: $g(x) = x - 1$ при $x \leqslant 1$, $g(x) = 2x - 2$ при $x > 1$. **5.5.** 1) Ответ: $a \geqslant 0$. Действительно, если $a < 0$, то эта функция принимает значение 0 в трех разных точках. Если же $a \geqslant 0$, то эта функция является возрастающей, значит, обратимой. 2) Ответ: $a = 0$, так как если $a \neq 0$, то эта функция принимает значение 0 в двух разных точках. 3) Ответ: $a = 0$. Если $a < 0$, то функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, однако на каждом из них множеством ее значений является вся числовая прямая. Можно рассуждать проще: $f(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt[4]{-a}$. При $a > 0$ рассмотрим промежуток $(0; +\infty)$. Тогда

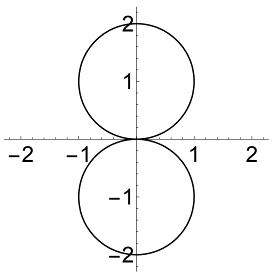
$$x^3 + \frac{a}{x} = x^3 + \frac{a}{3x} + \frac{a}{3x} + \frac{a}{3x} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^3}{27}},$$

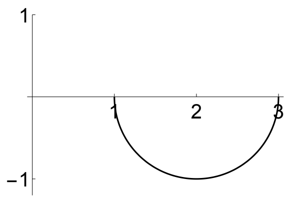
при этом равенство достигается при $x = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3}}$. Несложно показать, что эта функция убывает на $\left(0; \sqrt[4]{\dfrac{a}{3}}\,\right]$ и возрастает на $\left[\,\sqrt[4]{\dfrac{a}{3}}\,; +\infty\right)$, следовательно, она не является обратимой. 4) Ответ: $a \leqslant 0$. **5.6.** Ответ:

$g(x) = \dfrac{1-x}{2}$ при $x < -1$ и $g(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ при $x \geqslant -1$.
5.7. а) Как известно, если f возрастает и g — обратная ей функция, то $f(x) = g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = x$. Так как в данном случае $f(x) = g(x)$ при всех значениях x, то $f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$. б) Например, функция, заданная соотношениями $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. в) Да, может. Например, функция, заданная соотношениями $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. **5.8.** Ответы: 1) $g(10) = 2$. 2) $[1;2]$. 3) $x = 0$. 4) $[0;+\infty)$.

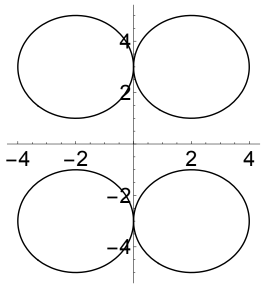
По темам 10–11

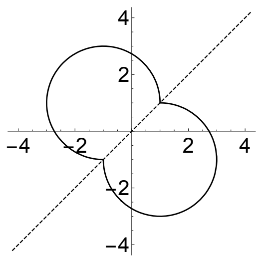
6.1. 1) Ответ на левом рисунке. 2) Ответ на правом рисунке.



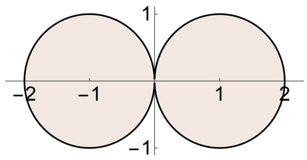


4) Искомое множество состоит из двух точек: $A(1;-1)$ и $B(1;3)$. 3) Ответ на левом рисунке. 5) Ответ на правом рисунке.

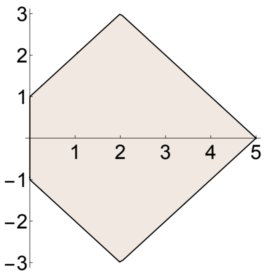


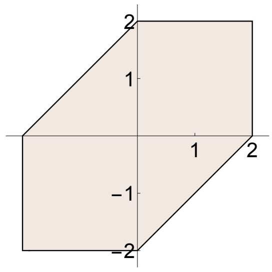


6.2. а) Данное множество является объединением двух единичных кругов (рисунок), следовательно, его площадь равна 2π.

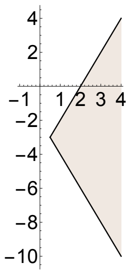


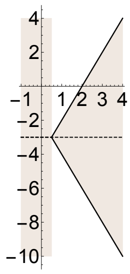
б) Так как данное множество есть образ при параллельном переносе множества, заданного неравенством $|y| + \big||x| - 2\big| \leqslant 3$, то достаточно найти площадь второго множества. Это множество симметрично относительно оси ординат, поэтому достаточно найти площадь его части, лежащей правее оси ординат. Площадь изображенного на левом рисунке множества равна 17, поэтому искомая площадь равна 34.





в) Ответ: 12 (правый рисунок выше). **6.3.** Ответы: к пункту (а) — на левом рисунке, к пункту (б) — на правом рисунке (прямые $x = \dfrac{1}{2}$ и $y = -3$ не входят в это множество).



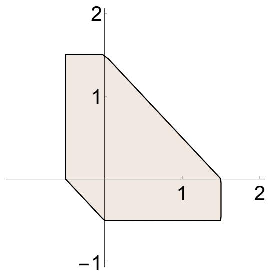


6.4. Ответ: $\left[-\dfrac{25}{4}\,; \dfrac{49}{4}\right]$. **6.5.** Так как $|x| + |y| + |1 - x - y| \geqslant 1$, то при $a < 1$ нет точек, удовлетворяющих данному неравенству. Если $a = 1$, то данное множество задается уравнением $|x| + |y| + |1 - x - y| = 1$.

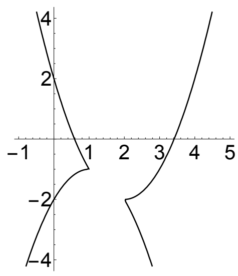
Так как $x + y + 1 - x - y = 1$, то

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ x + y \geqslant 1. \end{cases}$$

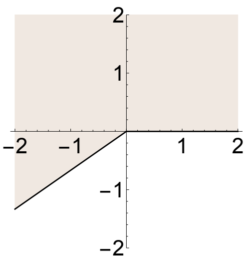
Множество, заданное первой системой неравенств, есть прямоугольный треугольник, вершинами которого является начало координат и точки $A(1;0)$ и $B(0;1)$. Вторая система неравенств решений, конечно, не имеет. При $a > 1$ данное неравенство задает шестиугольник. Например, на следующем рисунке изображено множество при $a = 2$.

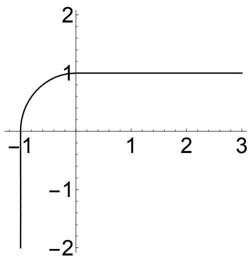


6.6. а) Ответ на рисунке.

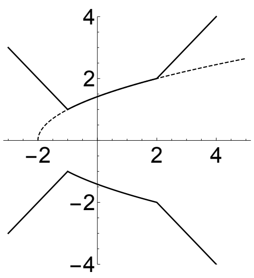


б) Требуется найти все значения a, при которых прямая $y = a$ пересекает изображенное выше множество в двух точках, у одной из которых абсцисса положительна, а у другой — отрицательна. По рисунку находим ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **6.7.** а) Ответ на левом рисунке.

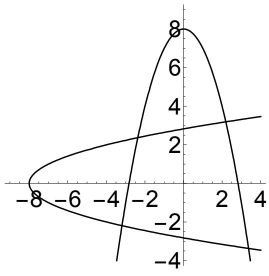




б) Искомое множество является объединением полос, заданных неравенствами $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. в) Ответ на правом рисунке. **6.8.** а) Данные графики симметричны относительно прямой $y = x$. б) Данные графики симметричны относительно оси ординат. в) Данные графики симметричны относительно прямой $x = -\dfrac{3}{2}$. **6.9.** Ответ на рисунке (пунктиром изображен график $y = \sqrt{x+2}$).



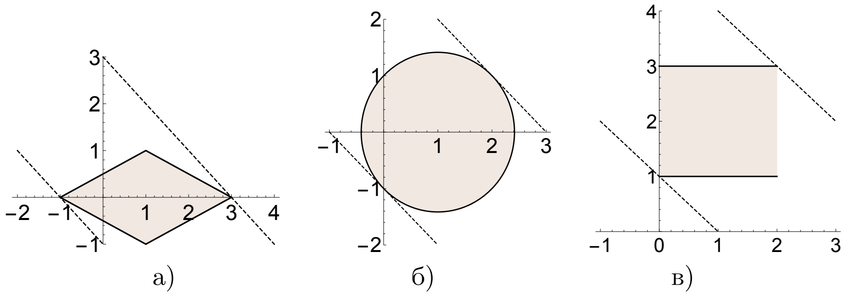
6.10. Ответы: а) точка $A(-1; 1)$; б) точка $B(-2; -2)$. **6.11.** а) Положим $f(x, y) = x^2 + y - 8$. Тогда $f(-y, -x) = y^2 - x - 8$. Известно, что множества, заданные уравнениями $f(x, y) = 0$ и $f(-y, -x) = 0$, симметричны относительно прямой $y = -x$. Осталось заметить, что уравнение $y^2 = x + 8$ равносильно уравнению $|y| = \sqrt{x+8}$. б) Рассмотрим графики $y = 8 - x^2$ и $y = \sqrt{x+8}$, или $y^2 = x + 8$, где $y \geqslant 0$. На следующем рисунке изображены множества, заданные уравнениями $y = 8 - x^2$ и $x = y^2 - 8$. Из предыдущего пункта следует, что две точки пересечения этих множеств лежат на прямой $y = -x$.



Теперь поступим следующим образом. Сложив уравнения $y = 8 - x^2$ и $x = y^2 - 8$, получим, что $x + y = y^2 - x^2$, откуда $y = -x$ или $y - x = 1$. В первом случае из уравнения $x^2 - x - 8 = 0$ следует, что $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$. Так как $x < 0$, то $x = \dfrac{1 - \sqrt{65}}{2}$. Во втором случае $x = \dfrac{-1 + \sqrt{29}}{2}$. Таким образом, получаем ответ: $x = \dfrac{1 - \sqrt{65}}{2}; \dfrac{-1 + \sqrt{29}}{2}$. **6.12.** а) По условию при всех x из области определения данной функции справедливы равенства $f(-x) = -f(x)$ и $f(2 - x) = -f(x)$. Следовательно, $f(-2 - x) = -f(2 + x) = f(-x) = -f(x)$, что и означает, что точка с координатами $(-1; 0)$ является центром симметрии графика этой функции. б) Покажем, что для любого целого числа k точка с координатами $(k; 0)$ является центром симметрии графика данной функции. Другими словами, покажем, что $f(2k - x) = -f(x)$. Заметим, что $f(2 + x) = -f(-x) = f(x)$. Поэтому $f(2k - x) = f(-x) = -f(x)$. С геометрической точки зрения, мы воспользовались тем, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

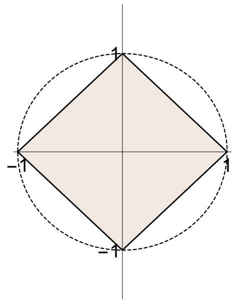
По теме 12

7.1. Ответы: а) $[-1; 3]$; б) $[-1; 3]$; в) $[1; 5]$. Эти ответы сразу получаются из следующих картинок, на которых изображены множества, заданные данными неравенствами.

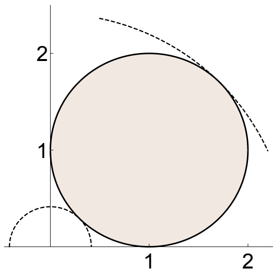


а) б) в)

7.2. Ответы: а) 1; б) $3+2\sqrt{2}$; в) 13. Два первых ответа сразу получаются из следующих картинок, на которых изображены множества, заданные данными неравенствами. Для последнего ответа надо взглянуть на картинку к пункту (в) предыдущей задачи.

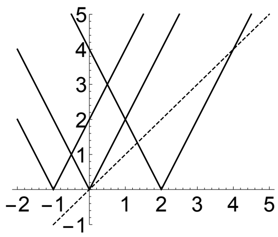


а)

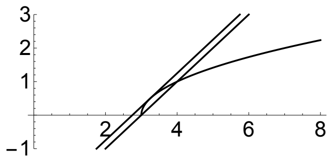


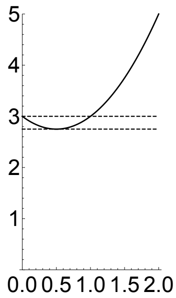
б)

7.3. Ответ: $a \geqslant -3$. **7.4.** Ответ: $a \in [-3;1]$. **7.5.** а) Ответ: $a=0$ (рисунок).

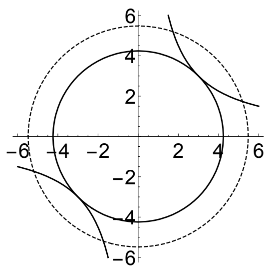


б) Ответ: $a=2\sqrt{2}$. **7.6.** а) Перепишем уравнение в виде $x+\sqrt{x-3}=a$. Выражение, стоящее в его левой части, задает возрастающую функцию, наименьшим значением которой является число 3. Поэтому при всех $a \geqslant 3$ данное уравнение имеет единственное решение, а при $a<3$ оно решений не имеет. б) Поскольку $x \geqslant 3$, то функция $f(x)=x^2+\sqrt{x-3}$ также является возрастающей. Поэтому при $a<9$ уравнение решений не имеет, а при $a \geqslant 9$ оно имеет единственное решение. в) Рассуждать можно несколькими способами; мы приведем два из них. На левом рисунке на следующей странице изображены: «полпараболы» $y=\sqrt{x-3}$, прямая $y=x-3$ и касательная к параболе, параллельная этой прямой. Ясно, что если $-a<-3$, или $a>3$, то данное уравнение имеет единственное решение. Касательная прямая задается уравнением $y = x - \dfrac{11}{4}$, поэтому при $a < \dfrac{11}{4}$ уравнение решений не имеет, при $a = \dfrac{11}{4}$ оно имеет единственное решение. Наконец, если $\dfrac{11}{4} < a < 3$, то данное уравнение имеет два решения.

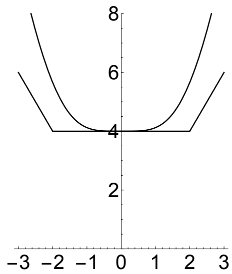




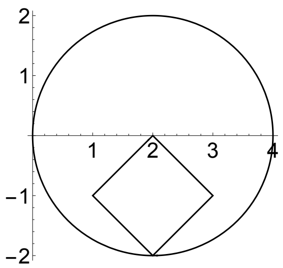
С другой стороны, сделаем замену $t = \sqrt{x-3}$, получив уравнение $t^2 - t + 3 = a$. Число решений исходного уравнения совпадает с числом неотрицательных решений полученного квадратного уравнения. На правом рисунке изображена часть параболы $y = x^2 - x + 3$. Ордината ее вершины равна $\dfrac{11}{4}$. Число неотрицательных решений легко определяется по этому рисунку. **7.7.** Подставив $y = \dfrac{9}{x}$ в первое уравнение системы, мы получим уравнение $x^4 - ax^2 + 81 = 0$. Так как $a > 0$, то уравнение $t^2 - at + 81 = 0$, если и имеет корни, то положительные. Если $a = 18$, то это уравнение имеет единственный корень, поэтому уравнение $x^4 - ax^2 + 81 = 0$, равно как и данная система, имеет два решения. Если $a > 18$, то система имеет четыре решения. Геометрическая интерпретация — на рисунке.

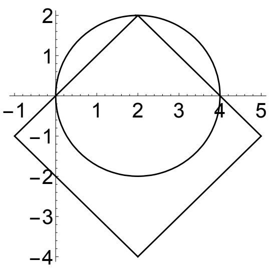


7.8. а) Ответ: $a = \pm 2$. Поскольку обе части данного уравнения не изменяются при замене $x \mapsto -x$, то единственным решением этого уравнения может быть только $x = 0$. Если $x = 0$, то $\sqrt{a^4} = 2|a|$, или $a^2 = 2|a|$, откуда $a = 0$ или $a = \pm 2$. В первом случае получаем уравнение $x^2 = 2|x|$, имеющее три корня $x = 0; \pm 2$. Если $a = \pm 2$, то мы получаем уравнение $\sqrt{x^4 + 16} = |x - 2| + |x + 2|$. Ясно, что $x = 0$ — его решение. Пусть $|x| \leqslant 2$ и $x \neq 0$. Тогда $\sqrt{x^4 + 16} > 4$, а $|x-2|+|x+2| = 4$, значит, на отрезке $[-2; 2]$ данное уравнение других решений не имеет. Пусть теперь $|x| > 2$. Тогда $|x - 2| + |x + 2| = 2|x|$, а $\sqrt{x^4 + 16} > x^2 > 2|x|$. Таким образом, в этом случае уравнение решений не имеет. Геометрическая интерпретация — на рисунке.

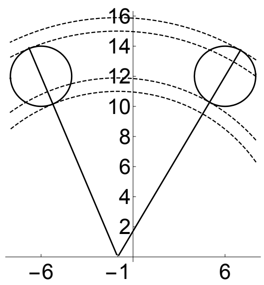


б) Каждое из уравнений системы задает множество, у которого прямая $x = 2$ является осью симметрии. Поэтому единственное решение системы должно иметь вид $(2, y)$. Из второго уравнения получаем, что тогда $y = \pm 2$. Если $y = -2$, то $a = 1$, если $y = 2$, то $a = 3$. В первом случае одна из вершин квадрата, заданного уравнением $|x-2|+|y+1| = 1$, лежит на окружности, а вторая — внутри нее (левый рисунок), поэтому система имеет единственное решение. Если же $a = 3$, то, кроме решения $(2, 2)$, данная система имеет еще два решения (правый рисунок). Ответ: $a = 1$.





в) Первое уравнение данной системы задает две окружности с радиусом 2 с центрами в точках $O_1(-6; 12)$ и $O_2(6; 12)$. Если $a > 0$, то второе уравнение задает окружность радиусом $\sqrt{a}$ с центром в точке $P(-1;0)$. Система имеет единственное решение, если окружность с центром в точке P касается одной из двух окружностей радиусом 2 и не пересекается с другой из них. Радиусом окружности с центром P, касающейся одной из двух окружностей, является одно из чисел $PO_1 \pm 2 = 11; 15$ или $PO_2 \pm 2 = \sqrt{193} \pm 2$. Поскольку $11 < \sqrt{193} - 2 < 15 < \sqrt{193} + 2$, то лишь окружности с радиусами 11 и $\sqrt{193} + 2$ имеют единственную точку пересечения с парой окружностей (рисунок).



Ответ: $a = 121; 197 + 4\sqrt{193}$.

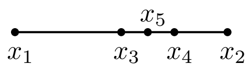
По теме 13

8.1. 1) $x_n = 2n - 1$ или $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 2$. 2) $x_n = 5n - 1$ или $x_1 = 4$, $x_{n+1} = x_n + 5$. 3) $x_n = 3^n$ или $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 3x_n$. 4) $x_n = n^2$ или $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (\sqrt{x_n} + 1)^2$. **8.2.** 1) $x_1 = -4$, $x_{n+1} = x_n + 1$. 2) $x_1 = 25$, $x_{n+1} = x_n + 25$. 3) $x_1 = 5$, $x_{n+1} = (n+1)x_n$. 4) $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \dfrac{5x_n}{x_n + 5}$. 5) $x_1 = 15$, $x_{n+1} = 5x_n$. 6) $x_1 = \sqrt{5}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 5}$.
8.3. 1) $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. 2) $x_n = 3n - 1$. 3) $x_n = 2(n-1)!$. 4) $x_n = 2^{3^{n-1}}$.
8.4. 1) $\{2, 4, 6, 8\}$. 2) $\{2, 4, 6, 8\}$. 3) $\{0, 1\}$. 4) $\{0, 1\}$. **8.5.** 1) $\{0, 1, 2, \ldots\}$. 2) $\{0, 1, 2, 3, 5, 10\}$. 3) $\left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}\right\}$. 4) $\left\{0, \frac{3}{7}, \frac{10}{k}\right\}$, $k \in \{11, 12, \ldots\}$. 5) $\left\{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}$. 6) $\left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}\right\}$.
8.6. 1) $\min x_n = x_1 = -3$, $\max x_n$ не существует. 2) $\max x_n = x_1 = -3$, $\min x_n$ не существует. 3) $\min x_n = x_1 = 7$, $\max x_n$ не существует. 4) $\min x_n = x_1 = -3$, $\max x_n$ не существует. 5) $\min x_n = x_1 = -3$, $\max x_n$ не существует. 6) $\min x_n = x_2 = -1$, $\max x_n = x_3 = 1$. 7) $\max x_n = x_1 = \dfrac{1}{7}$, $\min x_n$ не существует. 8) $\min x_n = x_1 = \dfrac{1}{7}$, $\max x_n$ не существует. 9) $\min x_n = x_1 = 7$, $\max x_n$ не существует. 10) $\min x_n = x_1 = -3$, $\max x_n$ не существует. 11) $\min x_n = x_2 = \dfrac{13}{2}$, $\max x_n$ не существует.

По теме 14

9.1. 1) Нет, поскольку если $x_1 = -k$, где $k > 0$, то $x_{k+1} \geqslant 0$. 2) Да, например, $x_n = -\dfrac{1}{n}$. 3) Да, например, $x_n = n - 2$. 4) Нет, так как если $x_k > 0$, то $x_n > 0$ при всех $n > k$. **9.2.** 1) Да, например, $x_n = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. 2) Да, см. предыдущий пример. 3) Нет, так как если $x_1 = k \in \mathbb{N}$, то $x_n \leqslant k$ при всех $n \in \mathbb{N}$. 4) Да, например, $x_n = 2 - n$. **9.3.** 1) Конечно, функция $f(x) = x^2 - 100x$ не является монотонной, но отсюда, вообще говоря, не следует, что данная последовательность не является монотонной. Однако из свойств этой функции следует, что $x_{49} > x_{50} < x_{51}$. 2) Аналогичным образом, наименьшим членом этой последовательности является $x_{10} = 20$. А $x_1 = x_{100} = 101 > 20$. 3) $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, а $x_3 = \dfrac{1}{3}$. 4) $x_1 = \dfrac{1}{2} < x_2 = 4$, но $x_{20} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^4 < 1$. Можно доказать, что эта последовательность, начиная с шестого члена, является убывающей. 5) $x_1 = x_{73} > 0$, но $x_{18} = 0$. **9.4.** 1) Функция $f(x) = x^2 - x$ возрастает на луче $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, поэтому $x_1 < x_2 < \ldots$ 2) Поскольку разность $x_{n+1} - x_n = 3n^2 + 3n - 2 \geqslant 4 > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. 3) Аналогичным образом, $x_{n+1} - x_n = 1 - \dfrac{2}{n(n+1)} \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, значит, эта последовательность — неубывающая. 4) Так как $x_n = \dfrac{2}{n+2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. 5) Так как $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{10}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^3 \leqslant \dfrac{8}{10} < 1$, то $x_{n+1} < x_n$. 6) Так как $0^\circ < \dfrac{45^\circ}{n+1} < \dfrac{45^\circ}{n} < 90^\circ$, то $\cos\dfrac{45^\circ}{n+1} > \cos\dfrac{45^\circ}{n}$. **9.5.** 1) Да, например, разность последовательностей $x_n = -n$ и $y_n = -2n$. 2) Да, тот же пример, что и выше. 3) Нет, сумма двух убывающих последовательностей всегда есть убывающая последовательность. 4) Да, например, отношение последовательностей $x_n = -2n^2$ и $y_n = -n$. **9.6.** Так как $x_{n+1} - x_n = 3(x_n - x_{n-1})$, то если $x_2 > x_1$, то данная последовательность возрастает, если $x_2 = x_1$, то она постоянна, если $x_2 < x_1$, то данная последовательность убывает. 1) Если $x_1 = -5$, то $x_2 = -14 < x_1$, поэтому последовательность — убывающая. 2) Если $x_1 \geqslant 0$, то $x_2 = 3a + 1 > a = x_1$. 3) $x_2 = 3a + 1 > x_1 = a$ при $a > -\dfrac{1}{2}$, поэтому последовательность — возрастающая. 4) Нет. Как следует из проведенного в начале рассуждения, данная последовательность монотонна при любом значении a. При $a = -\dfrac{1}{2}$ она постоянна. **9.7.** 1) Да, является; ее период $k = 360$. 2) Да, является; ее период $k = 5$. 3) Нет, не является; начиная с номера $n = 5$, она возрастает. 4) Да, является; ее период $k = 4$, поскольку $x_{n+4} =$

$\left\{\frac{3^{n+4}}{5}\right\} = \left\{\frac{81 \cdot 3^n}{5}\right\} = \left\{16 \cdot 3^n + \frac{3^n}{5}\right\} = \left\{\frac{3^n}{5}\right\} = x_n$. 5) Нет, не является, поскольку, если $x_{n+k} = x_n$, то $(n+k)\sqrt{5} - n\sqrt{5} = \ell$, где k, ℓ, n — натуральные числа. Но тогда $k\sqrt{5} = \ell$, что невозможно, так как число $\sqrt{5}$ иррациональное. 6) Да, при любом a. Если $x_1 = a$, то $x_2 = 3 - a$, а $x_3 = a$, и так далее. Если $a = \frac{3}{2}$, то последовательность постоянна, а при всех остальных значениях a она периодична с периодом 2. **9.8.** 1) Нет, неверно. Например, последовательность $x_n = n - 2$ возрастает, а $y_n = (n-2)^2$ монотонной не является. 2) Нет, неверно (см. предыдущий пример). 3) Нет, неверно. Например, $x_n = (-1)^n n$ не является монотонной, а последовательность $y_n = n^2$ возрастает. 4) Да, верно, однако период может измениться, Например, если $x_n = 1, 2, -1, -2, 1, 2, \ldots$, то $y_n = 1, 4, 1, 4, \ldots$ Конечно, если $x_{n+k} = x_n$, то и $y_{n+k} = y_n$. 5) Нет, неверно. Например, если y_n есть последовательность периода 2: $1, 4, 1, 4, \ldots$, то знаки в последовательности x_n, модули значений которой равны 1 или 2, мы можем выбрать так, что последовательность окажется непериодичной. К примеру, взять сначала один «плюс», затем два «минуса», потом три «плюса», четыре «минуса», и так далее. Построенная последовательность не будет периодической. **9.9.** С интуитивной точки зрения, ясно, что всякая такая последовательность непериодическая, но это надо еще аккуратно доказать. Проще всего рассуждать геометрически. По условию точка x_3 является серединой отрезка между точками x_1 и x_2, точка x_4 — серединой отрезка между x_2 и x_3, и так далее (рисунок).



Поэтому $x_k \neq x_1$ ни при каком значении k. Формально можно рассуждать следующим образом. Предположим, что $x_1 < x_2$. Тогда и $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} > x_1$. Так как $x_3, x_2 > x_1$, то $x_4 > x_1$, и так далее. Таким образом, $x_n > x_1$ при всех натуральных $n > 1$, откуда и следует, что данная последовательность непериодическая.

По теме 15

10.1. а) Да, является; если $x_n \leqslant a$, то $-x_n \geqslant -a$. б) Нет, не является; например, $x_n = -n$. в) Нет, не является; например, $x_n = -\frac{1}{n}$.
10.2. а) Да, будет. б) Да, будет. в) Нет, необязательно; например, при $x_n = 2^n$. **10.3.** 1)–3) $0 < x_n < 1$. 4) Поскольку $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$, то $0 < x_n < 1$. 5) Нетрудно показать, что $x_n \leqslant 2$. 6) Покажите, что

последовательность убывает при $n \geqslant 3$, при этом $x_1 < x_2 < x_3 = 1$, следовательно, $0 < x_n \leqslant 1$. **10.4.** 1) Так как $n^2 + 2 \leqslant 3n^2$, то $x_n \geqslant \frac{n}{3}$, поэтому данная последовательность не ограничена. 2) $x_n \geqslant n^{2/3}$. 3) Так как $\sqrt{6}-\sqrt{2} = a > 1$. 4) Так как $2^n \geqslant n^2$ при $n \geqslant 4$, то $x_n \geqslant n$ при $n \geqslant 4$. **10.5.** а) Да, верно, так как $x_n \leqslant x_1$. б) Нет, неверно; например, $x_n = -\frac{1}{n}$. в) Да, верно, поскольку периодическая последовательность принимает конечное число значений.

По теме 16

11.1. а) $1+2+\ldots+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$. б) $n+2n+\ldots+n^2 = n(1+2+\ldots+n) = \frac{n^2(n+1)}{2}$. в) $3^{10}+3^{11}+\ldots+3^{20} = 3^{10}(1+3+\ldots+3^{10}) = 3^{10}\cdot\frac{3^{11}-1}{2} = \frac{3^{21}-3^{10}}{2}$. **11.2.** а) $10+20+\ldots+1000 = 10(1+2+\ldots+100) = 10\cdot 101\cdot 50 = 50500$. б) $11 + 21 + \ldots + 1001 = 50500 + 100 = 50600$.
11.3. а) Сумма равна $(1+2+\ldots+99)-(1+2+\ldots+9) = 50\cdot 99-45 = 4905$. б) $1 + 2 + \ldots + 999 - (1 + 2 + \ldots + 99) = 494550$. **11.4.** Имеем а) $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \sqrt{n}$. б) $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$. **11.5.** 1) Если $S_n = 30$ при всех натуральных n, то $x_1 = 30$ и $x_n = 0$ при всех $n > 1$. 2) $x_n = 1$ при всех натуральных n. 3) $x_n = 4n-2$. 4) $x_n = 3n^2 - 3n$. 5) $x_1 = 31$, $x_n = 1$ при всех $n > 1$. 6) $x_n = 4n^3$.
11.6. а) $x_n = 3n-2$, $S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. б) $x_n = 4n-2$, $S_n = 2n^2$.

По темам 17 и 18

12.1. 1) $a_{16} = 4$. 2) $a_{10} = 8$. 3) $S_{10} = 31\cdot 5 = 155$. 4) $S_9 = 9a_5 = \frac{45}{2}$. 5) $S_{12} = 30$. 6) $d = -1$. **12.2.** 1) $b_{16} = \pm 1$. 2) $b_7b_8 = b_5b_{10} = 10$. 3) $S_8 = 6(3^8-1) = 39360$. 4) $b_1b_2\ldots b_{12} = (b_2b_{11})^6 = 64$. 5) $q = 2$.
12.3. Так как $a_4a_8 = (3-d)(3+3d) = 3(3+2d-d^2)$, то это произведение является максимальным при $d = 1$. **12.4.** Раскрыв скобки, получим равенство $b^2 = ac$. **12.5.** а) $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 12$, потому $a_2 = 4$. б) Так как $a_1a_2a_3 = 4(16-d^2) \leqslant 64$, то оно — наибольшее при $d = 0$. **12.6.** По условию $S_n = n^2$, тогда $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$, следовательно, $x_n = 2n-1$. И, как известно, $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$. **12.7.** Пусть числа x, y_1, z образуют арифметическую прогрессию, а числа x, y_2, z — геометрическую. Так как $y_1 = \frac{x+z}{2}$ и $y_2 = \pm\sqrt{xz}$, то $y_1 \geqslant y_2$. Следовательно, если эти прогрессии не постоянны, то больше сумма арифметической прогрессии. **12.8.** $d = 0$. **12.9.** а) Если x и z — первый и третий

члены одной арифметической прогрессии, y и t — первый и третий члены другой арифметической прогрессии, то отношение членов этих прогрессий будет арифметической прогрессией, если $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = 2\frac{x+z}{y+t}$. Так как $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} - 2\frac{x+z}{y+t} = \frac{(t-y)(tx-yz)}{ty(t+y)}$, то эти отношения будут образовывать арифметическую прогрессию, если вторая из прогрессий постоянна, либо в случае, если эти прогрессии пропорциональны. б) Конечно, не обязаны. **12.10.** а) Нет, не могут. Если $3 = 2 \cdot q^m$ и $4 = 2 \cdot q^k$, то $\left(\frac{3}{2}\right)^k = q^{mk} = 2^m$, откуда $3^k = 2^{m+k}$, что невозможно, так как числа m и k — натуральные. б) Нет, не могут. Рассуждая аналогичным образом, придем к равенству $3^k \cdot 2^{m-k} = 5^m$. **12.11.** Если $x^2 = y(2z-x)$, то $x^2 - yz = yz - yx$. **12.12.** Так как $x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1)$, то $x_n - 1 = (x_1 - 1)2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$, откуда $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 1$.