О. А. Иванов, Интегративные курсы в подготовке преподавателей для профильных школ, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1999, том 5, выпуск 4, 1227–1244

Интегративные курсы в подготовке преподавателей для профильных школ

О. А. ИВАНОВ
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: edu@math.lgu.spb.su

УДК 51:37

Ключевые слова: преподавание математики, подготовка учителей математики, работа с учащимися физико-математический школ и классов, пучки понятий, цепочки задач, визуализация, интегративный характер процесса обучения.

Аннотация

Обсуждается проблема подготовки в университетах преподавателей математики для работы в специализированных школах физико-математического профиля и в классах с углублённым изучением математики. Рассматриваются вопросы методики профильного изучения математики студентами высших педагогических учебных заведений.

Abstract

O. A. Ivanov, Integrated courses for education of special school teachers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 4, p. 1227–1244.

The problem of education of mathematics teachers in the universities is discussed, for working in special schools with advanced mathematics study. The questions of profile mathematics study for students in higher pedagogical institutes is considered.

«Я полагаю, что ни в каком учебном заведении образованным человеком стать нельзя. Но во всяком хорошо поставленном учебном заведении можно стать дисциплинированным человеком и приобрести навыки, которые пригодятся в будущем, когда человек вне стен учебного заведения станет образовывать сам себя.»

М. А. Булгаков, «Мольер»

Введение

В эпиграфе этой статьи автор хотел бы подчеркнуть слова «хорошо поставленном учебном заведении». На каких принципах должно быть построено

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 4, с. 1227–1244.

обучение (как оно должно быть поставлено), чтобы студенты (школьники) получили правильное представление о предмете и прочный фундамент для будущей работы (учебы)? Всюду в дальнейшем речь пойдёт о преподавании математики, однако высказываемые принципы, скорее всего, имеют общий характер и могут быть использованы при обучении другим предметам (наукам), по крайней мере естественно-научного профиля.

Проблема, обсуждаемая в этой статье, — как учить математике — вечна. В подтверждение этого приведем выдержку из некогда сформулированных рекомендаций к построению школьного курса математики:

— обеспечение преемственности между курсами математики средней и высшей школы, подлинное, а не формальное согласование программ;

— разделение курса математики в старших классах на несколько ветвей с различными программами (идея фуркации) с целью лучшего удовлетворения индивидуальных запросов учащихся, что должно способствовать воспитанию юных талантов, наилучшей подготовке к обучению в вузе и практической работе;

— введение в курс средней школы элементов теории вероятностей с приложениями к статистике.

Можете ли вы угадать, когда и где они были даны?*

Идея фуркации (профильной дифференциации), бывшая не так давно лишь предметом активного обсуждения в печати, в последнее десятилетие стала реализовываться практически. В России появилось много специализированных школ, гимназий, лицеев, однако в настоящее время не существует разработанных методик профильного обучения. Как составить программу и как должно быть построено обучение математике в классической гимназии; каково должно быть преподавание в математическом лицее, чтобы он не стал просто хорошими подготовительными курсами для поступления в высшие учебные заведения — эти вопросы пока далеки от решения. Во многих средних учебных заведениях преподавание ведется по авторским программам. Казалось бы, это огромный шаг вперед по сравнению с теми временами, когда в 99,9% школ была одна и та же программа по математике, и это можно было бы только приветствовать, однако предлагаемые программы часто не выдерживают никакой критики. К примеру, в некоторых из них предусматривается изложение аксиоматики Пеано в шестом классе или дробей в 6 классе за 6 часов занятий; изучение нормального распределения в теории вероятностей в 8 классе или формальных правил логического вывода в 5–6-х классах.

В связи с приведёнными примерами (взятыми из жизни!) уместно вспомнить слова А. Н. Колмогорова [10], который писал, что «учителю средней школы требуется более высокая квалификация, чем ассистенту, ведущему занятия в техническом вузе; здесь требуется более тонкое понимание вопроса».

В первых советских специализированных школах-интернатах, созданных в начале 60-х годов, работали университетские преподаватели-энтузиасты,

*На Всероссийских съездах преподавателей математики в начале этого века [12, с. 25–26].

имевшие огромный опыт кружковой работы. В работе других, в ту пору немногочисленных специализированных школ также участвовали профессиональные математики-преподаватели. К примеру, в известной далеко за пределами Петербурга (Ленинграда) школе № 239 (сейчас — физико-математическом лицее), созданной по инициативе Ленинградского отделения Математического института Академии Наук, в 60-е годы преподавал сотрудник ЛОМИ, известный геометр и выдающийся педагог В. А. Залгаллер. Достижения этих учебных заведений во многом определялись высокой математической и педагогической культурой работавших в них преподавателей.

Рост числа специализированных школ различного профиля резко высветил недостатки существующей системы подготовки учителей. Сейчас в России не хватает высококвалифицированных преподавателей математики, которые могли бы работать в профильных школах. Заметим, что с этой же проблемой сталкиваются и в других странах. Известно, что по образу советских школ-интернатов в 1980 году была основана Школа математики и науки штата Северная Каролина, а сейчас в США более двадцати таких школ. Аналогичные учебные заведения имеются в Израиле, Иордании, Китае, Корее, Сингапуре и на Филиппинах, планируется их открытие в Южной Америке и Австралии [22]*. Проблемы профильного обучения и подготовки высококвалифицированных преподавателей актуальны для многих стран, не случайно, что их обсуждению была посвящена работа специальных секций VIII Международного конгресса по математическому образованию, который состоялся в июле 1996 года.

Подготовка преподавателей в университетах

Говоря о подготовке преподавателей для средних учебных заведений в университетах, необходимо помнить слова великого Феликса Клейна [9], которые, хотя были сказаны в другую эпоху и в другой стране, не потеряли своей актуальности: «Вступая в высшую школу, молодой студент оказывается лицом к лицу с такими задачами, которые совершенно не напоминают ему того, чем он до сих пор занимался; естественно, что всё это он быстро и основательно забывает. Когда же он заканчивает университетское образование и становится преподавателем, то он вынужден в качестве учителя преподавать традиционную математику; не будучи в состоянии самостоятельно связать эту задачу с тем, что он слышал в высшей школе, он быстро усваивает старую традицию, университетское же образование остаётся у него только в виде более-менее приятного воспоминания, не оказывающего никакого влияния на его преподавание».

*Первая специализированная физико-математическая школа была создана в Венгрии ещё в начале 20 века и среди её выпускников были такие выдающиеся учёные, как Вигнер, фон Нейман, Пойа, Сциллард, Эрдеш.

В связи с приведённой цитатой отметим, что утверждённые в 1995 году Госкомвузом России Государственные требования к минимуму содержания и уровню профессиональной подготовки выпускника для получения дополнительной квалификации «преподаватель (средней школы)», предусматривают (кроме предметов психолого-педагогического цикла), дополнительной изучение методики преподавания предмета в объёме 50 часов аудиторных занятий, научных основ школьного курса в объёме 40 часов, 40-часового практикума для закрепления навыков по решению задач, а также прохождение педагогической практики.

Ясно, что за отводимое в соответствии с этими «Требованиями» время невозможно выполнить, к примеру, рекомендации по подготовке учителей математики, утверждённые правлением Американского математического общества ещё в 1960 году [21], в которых, наряду с необходимостью повышения чисто научной подготовки, отмечалось, что курсы методики преподавания для будущих педагогов должны обеспечить:

— знание разных вариантов построения курса математики, используемых в преподавании и имеющихся в литературе;

— владение техникой индуктивного и дедуктивного введения новых математических идей и оценку сравнительных достоинств и места той или иной системы изложения;

— знание имеющейся математической и методической литературы;

— владение основными идеями элементарной математики и возможностями реализации этих идей в практическом преподавании;

— понимание основных путей применения заложенных в курсе средней школы математических идей и развиваемого аппарата.

Многими авторами подчеркивалась необходимость специальной подготовки к преподаванию в классах с углублённым изучением математики (см., к примеру, [3]) и разработки методики профильного изучения математики студентами высших педагогических учебных заведений (Гусев В. А. [1, с. 14–18]). Эти задачи естественно ставить перед ведущими университетами России, которые обладают высококвалифицированными кадрами и имеют прочные связи со специализированными средними учебными заведениями. По поводу первой из них в работе [11] указано, что имеются два следующих подхода:

дополнительное углублённое изучение математики теми студентами педагогических вузов, которые готовятся к преподаванию в спецклассах,

и получение педагогических навыков студентами математических факультетов университетов.

Что касается второго подхода, то представляется необходимым усилить его формулировку (возможно, что именно она имеется в виду в [11]):

необходима целенаправленная подготовка преподавателей с университетским математическим образованием для работы в профильных средних учебных заведениях.

Однако без правильной методики и принципов подготовки невозможно дать будущим преподавателям и математическое образование университетского уровня, и знание элементарной математики, навыки её преподавания, а также психолого-педагогическую подготовку. Процесс подготовки преподавателей для профильных школ на математических факультетах классических университетов не может основываться на разработанной А. Г. Мордковичем концепции профессионально-педагогической направленности обучения (см., например, [1, с. 22–24]), которая, как подчеркивал сам её автор, применима к процессу подготовки преподавателя математики в педагогическом университете (институте).

Подчеркнём, что в дополнение к задачам подготовки учителя для массовой школы, выпускник педагогической специализации математического факультета университета должен:

— иметь опыт самостоятельного научного исследования,

— свободно владеть основами университетских базовых курсов и теоретическими основами школьного курса математики,

— быть в состоянии самостоятельно составить программу обучения,

— иметь навыки в составлении задач различного уровня сложности,

— иметь широкий кругозор в области внеклассной работы, знать литературу и уметь в ней ориентироваться,

— уметь адаптировать и популяризировать материал, избегая как вульгаризации, так и фактических ошибок,

— уметь импровизировать на уроках.

На математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета студенты-математики педагогической специализации приобретают необходимые для их будущей работы знания, умения и навыки в процессе изучения блока дисциплин «специальной математической и методической подготовки». В данной статье рассматриваются основные принципы построения как этого блока в целом, так и составляющих его отдельных курсов (автор не будет касаться вопросов психолого-педагогической подготовки).

Методика обучения будущих преподавателей основана на идеях Ф. Клейна и Д. Пойа [9, 13]. В соответствии с ними решение указанных выше задач следует искать, строя подготовку будущих преподавателей на основе курсов, соединяющих элементарную и «высшую» математику. В статье [18] Г. Г. Хамов называет лекционные курсы такого рода *интегративными* и отмечает, что обучение на их основе студентов педагогических вузов позволит:

— усилить мотивационный аспект обучения с помощью плавного перехода от элементарной математики к высшей, применения элементов высшей математики к решению задач элементарной математики, обоснования некоторых теоретических положений элементарной математики с точки зрения высшей;

— более эффективно осуществлять пропедевтическую линию в обучении математике, готовить студентов к сознательному усвоению разделов высшей математики;

— расширить возможности для реализации деятельностного подхода в обучении математике; сочетание элементарной математики и высшей будет стимулировать развитие творческих способностей студентов, увеличит их возможности для самостоятельных открытий;

— осуществить более плавный переход от школьного уровня строгости к вузовскому, используя промежуточный, если возможно, элементарный уровень, но более строгий, чем в школе.

Из дальнейшего изложения будет видно, что роль таких курсов при подготовке преподавателей в классических университетов несколько иная, чем та, о которой говорит Г. Г. Хамов. Здесь же отметим один очень важный момент. Не совсем понятно, что имеется в виду под промежуточным, но элементарным уровнем строгости. Конечно, математическая строгость — понятие относительное, но, к сожалению, слишком часто учителя понимают её превратно. Не сослаться на аксиому Архимеда при введении в школе функции $[x]$ не означает проявить нестрогость, а требовать от учащихся использования логических значков, фигурных и прямых скобок при решении уравнений — не значит добиваться строгого изложения этого решения. Рассмотрим следующий пример.

Задача 1. *Решить уравнение* $\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x}=5$.

Не приводя стандартных решений, в одном из которых приходится дважды возводить в квадрат, выписывая при этом дополнительные условия, а в другом — сделать замену и обойтись одним возведение в квадрат и исследованием (или проверкой), рассмотрим третье.

Ясно, что $x=2$ *является корнем этого уравнения. Поскольку функция, определяемая его левой частью, строго монотонна, других корней уравнение не имеет.*

Какая часть студентов педвузов (а также учителей) сочтёт это решение полным и строгим? Самое характерное качество математического рассуждения — полнота аргументации, и если учитель, к примеру, считает «очевидным», что уравнение $xy=x+y$ имеет только два целочисленных решения, то он делает очень серьёзную ошибку.

Интегративные лекционные курсы

К сожалению, великолепные книги [9, 13], с которыми должен быть знаком каждый преподаватель, не являются учебниками, однако содержащиеся в них педагогические идеи можно применить для построения конкретных курсов и подготовки учебных пособий.

Будем называть интегративными лекционные курсы, отличающихся от традиционных университетских следующими двумя основными особенностями:

• во-первых, изложение материала в них происходит не линейно (т. е. не строго последовательно), а группируется вокруг определённых понятий и идей (которые в дальнейшем будут называться *пучками понятий*).

• во-вторых, в этом изложении понятия и идеи элементарной (школьной и внешкольной) математики связываются с общими математическими идеями, знакомыми студентам по базовым университетским курсам.

С 1990 года автор читает для студентов 4–5 курсов педагогической специализации математико-механического факультета Петербургского государственного университета лекционный курс «Избранные главы элементарной математики» (объёмом 64 аудиторных часа) [5].

Очертим круг конкретных задач, понятий, математических и методических идей, связанных с методом математической индукции, изложение которого занимает всего две лекции ([5, глава 1]). Это: метод математической индукции и индуктивный способ рассуждения; метод математической индукции, аксиоматика Пеано и вполне упорядоченность множества натуральных чисел; аксиоматический метод описания математических объектов и его конкретная реализация на примере аккуратного определения арифметических операций и отношения порядка в $\mathbb{N}$; отношения эквивалентности и построение множества целых чисел; корректность определения понятия *число элементов множества*; неявное использование индукции; вопросы истории развития математики: чем обусловлено то, что аксиоматика Пеано и аксиоматика Гильберта евклидовой геометрии были введены в один и тот же исторический период. Кроме того, студенты знакомятся с конкретными задачами математических кружков, решение которых основано на индукционном методе рассуждения (см., к примеру, статью [15]).

Приведём пример задачи, в которой на первый взгляд не видно, что идея её решения связана с индукционным переходом (кстати, в её формулировке квадраты чисел можно заменить на значения в них функции f, обладающей некоторым свойством — каким?).

Задача 2. *Доказать, что если $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$, то*

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 \geqslant (a - b + c - d + e)^2.$$

Первый шаг — обобщение данной задачи на случай невозрастающего набора из $2n+1$ числа. Следующий — доказательство этого обобщения в простейшем случае $n = 1$, что делается при помощи простого разложения на множители. Последний шаг состоит в использовании доказанного в простейшем случае неравенства для получения индукционного перехода в общем.

Учитель должен отчетливо понимать различия между словами «метод математической индукции», «принцип математической индукции» и «индукционный метод рассуждения». Если мы пользуемся свойствами натурального ряда и представлением о «числе элементов множества», то доказательство «по индукции» есть удобная схема и ничего более. Можно, как делается в [15], говорить об *индукции вниз*, *ветвящейся индукции*, *методе спуска* как альтернативе индукции. Слова «принцип математической индукции» вообще недопустимы, если не имеется в виду одна из аксиом Пеано (которые можно изучать лишь в самой элитарной — в лучшем смысле этого слова — школьной аудитории). Говоря об индукционном способе рассуждения (понимаемом по Пойа), мы имеем в виду несравнимо более широкую общую идею анализа задачи и поиска её решения. Один из лучших примеров — известная задача о «*ханойской башне*», в решении которой собственно рассуждение по методу математической индукции занимает малую часть.

Интегративный характер данного лекционного курса определяется единством его

- конкретного содержания:
  — набор задач кружкового плана,
  — изложение оснований школьной математики,
  — изложение дополнительных разделов школьной и «высшей» математики;
- методического содержания:
  — связью идей и методов элементарной и «высшей» математики,
  — обобщающим повторением понятий и утверждений базовых математических курсов;
- и частной методики:
  — переходом от элементарных задач к вопросам «высшей» математики, связанными либо с обоснованиями, либо с обобщениями различных утверждений и задач, путем рассмотрения пучков понятий.

Следующий пример пучка понятий (взятый из другого курса) связан с площадью фигур и включает в себя понятия площади и объема, их аксиоматики и два подхода к определению; равносильность равносоставленности и равновеликости многоугольников и третью проблему Гильберта; формулу Грина для вычисления площадей плоских фигур, принцип Кавальери и теорему Фубини; лемму Цорна и существование базиса произвольного векторного пространства; инвариант (Дена); несоизмеримость и формулы удвоения для тригонометрических функций; неотрицательные аддитивные функции и «парадоксальные» аддитивные функции; определители и векторное произведение; движения плоскости и их координатное представление; свободные группы и их представления в группе вращений.

Изложение можно начать со следующих трёх элементарных задач.

Задача 3. *Найти площадь треугольника с вершинами в точках* $A(-1,-1)$, $B(1,1995)$ *и* $C(1,1996)$ *координатной плоскости.*

Задача 4. *Какова наименьшая площадь треугольника на координатной плоскости, координаты вершин которого целочисленны?*

Задача 5. *Доказать, что следующее число целое:*

$$\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{29})(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{29})(\sqrt{10}+\sqrt{29}-\sqrt{5})(\sqrt{29}+\sqrt{5}-\sqrt{10})}.$$

Формула

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right| \tag{1}$$

для площади треугольника, объединяющая эти задачи, без которой трудно решить вторую из них, является вполне элементарной. Кроме того (что полезно вспомнить студентам), она сразу следует из формулы для вычисления векторного произведения.

Совершенно неясно, каким путем её можно обобщить до формулы, выражающую площадь многоугольника через координаты его вершин. Однако если мы перепишем её в виде

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|, \tag{1*}$$

то кажется вполне правдоподобным, что искомое обобщение — это формула

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}\right| \tag{2}$$

(здесь для удобства записи $x_{n+1} = x_1$ и $y_{n+1} = y_1$).

Один из способов доказать это обобщение — проверить, что правая часть формулы (2) задаёт функцию, определённую на всех многоугольниках и удовлетворяющую аксиомам площади. Проверка инвариантности относительно движений связана с координатным представлением движений плоскости. Кстати, из формулы (2) при помощи предельного перехода можно получить формулу Грина, выражающую площадь плоской фигуры через интеграл по её границе.

Естественно возникающий вопрос — а как дать определение площади многоугольника? Подход, связанный с определением площади треугольника по стандартной формуле и распространение определения на произвольные многоугольники путем их разрезания на треугольники, натыкается на трудность доказательства корректности, т. е. доказательство независимости суммы площадей полученных треугольников от способа разрезания исходного многоугольника. При стандартном школьном определении площади (при помощи палетки) далеко не очевидна инвариантность относительно движений. Третий подход как раз связан с определением площади по формуле (2).

Равновеликость равносоставленных многоугольников (и многогранников) непосредственно следует из свойств площади (объёма). Равносоставленность равновеликих многоугольников доказывается не слишком сложно, хотя необходимо отметить, что мы не можем *a priori* дать оценку на число кусков, на которые необходимо разрезать данные многоугольники (даже в том случае, когда они — прямоугольники!).

Третья проблема Гильберта — неравносоставленность куба и правильного тетраэдра — интересна как с исторической точки зрения, поскольку это, пожалуй, единственная из проблем Гильберта, решение которой доступно студентам, так и с математической. Введённый Деном нетривиальный инвариант, связь со школьной математикой — иррациональность $\arccos\frac{1}{3}$, доказываемая через формулы удвоения, «парадоксальные» аддитивные функции на числовой прямой, доказательство существования которых опирается на лемму Цорна — использование всех этих настолько различных математических идей для доказательства неравносоставленности куба и тетраэдра очень поучительно.

Еще один сюжет, связанный с предыдущим — это парадокс Хаусдорфа–Банаха–Тарского (в описании соответствующего примера используется представление свободной группы с двумя образующими в группе вращений трехмерного пространства).

Отбор материала для интегративных курсов представляет достаточно сложную, но интересную задачу, которая придётся по вкусу многим профессиональным математикам-преподавателям. Разумеется, такие лекционные курсы, являясь надстройкой над базовыми математическими, не могут их заменить. Понятно также, что, к примеру, тему «Площадь и объём» можно просто включить в общий курс геометрии (и скорее всего, так и делают в педагогических институтах). Однако для последовательного изложения всего того, что должен знать учитель профильного среднего учебного заведения, не хватит никакого времени. Поэтому, даже не говоря о других очевидных преимуществах, построение курсов по интегративному принципу позволяет оптимизировать процесс обучения.

В заключение данного раздела отметим, что интегративные лекционные курсы естественно дополнить семинарами, построенными по аналогичному принципу. Хороший материал для их проведения дают статьи в журналах «Квант», «Quantum», «The American Mathematical Monthly» и «Mathematics Magazine».

О содержательной стороне школьных задач

В предыдущем разделе были даны примеры таких необходимых(!) знаний, которые будущие преподаватели почти никогда не смогут продемонстрировать своим ученикам, знаний, остающихся «за кадром» во время практической работы, однако очень важных для формирования у будущего учителя правильного представления о сути школьной математики. Здесь же речь пойдет о том, чему они должны научить, но что трудно проверить. Школа (и вуз) дают образование; что же это такое — школьное математическое образование? Как проверить уровень понимания математики ([7])? Математики всегда решают задачи, решают задачи и ученики; между ними есть множество различий, из которых хочется подчеркнуть одно. Решение математической задачи, доказательство теоремы, новое определение — все они почти всегда основаны на некоторой идее, поэтому первая и очень трудная задача учителя — научить понимать — а что же это такое *идея решения* (*доказательства, определения*).

Частые претензии к школьному курсу математики связаны с искусственностью (и безыдейностью) предлагаемых учащимся задач; как в свое время писал И. В. Арнольд: «Трудно себе представить, чем мог быть обусловлен интерес к получению ответа на вопрос задачи». Иногда даже говорят, что тренировка в решении тригонометрических уравнений нужна только составителям сборников тригонометрических задач. С другой стороны, от учащихся часто бывает скрыта, к примеру, связь между формулами сложения для тригонометрических функций, умножением комплексных чисел и преобразованиями (движениями) плоскости. А такое великое изобретение человеческого разума, как дифференциальное и интегральное исчисление, и вовсе предстаёт как красивые цветы на страницах гербария.

Как же сделать школьную математику более содержательной? Автор ни в коем случае не призывает к тому, чтобы свести преподавание математики к различным её приложениям, которые на школьном уровне часто тоже оказываются надуманными (вопиющие примеры приводит А. В. Шевкин в [19]), а имеет в виду математическую (или методическую) содержательность предлагаемых заданий. В рамках имеющейся «Программы ... » [14] (особенно в той её части, которая относится к специализированным школам) вполне можно сблизить преподавание математики с, говоря высоким стилем, методами самой этой науки. Индукция в широком смысле этого слова и дедуктивный метод рассуждения, интерпретации и переформулировки, аналогии и ассоциации — всё, что характерно для математического способа мышления (и для мышления вообще), может появиться при решении «почти школьных» задач [6]. Кроме того, задачи могут быть интересны по самому способу задания и форме решения (см. [2]).

Что же следует понимать под «математической содержательностью»? По этому поводу Г. В. Дорофеев [4] приводит слова Н. Бурбаки, что это есть возможность «внести идеи в вычисления»; добавим — или иногда обойтись без последних (см. задачу 1), или же внести идею в саму постановку задачи. Однако, как говорят на Востоке: «хоть сто раз скажи «халва», во рту слаще не станет» — поэтому перейдём к конкретным примерам.

Задача 6. *Найти все такие a, при которых уравнение* $\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$ *не имеет решений на отрезке* $[0; \pi]$.

Сделаем разумное обобщение задачи, что позволит нам записать её ответ в общем виде.

Для данного отображение $f\colon X \to Y$ множество всех таких a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ не имеет решений в множестве $E \subset X$, есть просто прообраз образа множества E, т. е. $f^{-1}(f(E))$. Заметим, что введение «дополнительной переменной» b при прямом решении задачи 6 через рассмотрение уравнений $f(x) = b$ и $f(a) = b$ по отдельности в точности соответствует нахождению вначале образа множества E, а затем прообраза этого образа.

Возможно, что учителю на уроке не стоит излагать все так, как написано в предыдущем абзаце, но уметь формулировать решение на таком языке для себя он обязан.

В решениях следующей задачи ясно проявляются различия между, так сказать, «математическим» и «школьным» подходами.

Задача 7. *Пусть* $f(x) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$. *Существует ли такая функция* g, *что* $f(x) = g(\cos 2x)$*?*

Первое решение, которое совершенно естественно для профессиональных математиков: нет, не существует, поскольку из существования такой функции следует, что функция f является π-периодической, что не имеет места. Рассуждения, предлагавшиеся учителями, были связаны с невозможностью однозначно выразить $\cos x$ через $\cos 2x$ и, вообще говоря, строгими не являлись.

Разница между двумя подходами достаточно глубока: в первом случае рассуждение идет на уровне понятий, их взаимосвязей и проявлений, во втором — на уровне формул и их преобразований.

Заметим, что самое короткое, можно сказать, «рафинированное» решение:

$$f(0) = 0 \neq f(\pi) = -1, \quad \text{а} \quad g(\cos 0) = g(\cos 2\pi),$$

неудовлетворительно с методической точки зрения, поскольку идея разнопериодичности частей предлагаемого равенства, лежащая в его основе, скрыта от учащихся.

Примеры, приводимые далее, взяты из вариантов выпускных экзаменов за школьный курс «Алгебры и начал анализа», проводившихся в последние годы в Петербурге (принципы построения этих вариантов мы обсудим чуть позже).

Задача 8. *Дана последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $a_1 = c > 0$, *а* $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$.

1. *Докажите, что при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнены неравенства* $\sqrt{2} \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 2$.

2. *Докажите, что последовательность* $\{a_n\}$ *убывает, и вычислите предел* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. *Пусть* $c = 1$. *Докажите, что все числа* a_n, $n \geqslant 2$, *иррациональные.*

4. *Пусть* $c = 2$. *Докажите, что* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = 2\pi$.

Без последних двух пунктов задача была бы скучной, как большинство традиционно решаемых в школе задач на вычисление пределов. У пытливого школьника (учителя, студента) особый интерес вызовет последний пункт — «при чём же здесь π?».

Утверждение пункта 2 непосредственно следует из утверждения пункта 1, решение которого совсем просто. Третий пункт задачи решается «обратным ходом индукции» (ср. [15]). Самый содержательный пункт последний.

Прежде чем излагать его формальное решение, заметим, что данное в задаче рекуррентное соотношение имеет ясный геометрический смысл. Именно: a_{n+1} есть длина хорды единичной окружности, опирающейся на дугу вдвое меньшей длины, чем та, на которую опирается хорда длины a_n. Из такого наблюдения сразу виден смысл последнего утверждения: поскольку $2^n a_n$ — это периметр вписанного в единичную окружность 2^n-угольника, то искомым пределом является длина окружности!

Формально: если $c = 1$, то $a_1 = 2\sin\frac{\pi}{2}$. Видно и нетрудно доказать по индукции, что $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$, значит,

$$2^n a_n = 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \to 2\pi, \quad n \to \infty.$$

Формулировка следующей задачи не так выигрышна. Формула $a^{2/3} + b^{2/3} = 1$, скорее всего, не вызовет у школьников никаких ассоциаций, однако она должна их вызвать у будущих (и работающих) учителей.

Задача 9. *Дана функция* $f(x) = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$.

1. *Пусть* $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. *Решите уравнение* $f(x) = 4$.

2. *При тех же значениях* a *и* b *решите неравенство* $f(x) \geqslant 0$.

3. *Пусть* $a = 1$. *Найдите все такие значения* b, *что данная функция убывает на интервале* $(0; \frac{\pi}{3})$.

4. *Пусть* $a > 0$, $b > 0$. *Докажите, что уравнение* $f(x) = 1$ *имеет ровно три решения на отрезке* $[0; 2\pi]$ *тогда и только тогда, когда* $a^{2/3} + b^{2/3} = 1$.

Первые два пункта задачи вполне стандартны. Для решения третьего полезно построить график функции f, после чего очевидно и решение пункта 4: данное уравнение имеет три решения, если прямая $y = 1$ проходит через точку экстремума данной функции. Более того, при $a, b > 0$ данное уравнение будет иметь на отрезке $[0; 2\pi]$ два, три или четыре решения в зависимости от того, будет ли число $a^{2/3} + b^{2/3}$ больше, равно или меньше единицы.

Уравнение $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ задаёт на плоскости кривую, называемую астроидой. Таким образом, данное уравнение имеет два, три или четыре решения в зависимости от того, лежит ли точка с координатами (a, b) вне астроиды, на самой астроиде или внутри неё. Этот результат не может быть случайным, но при чём же здесь астроида?

Рассмотрим следующую задачу: сколько существует касательных к астроиде, проходящих через точку с координатами (a, b)?

Нетрудно видеть, что точка M с координатами $(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0; 2\pi]$, лежит на астроиде, более того, любая точка на ней имеет такие координаты. Прямые вычисления показывают, что уравнение касательной к астроиде в точке M имеет вид

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1.$$

Поэтому число точек на астроиде, касательные в которых проходят через точку $A(a, b)$, равно числу решений данного уравнения на отрезке $[0; 2\pi]$. Каков геометрический смысл полученного нами ответа? Таких касательных две, если точка A лежит вне астроиды (или в её вершинах), четыре, если эта точка лежит внутри, и три, если она лежит на астроиде, но не совпадает с одной из её вершин!

Из рассмотренных только что примеров видно, что *критерий математической содержательности* учебного задания состоит в том, что *задание* *является математически содержательным, если разбору его решения и возникающих при этом разборе идей, понятий и фактов целесообразно посвятить одно-два занятия школьного факультатива.*

Например, в дополнение к тому, что уже было сказано по поводу задачи 8, при разборе её решения естественно возникают формулы для $\cos\frac{\pi}{2^n}$ и $\sin\frac{\pi}{2^n}$, задача о вычислении предела последовательности $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n квадратных корней), формула Виета, выражающая $\frac{\pi}{2}$ через бесконечное произведение квадратных корней, иррациональность почти всех значений косинусов и синусов углов, соизмеримых с π.

Если мы хотим составить экзаменационную работу, результаты которой показали бы степень «математической образованности» выпускников средней школы, то такая работа должна включать в себя, во-первых, задачи на проверку навыков использования стандартных методов решения и умения логически рассуждать, используя определения математических понятий. Во-вторых, желательно, чтобы некоторые задачи могли быть решены, кроме более-менее стандартного, и другим методом, быстрее и проще приводящим к цели. Этот метод может быть основан, к примеру, на такой общей идее, как перевод данной задачи на другой язык (от алгебры — к геометрии или анализу; и обратно). В-третьих, хотя неестественно включать в экзаменационный вариант задачи «олимпиадного» типа, однако в нём должны содержаться вопросы, требующие творческого подхода, решение которых основано на некоторой идее, подсказанной иногда самой формулировкой. Принятый в последние годы в Санкт-Петербурге «сюжетный» стиль построения вариантов позволяет учесть все эти соображения: скорее найдет решения тот, кто лучше понимает математику, тот, кто понял связи между отдельными пунктами данного сюжета.

Возвращаясь к основному вопросу данной статьи — подготовке преподавателей для профильных школ — следует подчеркнуть, что семинарские (практические) занятия со студентами, посвящённые решению и обсуждению решений таких задач, полностью соответствуют сформулированным в предыдущем разделе признакам интегративного курса. Более того, интегративный характер занятий усиливает их методическое содержание. Во-первых, результаты решения учеником (студентом), к примеру, задачи 8 показывают его уровень владения материалом: от применения типовых методов решения задач до творческого уровня, на котором учащийся способен сам предложить новую идею, необходимую для решения данной задачи. На этом пути можно решить проблему, которую ставит Г. Е. Саранцев в [16]: дать учителю измеритель, позволяющий фиксировать любой уровень усвоения учебного материала, отобразив его в соответствующих задачах, точнее, в цепочках взаимосвязанных задач. Во-вторых, студенты тем самым могут оценить свой уровень владения школьной математикой. Наконец, тематика таких занятий даёт благодатную почву для анализа различных стилей преподавания (см. [17]). Большая подборка разнообразных задач (сгруппированных по вариантам — учебным заданиям) имеется в подготовленном автором пособии [8].

Заключение. Интегративный характер специальной математической и методической подготовки

В процессе обучения будущего преподавателя огромное значения имеет отработка навыков решения стандартных школьных задач. При этом необходимо, чтобы стандартные схемы решений были поняты им во всех их деталях и использовались вполне осознанно. К примеру, учитель должен уметь моментально привести пример, показывающий, почему при решении неравенств при помощи замены нельзя просто отбросить корни вспомогательного уравнения, не принадлежащие области значений функции, осуществляющей эту замену. Как представляется автору, всего этого можно добиться, строя занятия при помощи идеи *визуализации*, используемой в следующих трёх своих различных формах:

— внутренняя визуализация, когда обучаемый должен провести необходимые в задаче преобразования «в уме»,

— визуализация ответа, связанная с графическим изображением условия задачи, что часто показывает качественную структуру ответа и упрощает процесс формального решения,

— визуализация ошибки, связанная с изображением на плоскости множеств, заданных уравнениями и неравенствами: ошибка, связанная с неравносильностью преобразований выражений, содержащих две переменные, видна гораздо лучше, чем при решении неравенств с одной переменной, она «бросается в глаза».

В процессе занятий, основанных на указанной идее, у студентов вырабатываются устойчивые навыки в решении типовых задач. Кроме этого, студенты получают навыки и в составлении задач (с заданной структурой ответа, определённой технической и логической сложности). Далее, умение проводить преобразования «в уме» (как у шахматистов — умение видеть на несколько ходов вперед) — качество, необходимое для решения более сложных задач. Еще одна сторона таких занятий состоит в выработке умения полностью сконцентрировать свое внимание; автор никогда не видел столько сосредоточенно думающих в абсолютной тишине лиц, как во время проведения контрольной работы по решению задач «в уме». Наконец, применение идеи визуализации помогает решить важную психологическую задачу. При обучении студентов решению школьных задач большую трудность представляют имеющиеся у них стереотипы; студенты решают «так, как их учили в школе», что не всегда делалось лучшим образом. К примеру, иногда студенты считают формально-логическую запись в виде цепочки систем и совокупностей, соединённых знаком равносильности (знаками импликаций), идеальной математической формой представления решения, хотя, как ясно каждому математику, такая форма записи, не добавляя никакой строгости, лишь делает само решение совершенно нечитаемым и трудно проверяемым; недаром же математические статьи всегда пишутся в виде связного текста. Применение идеи визуализации (преобразований, условий, ошибок) позволяет оторвать студентов от привычных для них схем, делая в итоге процесс обучения более продуктивным.

Из вышесказанного видно, что интегративный характер построения практикума по решению школьных задач, определяемый введённой идеей визуализации, позволяет оптимизировать процесс обучения. Теперь, для того чтобы сделать окончательные выводы, необходимо вспомнить один хорошо известный (хотя бы из книг Пойа) *принцип последовательных фаз*, заключающийся в том, что *фаза исследования должна предварять фазу словесного оформления и образования понятий, для того чтобы изученный материал влился в общий запас знаний, способствуя повышению интеллектуального уровня обучаемого.*

Например, для того чтобы студенты ясно поняли:

— смысл аксиоматики Пеано, её связь с методом математической индукции, вообще суть аксиоматического подхода в математике;

— единственность поля действительных чисел, роль аксиомы Архимеда, различные формулировки аксиомы полноты и различные модели этого поля, возможность другого — «нестандартного» — расширения поля рациональных чисел,

— на основе такого понимания могли в дальнейшем строить, избегая вульгаризации и прямых ошибок, доступный учащимся курс, т. е. для того чтобы понятие числа легло на прочный теоретический фундамент и вошло в систему знаний будущих преподавателей,

данные вопросы необходимо, в соответствии с принципом последовательных фаз, рассматривать на старших курсах. При изложении этого материала необходимо давать студентам как частные методики введения этих понятия, так и демонстрировать те места в школьном курсе математики, в которых использование аксиом происходит неявным образом. Тем самым мы приходим к необходимости построения интегративного курса; что касается определения множества натуральных чисел, то он должен содержать:

— формально-логическое изложение аксиоматического определения этого множества, строгое определение арифметических операций на нём, указания на объективную необходимость таких построений,

— примеры традиционного использования метода математической индукции, включая методику его использование в неявном виде,

— индуктивные методы поиска решений задач,

— постоянные ссылки на метод математической индукции (и подчеркивание его необходимости) в других разделах курса.

В заключение подчеркнем важность исследования и разработки таких введённых выше идей, как пучки понятий, цепочки задач, визуализация, интегративный характер процесса обучения.

В статье профессора Кембриджского университета К. Ратвена [20] обсуждается одна идея, предложенная министерством образования Великобритании. В соответствии с ней предполагалось готовить будущих учителей преимущественно — даже исключительно — в школах, возложив задачу по их подготовке (и ответственность за неё) на практикующих учителей. По этому поводу К. Ратвен приводит результаты опросов, проводившихся во французских школах: «В основной своей массе учителя считают, что нет никакого верного пути готовить к трудной учительской стезе, что учиться придётся уже во время непосредственной работы с классом, что опыт очень трудно передать, что они не могут предложить никаких рецептов и сами не знают, почему они добиваются успехов при работе с одним классом и только неудач — с другим. Всё, что они могут сделать — это разрешить студентам присутствовать на их уроках, которым они (учителя) не могут дать никакого теоретического обоснования или же предложить некоторую общую модель обучения». В связи с этими результатами в [20] автор обращает внимание на различные формы профессиональных знаний и анализирует, в какой степени каждую из них можно получить на основе такого «внутришкольного обучения».

Последние исследования выделяют следующие формы таких знаний (в связи с отсутствием адекватных русских терминов приведены также оригинальные названия): интуитивный (несформулированный) опыт (tacit expertise — unarticulated knowledge), который имеет каждый работающий учитель; прагматическое (практическое) знание (pragmatic wisdom) — то, что обычно содержится в различных методических пособиях; и, наконец, научное знание (grounded science).

Для разработок методик обучения чрезвычайно важна именно последняя форма. Ценность введённых в данной статье понятий состоит в том, что хотя они и не являются педагогическими категориями, тем не менее их использование будет способствовать развитию научного знания.

Литература

[1] Международная конференция «Подготовка преподавателя математики и информатики». Тезисы докладов. — М.: МПГУ, 1994.

[2] И. В. Арнольд. О задачах по арифметике // Математика в школе. — 1995. — № 5. — С. 2–6.

[3] Л. С. Атанасян, Т. А. Дулалаева, Г. Н. Линькова. О подготовке студентов к преподаванию в классах с углублённым изучением математики // Математика в школе. — 1991. — № 4. — С. 9.

[4] Г. В. Дорофеев. Значимость в школьном курсе темы «Многочлены с одной переменной» // Математика в школе. — 1995. — № 4. — С. 42–45.

[5] О. А. Иванов. Избранные главы элементарной математики. — СПб: СПбГУ, 1995.

[6] О. А. Иванов. Умеете ли вы решать «почти школьные» задачи // Квант. — 1995. — № 6. — С. 41–43.

[7] O. Ivanov. How to test understanding of mathematics // Techn. in Math. Teaching, pre-conf.proc. — University of Birmingham, 1993. — P. 531.

[8] О. А. Иванов. Практикум по элементарной математике: алгебро-аналитические методы. — В печати в изд-ве СПбГУ.

[9] Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. — М.: Наука, 1987.

[10] А. Н. Колмогоров. О работе вузов со школьниками // Математика в школе. — 1995. — № 2. — С. 46–48.

[11] И. И. Мельников, С. Н. Олехник, М. К. Потапов, И. Н. Сергеев. Подготовка преподавателей математики для специализированных классов. — 1995.

[12] Н. В. Метельский. Дидактика математики. — Минск: БГУ, 1975.

[13] Д. Пойа. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970.

[14] Программы общеобразовательных учреждений. Математика. — М.: Просвещение, 1994.

[15] И. С. Рубанов. Как обучать методу математической индукции? // Математика в школе. — 1995. — № 6. — С. 29–35; 1996. — № 1. — С. 14–20.

[16] Г. И. Саранцев. Гуманизация образования и актуальные проблемы методики преподавания математики // Математика в школе. — 1995. — № 5. — С. 36–39.

[17] Е. Е. Семенов, И. Е. Зюкина. Стиль преподавания и подготовка учителей математики // Математика в школе. — 1995. — № 2. — С. 48–50.

[18] Г. Г. Хамов. В педвузах нужны интегративные математические курсы // Математика в школе. — 1993. — № 3. — С. 38–39.

[19] А. В. Шевкин. Как не надо обновлять тематику школьных задач // Математика в школе. — 1995. — № 2. — С. 51–53.

[20] K. Ruthen. Pedagogical knowledge and the training of mathematics teachers // Mathematical Education Review. — 1993. — No. 3. — P. 1–10.

[21] The American Mathematical Monthly. — 1960. — V. 67. — P. 982–991.

[22] B. Vogeli. Educating the mathematically and scientifically talented: A Worldwide Panorama. — В печати.

Статья поступила в редакцию в октябре 1996 г.