# Теоретические основы построения системы математической и методической подготовки преподавателей профильных школ

О. А. Иванов

# Предисловие

Данная книга посвящена проблеме соотношения предметной, фундаментальной и методической подготовки будущего преподавателя математики профильной школы, решение которой является необходимой предпосылкой для построения учебных планов и программ обучения. В педагогической литературе имеются различные подходы решения этой проблемы применительно к подготовке преподавателя базовой школы в педагогических университетах и институтах. Один из них реализован в разработанной А. Г. Мордковичем [38–40] концепции профессионально-педагогической направленности обучения, суть которой, коротко говоря, состоит в построении подготовки (в том числе и фундаментальной математической) будущего учителя через призму необходимых ему профессиональных знаний, умений и навыков (см. также [59]). Однако со времени опубликования этой концепции (в конце 80-х гг.) в системе среднего образования в России произошли качественные изменения, связанные с внедрением в практику работы российской школы понятия (профильной и уровневой) дифференциации. Рост числа профильных школ резко высветил недостатки существующей системы подготовки учителей [86].

Многими авторами подчеркивалась необходимость специальной подготовки к преподаванию в классах с углубленным изучением математики (см., к примеру, [1, 6]), а также необходимость разработки методики профильного изучения математики студентами высших педагогических учебных заведений [14, 35]. В работе [36] указано, что возможно: а) дополнительное углубленное изучение математики теми студентами педагогических вузов, которые готовятся к преподаванию в спецклассах, и б) получение педагогических навыков студентами математических факультетов университетов. Что касается второго подхода, то представляется необходимым усилить его формулировку:

необходима целенаправленная подготовка преподавателей с университетским математическим образованием для работы в профильных средних учебных заведениях.

Подготовка таких преподавателей является задачей ведущих университетов России, обладающих высококвалифицированными кадрами и тесно связанных со специализированными средними учебными заведениями, а для ее решения необходима основанная на современных методических разработках и адекватная ее сложности программа обучения. Сложность этой задачи также связана с тем, что работа в профильных школах требует такого уровня, на котором "учитель самостоятельно проектирует свою методическую систему обучения учащихся, исходя из общих целевых установок и знания познавательных способностей ребят" [37].

Как показано в главе 1 данной книги, посвященной анализу современного состояния основной проблемы, те принципы, на которых основана концепция ППНО, не дают возможности для построения программы обучения, обеспечивающей достижение выпускником высокого уровня методической подготовки, необходимого для успешной работы в профильных средних учебных заведениях. Целью данного исследования является разработка основных педагогических положений, определяющих концепцию специальной математической и методической подготовки преподавателей на математических факультетах (классических) университетов, на пути совмещения фундаментальной и научно-исследовательской подготовки студентов-педагогов математических факультетов с их профессионально-педагогической подготовкой.

Теоретический анализ основной задачи начинается с рассмотрения в §2.1 понятия профессионального педагогического опыта [34]. Далее, в §2.2 вводится понятие интегративного подхода к построению системы специальной математической и методической подготовки и необходимые для его формулировки принципы. Сам термин — 'интегративность' — использовался ранее в литературе [37, 52], однако более как метафора, чем как понятие педагогики математики. В качестве следствий введенных принципов получены конкретные методические рекомендации к построению отдельных учебных дисциплин соответствующего блока. В частности, материал раздела 2.2.1 важен для понимания основных педагогических идей книги [23], а в разделе 2.2.2 даны конкретные методики, которые могут быть использованы для построения практикумов по решению задач (см. [24–25]).

# Глава 1

# Некоторые вопросы теории и практики обучения математике и ее преподаванию

## 1.1 Дифференциация в обучении математике

Дифференциация обучения в средней школе (в том числе — обучения математике) является одним из путей решения проблемы индивидуализации обучения, создания наилучших условий для развития и максимальной реализации склонностей и способностей учащегося в настоящем и будущем. В данном разделе будет дан обзор возможных схем осуществления дифференциации в российской средней школе и, как следствие, новых задач в подготовке преподавателей в высших педагогических учебных заведениях. В качестве введения приведем цитату из заключительного абзаца статьи [18]: "... для практической реализации идеи дифференциации в обучении математике требуется серьезная перестройка всей методической работы. Необходимо создать разноуровневые и профильные программы, учебно-методическое обеспечение, направленное на организацию дифференцированного обучения на уроках, а также на групповых и индивидуальных занятиях с учащимися разных способностей и разного уровня обученности, и т.д.” Заметим, что эта задача и в настоящий момент далека от решения. Принципиальная схема осуществления дифференциации школьного обучения математике, описываемая в статье [18], состоит в следующем. В основной школе (I–IX классы) предполагается, в основном, осуществление *уровневой дифференциации*: по одним и тем же программам и учебникам учащиеся достигают различных конечных целей в соответствии с их возможностями и склонностями. При этом предполагается, что все учащиеся должны достичь фиксированного уровня обязательной подготовки. Индивидуализацию обучения в старших классах (X-XI) средней школы предлагается осуществить главным образом путем предоставления учащимся возможности получить образование по разным учебным планам и программам, т.е. путем *профильной дифференциации* (или *дифференциации по содержанию*) на базе *фуркации*[1].

Во-первых, оба вида дифференциации — уровневая и профильная — существуют и взаимно дополняют друг друга на всех ступенях школьного математического образования, но в разном удельном весе. Авторы отмечают, что ранее “сущность дифференциации состояла в поиске приемов и способов обучения, которые индивидуальными путями вели бы всех школьников к одинаковому овладению программой. А эта задача не всегда разрешима”. Принципиальное отличие нового подхода состоит в явном выделении уровня обязательной подготовки и формирования на этой основе повышенных уровней овладения материалом. Достижение обязательных результатов становится при этом тем объективным критерием, на основе которого определяется направление его дальнейшей работы по овладению материалом. Принцип выделения обязательного уровня как основы дифференциации — характерная черта ее осуществления в мировом опыте; укажем, к примеру, выделение конкретных “целей достижения” в национальных программах Великобритании.

Одно из условий эффективности осуществления уровневой дифференциации состоит в том, что каждый ученик должен пройти полноценное обучение, в частности, иметь на руках учебник, в котором были бы предусмотрены (и явно выделены) все уровни усвоения материала.

Дифференциация на старшей ступени осуществляется через кур-

[1] Фуркация — построение учебного плана по уклонам (гуманитарный, естественно-математический и др.) с преимущественным вниманием к определенной группе предметов.

сы по выбору и профильное обучение. В зависимости от той роли, которую может играть математика в образовании, выделяются два типа курсов: курсы общеобразовательной ориентации и курсы повышенного типа. Последний тип целесообразно также разделить на два: для учащихся, выбравших для себя те области будущей деятельности, в которых математика является аппаратом, средством для изучения объективной реальности, и для тех учащихся, для которых математика есть одна из основных целей познания. Программа каждого из трех указанных типов курсов должна содержать две части: инвариантную и вариативную.

Наибольшие споры вызывает понятие уровневой дифференциации, хотя уже сформулированы "двумерные" модели дифференцируемого обучения ("уровень–профиль" — М. И. Башмаков [2]; меж/внутрипредметная–уровень преподавания — Е. Е. Семенов [45]) и даже модель дифференцированного преподавания в педагогическом вузе, содержащая 12 разновидностей [46].

Между тем по поводу "планируемых обязательных уровней обучения" в [3] подчеркнуто, что: методологически неверно сводить проверку математического развития к умениям и навыкам рецептурного решения простых стандартных задач; совершенно неправомерно снижение уровня логической подготовки; критерием усвоения должны служить определенный уровень культуры и знания, которые обеспечивают формирование готовности жить и работать в условиях научно-технической революции, компьютеризации современного производства. Предложения относительно возможности осуществления дифференциации в сельских школах и школах небольших городов в [3] по существу сводятся к осуществлению профильной дифференциации в одной аудитории на основе индивидуального подхода к обучаемым. Сами вводимые в этой работе уровни обучения — общекультурный, прикладной и творческий [2] — и выделение групп учащихся по отношению к школьному курсу математики полностью соответствуют указанным выше "профилям" обучения. При этом авторы считают необходимым создание трех учебников математики, соответствующих каждому из выделенных уровней.

Следует подчеркнуть, что в любом случае учитель должен быть способен "как можно раньше уловить эти способности, осуществить целенаправленный индивидуальный подход к учащимся, поддержать

[2]Последнее название не совсем удачно, поскольку момент творчества должен быть присущ любому процессу обучения.

их интерес к предмету"; на то же самое качество, которым должен обладать учитель, указано и в разработанном Национальным советом преподавателей математики (США) документе [3], посвященном проблемам математического образования талантливой молодежи.

На сложность осуществления уровневой дифференциации указывают и результаты проводившегося в Англии и Уэльсе эксперимента, итог обсуждения которого подведен в статье К. Ратвена (K. Ruthven) [80].

Суть этого эксперимента состояла в явной и открытой для учащихся и их родителей модели оценки успехов в обучении, связанной с формулировкой целей обучения. Родственные объекты (цели) были сгруппированы в конечное число так называемых *целей достижения* и разбиты на десять *уровней овладения.* Как писали перед началом этого эксперимента: "Сформулированные в программе цели обеспечат объективность оценки успехов учащихся... на их основе можно будет ясно видеть, что же ученик выучил и чем он овладел, что даст возможность учителям и родителям оценить степень его продвижения в обучении." На начальном этапе эксперимента предполагалось, что "учащийся будет начинать с 1-го уровня и двигаться по направлению к уровню 10 так далеко, как позволяют его способности." На практике же оказалось, что попытка определить уровень знаний, понимания и умений учащегося наталкивается на серьезные трудности. К примеру, проведенные проверки знаний показали, что имеется огромный разброс результатов решения однотипных (с формально-математической точки зрения) задач. В [80] приводится следующий пример.

Дана задача. *Чтобы приготовить обед на* 12 *человек, требуется* 12 *отбивных,* 6 *помидоров,* 18 *картофелин и* $1,5$ *кг гороха. Сколько каждого продукта потребуется, чтобы приготовить обеда на 8 человек?*

В следующей таблице приведен процент учащихся, правильно определивших количество конкретного продукта:

| продукт | 11-летние | 15-летние |
|---|---|---|
| отбивные | 87% | 95% |
| помидоры | 74% | 86% |
| картофель | 34% | 61% |
| горошек | 21% | 46% |

В связи с этой таблицей и другими приводимыми в статье резуль-

[3] "Task Force on the Mathematically Promising".

татами автор пишет, что система концентрических целей, описанных в терминах формального эпистемологического анализа математики, никак не связана с теми стратегиями, которые на практике выбирают учащиеся для решения задач; таким образом, формальное описание концентрических целей не является тем критерием, по которому следует оценивать математическое мышление. Математическое развитие характеризуется увеличением гибкости и свободы в использовании конкретных стратегий (методов) рассуждения, способностью использовать эти методы и отслеживать результаты их использования при решении задач. Наконец, проблематично вообще использование систем коротких тестов, поскольку при этом никак не оценивается осознание математических понятий, так что из результатов этих тестов учителя не в состоянии извлечь никаких содержательных практических рекомендаций по работе в данном классе.

Окончательный вывод, к которому приходит автор статьи (и который полностью разделяет автор данной работы), состоит в том, что даже проблема, связанная с явной формулировкой и описанием уровней требований и системы оценки знаний, далека от своего решения и требует дальнейших глубоких исследований.

Приведем теперь рекомендации, которые сформулированы в [31] на основе анализа дореволюционного российского, а также принятых в настоящее время за рубежом подходов к реализации дифференциации в обучении математике.

1) Обучение по направлениям ("профилям") вводится лишь после того, как школьники получат достаточно единое базовое образование и утвердятся в своих склонностях.

2) На старшей ступени обучения следует обеспечить возможно более широкое количество направлений обучения или продолжения образования через широкую систему учебных заведений различных типов.

3) По каждому учебному предмету целесообразно объединять различные направления обучения в блоки по принципу сходства целей и задач обучения для создания единых программ по каждому блоку.

4) При составлении программ и учебников, выборе форм и методов обучения следует учитывать возрастные особенности подростков, склонных к данному виду деятельности, и в то же время не исключать возможности изменения профиля. Причем при составлении программ по математике для "гуманитариев" нельзя руководствоваться принципом "урезания" сложной программы, уменьшения ее объема и "облегчения". Необходимо изменить сам набор изучаемых вопросов, форму

подачи материала и т.д. (см. варианты разноуровневых выпускных экзаменов в С.-Петербурге [26, 27]).

С другой стороны, В. А. Гусев [13] указывает, что в школе до сих пор не используются возможности обучения как основы дифференциации за счет использования цепочек (серий) задач (они названы *цепочками новой информации*) так, как это издавна делается во внеклассной работе по математике, (см., к примеру, [10, 15]). Причем автор показывает, что этого можно достичь путем переструктурирования материала, содержащегося в стандартных учебниках, добавив к нему немного промежуточных задач, и правильной расстановке акцентов.

Процитируем заключительный абзац данной работы, поскольку содержащаяся в нем методическая идея близка к идее использования *пучков задач*, являющихся основой для применения *принципа интегративности* для формирования практических умений и навыков будущих преподавателей профильных школ (см. раздел 2.2.2).

“Предложенная “цепочка” является “стволом дерева”, на котором располагается вся учебная работа, связанная с изучением параллелограмма и его свойств, как на уровне базового математического образования, так и на любом более высоком его уровне”[4].

На недостаточность методических разработок указывает и такой факт. В втором разделе сборника “Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе” [20] содержатся задачи, уровень трудности которых (связанный не с техникой, а с необходимостью определенного развития математической культуры) превосходит уровень трудности задач, входящих в имеющиеся учебники и методические пособия для 6–9-х классов.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

• введение профильной дифференциации в старших классах средней школы есть объективная необходимость, определяемая современными тенденциями развития общества, а для ее для успешного осуществления необходима разработка соответствующего учебно-методического обеспечения.

В настоящее время в России, при все более широком распространении дифференциации в средней школе (причем не только на ее стар-

---

[4] Ср.: “Каким бы ни был выбранный и примененный учебный комплекс средств, способов и методов..невозможно себе представить, чтобы в нем не нашла места постановка задач, органически связанных с изучением программного материала и направленная не только на эффективное его усвоение, но и всесторонее развитие и воспитание школьников” [30].

шем уровне)[5], ощущается острый недостаток учителей (см. [1]), которые могли бы успешно преподавать в новых условиях (тем более, что разработка и публикация необходимых учебных пособий отстает от нужд реального процесса). Как во время проведенной по инициативе А. Н. Колмогорова и А. И. Маркушевича реформы 60–70-х годов, наименьшие трудности при переходе на новые программы, новый язык(!) математики в школе, новые учебники имели учителя, которые активно занимались внеклассной работой по математике, так и сейчас успешно работать, к примеру в гуманитарной гимназии, могут только те учителя, которые имеют опыт преподавания математики на повышенном (углубленном) уровне.

В связи с общим направлением гуманитаризации среднего образования и роли математики в этом процессе отметим доклад Ю. И. Манина "Математика как метафора" [74] на Международном математическом конгрессе (Киото, Япония; 1990). Своего рода эпиграфом к докладу является следующая содержащаяся в нем фраза: "Нельзя точно сформулировать, чему же учит нас математика, как нельзя определить, чему же учит "Война и мир". Казалось бы, далее автор противоречит сам себе, приводя пример абстрактной математической теоремы Эрроу "о диктатуре" и говоря, что в результате мы можем лучше понять механизмы "делания" реальной политики (очень хорошая тема для обсуждения в школах гуманитарного и социолого-экономического профиля). Однако далее автор всячески подчеркивает возможность "метафорического" использования языка математики, говоря, в частности, о том, почему математические работы являются смесью слов и формул. Во-первых, потому, что "мы до сих пор нуждаемся в эмоциональных связях", во-вторых, в связи с тем, что смысл некоторых понятий может быть лучше всего выражен при помощи слов. Что касается преподавания математики, то в этом докладе отмечается, что "доказательство" — это производное от понятия "истина" — "*Proof itself is a derivate of the notion of truth*", — а есть много и других ценностей, помимо истины, в их числе "деятельность", "красота" и "понимание". "И тот учитель, кто забывает о них, совершает непоправимую ошибку."

Необходимость совершенствования методической подготовки учителя математики отмечалась многими авторами. К примеру, в докладе на Международной конференции "Подготовка преподавателя математики и информатики" (Москва, 1994), В. А. Гусев говорил [14]:

[5] К примеру, только в С.-Петербурге имеется более двадцати гимназий и ста школ со специализированными классами.

“Необходимость решения многочисленных проблем, связанных с совершенствованием методической подготовки будущих учителей, связана со следующими новыми факторами:

— ролью математического образования в общем развитии личности;

— развитием средствами учебной математической деятельности мыслительных способностей;

— вычленением базового компонента математического образования и разработка стандартов математического образования;

— внедрением в практику работы в школе методов уровневой и профильной дифференциации;

— использованием новых информационных технологий для активизации учебного процесса.”

В статье [1] предлагается решать задачу подготовки преподавателя для специализированных классов через изучение специальных дисциплин, педагогическую направленность их содержания, а также педагогическую ориентированность методов и средств преподавания. Необходимо еще раз подчеркнуть, что характер изменений, которые следует осуществить в системе математической и методической подготовки учителя, во многом связан с изменениями, происходящими в системе среднего образования. В статье [37] указано одно важное направление преобразования системы методической подготовки преподавателя математики: “координация и интеграция элементов как в самой системе, так и с элементами других систем. Реализация этого направления позволит решить двуединую задачу: сформировать целостное представление о процессе обучения математике учащихся средней школы и обеспечить целенаправленность процесса профессионального становления будущего учителя математики. Решаться эта задача может на уровне согласования и интеграции содержания подготовки...” Авторы видят следующие направления ее решения:

1) временно́е согласование дисциплин методического блока, ориентированных на предметную или технологическую подготовку;

2) согласование содержания предметной и технологической подготовки, реализуемой главным образом в курсах “Элементарная математика и практикум по решению задач” и “Методика обучения математике”;

3) создание новых интегративных курсов; ориентирами для интеграции при этом могут быть проблемы содержания школьного курса математики в теоретико-методическом плане или проблемы организа-

ции познавательной деятельности учащихся; кроме того, интегративные тенденции могут реализовываться не только через содержание, но и через организационные формы обучения.

В. М. Монахов и Н. Л. Стефанова также подчеркивают, что уровень методической подготовки будущих преподавателей специализированных школ связан с углублением во внутриматематические проблемы, поскольку он рассчитан на работу с учащимися, имеющими общую положительную установку на деятельностное участие в процессе обучения. Авторы видят возможности формирования указанного уровня путем введении курсов по выбору студентов по достижении ими высокого уровня предметной подготовки.

В том же выпуске журнала "Математика в школе" опубликована статья Г. Г. Хамова [52], который использует термин "интегративные курсы" применительно к лекционным курсам, объединяющим в себе элементарную и "высшую" математику (см. далее раздел 2.2.1, в котором дан более полный обзор основных идей этой статьи).

Термин "интегративность" используется в этих двух статьях более как метафора, чем как понятие, имеющее точное значение; как следствие он используется в различных смыслах. В связи с этим встает теоретическая задача:

*выделить те характеристики процесса подготовки будущего преподавателя, как с точки зрения содержания этой подготовки, так и с точки зрения используемых в ней технологий и форм обучения, которые объединяет в себе понятие — интегративность.*

Данная задача решается в главе 2 настоящей работы.

В уже указанном выше докладе В. А. Гусев отметил, что необходимо разработать два новых блока дисциплин, которые обеспечивали бы методическую (добавим — и математическую. — *О.И.*) подготовку учителей в области:

— углубленного и профильного изучения математики (вариативное изучение математики);

— использования новых технологий в обучении математике.

Принципы построения блока дисциплин "специальной математической и методической подготовки", а также разработанные конкретные методики, более точно — "технологии", могут быть использованы для постановки обучения в рамках первого из указанных В. А. Гусевым блока. Проблемы использования новых технологий рассматриваются не будут. Отметим, что за рубежом накоплен большой опыт использования компьютерных программ при обучении, однако и там к ним относятся достаточно критично. К примеру, С. Кранц в книге [68] пишет, что всегда следует иметь в виду, что ничто, кроме упражнения “с карандашом в руке”, не может дать студенту необходимого опыта — “лучше провести час за построением нескольких графиков с карандашом и бумагой, чем за такое же время посмотреть на пятьдесят графиков на дисплее графического калькулятора... Построение графиков — это одна из основных сторон развития аналитического мышления”. А К. Ратвен [79] в свою очередь отмечал, что компьютер чаще всего используется как новое математическое средство или же как альтернативный источник информации при вполне традиционном общем подходе к преподаванию математики.

Таким образом, новые задачи требуют изменения содержания математической подготовки учителя при сохранении роли фундаментальных математических дисциплин (А. Н. Колмогоров; см., к примеру, [54]) и глубокого изучения элементарной математики (С. П. Новиков). В этой связи одной из первых методологических проблем является следующая задача: определить, что же следует иметь в виду под *фундаментальным образованием в области элементарной (школьной) математики.* Кроме того, говоря о подготовке учителя, необходимо помнить слова Д. Пойа: “Самый большой пробел во владении математикой у рядового учителя средней школы — он не имеет никакого опыта активной математической работы, поэтому его нельзя назвать мастером в той области, которой он обязан обучать школьников”.

## 1.2 Современные концепции подготовки преподавателей

В данном параграфе мы рассмотрим основные имеющиеся в настоящее время концепции подготовки преподавателей, нормативные документы, определяющие требования к минимуму содержания и уровню профессиональной подготовки выпускников, а также некоторые варианты системы подготовки и проанализируем, насколько они соответствуют задаче подготовки преподавателей для профильных школ в каждом из двух вариантов: а) при построении блока дисциплин углубленного изучения математики и методики ее преподавания студентами высших педагогических учебных заведений, б) при подготовке преподавателей на базе фундаментального образования на математических факультетах университетов.

Важным этапом в исследовании проблемы подготовки учителей являются исследования, проведенные А. Г. Мордковичем, выдвинутая и разработанная им концепция профессионально-педагогической направленности обучения (ППНО) [38–40]. Как следовало из проведенных им исследований, выпускники педагогических вузов не достигали необходимого уровня педагогического мастерства. По его мнению, это было связано с тем, что:

— существовал разрыв между вузовскими и школьными курсами математики как по содержанию, так и по методам изложения;

— в преподавании основных математических курсов не реализовывалась возможность формирования средствами предмета методических взглядов, обучения принципам дидактики, способам и приемам педагогической деятельности;

— программы математических курсов являются перегруженными, во многом формальными, нацелены абстрактно на подготовку специалиста-математика с высшим образованием, а не конкретно на подготовку учителя;

— недостаточно развивается интерес студента к математике как науке и учебному предмету и к профессии учителя математики;

— недостаточно внимание кафедр к установлению внутрипредметных связей между различными разделами курса и межпредметных связей между различными дисциплинами, между теорией и практикой;

— имелся формализм в обучении;

— недостаточна самостоятельная работа студента и несовершенен контроль за ней.

Таким образом, основной недостаток состоит в недостаточной профессионализации (педагогизации) процесса обучения математике студентов педагогических вузов. Исследования А. Г. Мордковича были связаны с использованием процесса обучения фундаментальным математическим дисциплинам для формирования основ профессионального мастерства будущего учителя математики.

Между тем, анализируя проблему совершенствования профессиональной подготовки учителя, А. Г. Мордкович отметил, что она иследовалась в психолого-педагогическом плане на теоретическом уровне, в практическом плане она разрабатывалась в основном по линии предметов педагогического цикла: психологии, педагогики, частных методик, педагогической практики; в литературе до того описывались лишь общие направления профессионализации преподавания специальных дисциплин (Н. В. Кузьмина, А. И. Щербаков, В. А. Сластенин, М. И. Дьяченко и Л. А. Кандыбович, С. И. Архангельский, И. И. Кобыляцкий, Н. Д. Никандров, Т. А. Ильина, С. И. Зиновьев, В. А. Загвяздинский, Л. И. Гриценко и др.). Профессиональная направленность обучения математике понималась достаточно узко и лишь в связи со школьным курсом, имелось мало практических рекомендаций, таким образом, существовал разрыв между осуществленной в педагогике и психологии общетеоретической разработкой проблемы и ее разработкой в методико-математическом плане (З. Г. Борчугова, Н. Я. Виленкин, В. И. Левин, М. В. Потоцкий, Н. Г. Ованесов, Е. С. Канин, П. И. Кибалко, А. С. Мищенко, Г. Е. Перевалов, Г. И. Саранцев, Р. С. Черкасов, Б. П. Эрдниев и др.).

Концепция ППНО раскрывается посредством четырех основных педагогических положений — принципов ППНО.

Первым из них является *принцип фундаментальности*, утверждающий, что необходима фундаментальная математическая подготовка учителя, обеспечивающая ему действительные знания в пределах, далеко выходящих за рамки школьного курса математики, и универсальность во владении им различных математических учебных предметов в школе; однако эта фундаментальность является не целью, а средством подготовки учителя, а потому должна быть согласована с нуждами приобретаемой профессии.

Для действующего учителя характерна такая деятельность при изучении нового материала, когда происходит совмещение научной и методической сторон этого процесса, т.е̇учитель, изучая материал, одновременно думает над его методическим преломлением в преподавании. В связи с этим выдвигается следующий *принцип бинарности*: основу построения общих и специальных курсов должно составлять объединение общенаучной и методической линии; курс методики преподавания может решить свои задачи в области частных методик только на основе специальной подготовки и формирующихся методических взглядов. Объединение общенаучных и методических линий курса означает, в частности, что комплекс математических дисциплин педагогического вуза должен обеспечить: а) достаточно широкий кругозор в математике и определенный уровень математической культуры, б) знакомство с методиками изложения школьного курса математики.

Далее, осуществление связей вузовского курса с соответствующим школьным предметом может обеспечить понимание студентом перспектив его изучения, что составляет содержание *принципа ведущей* *идеи.*

Последним из выдвинутых принципов является *принцип непрерывности*, означающий, что одним из условий профессионализации подготовки учителя является непрерывность постижения им педагогической деятельности в процессе обучения.

На основе данных принципов профессионально-педагогический подход был им применен в отношении:

— методов обучения математике;

— составления программ математических курсов;

— изложения курса математического анализа;

— программы Государственного экзамена по математике;

— системы упражнений в математических курсах;

— программы практикума по решению задач.

Характер сделанных А. Г. Мордковичем выводов будет ясен из сформулированных им критериев составления программ математических курсов и требований к системе упражнений.

Первое, из *критерия соответствия целям*, выражающего условия соответствия учебного предмета целям обучения — математической подготовке учителя математики, следует, что в программе каждого математического курса педагогического вуза должны присутствовать элементы методологии, историзма, пропедевтики, алгоритмичности, математического моделирования.

Вторoе, согласно *критерию дидактической изоморфности* основные структуры и смысловые единицы соответствующей области математики переходят в учебный предмет с их переосмыслением в дидактическом плане.

Третье, *критерий минимизации* отражает необходимость тщательного отбора минимальной информации.

В отношении требований к системе упражнений в математическом курсе педвуза им сказано, что:

1) система должна быть полной, т.е. включать в себя упражнения на все основные понятия и методы курса в количестве, достаточном для формирования у студентов практических умений и навыков,

2) упражнения должны иметь ярко выраженную “школьную” направленность, проявляющуюся как в содержании задач, так и в выборе используемых при их решении алгоритмов.

Данный краткий обзор концепции ППНО был сделан с той целью, чтобы проанализировать, насколько эта концепция (или ее отдельные положения) применима к процессу подготовки преподавателя на математическом факультете университета. Подчеркнем, что сам автор этой концепции рассматривал ее лишь в отношении построения процесса обучения в высшем педагогическом учебном заведении.

Прежде всего необходимо указать, что:

• поскольку одной из целей обучения на математическом факультете университета является получение студентами навыков математика-исследователя (в том числе и будущими преподавателями средних учебных заведений), то, в соответствии с критерием соответствия целям, основополагающим принципом построения системы подготовки является *принцип фундаментальности* теоретической подготовки, заключающийся в том, что

*профессиональные знания, умения и навыки формируются на основе фундаментальных знаний* [4];

• по той же причине к построению обучения фундаментальным математическим дисциплинам неприменимы ни *принцип ведущей идеи*, ни *принцип бинарности*, а также дальнейшие выводы, сделаные на основе основных положений профессионально-педагогического подхода.

Далее, поскольку речь идет о подготовке на математическом факультете университета будущего преподавателя профильной школы, то вторая составляющая (по отношению к которой будет применяться термин *специальная математическая и методическая подготовка*) получаемого им образования должна обеспечивать формирование необходимого уровня педагогического мастерства. Однако и в ней мы не можем использовать, к примеру, такие делаемые А. Г. Мордковичем выводы, как необходимость использования всестороннего изложения, мотивационное обеспечение каждой отдельно взятой темы и т.п.

С другой стороны, необходимо учитывать результаты проведенного им опроса, который показал, что, по мнению учителей, основными недостатками подготовки будущего учителя в высшем учебном заведении являются: слабое влияние процесса обучения на формирование методических взглядов; плохое знание школьного курса; отрыв вузовской программы от школьной; незнание школьных учебников; формализм в преподавании.

Основной вывод состоит в том, что

• *специальная математическая и методическая подготовка будущего преподавателя профильной школы должна удовлетворять весьма жесткому критерию оптимизации процесса обучения, а потому должна быть основана на новых принципах обучения.*

Что касается принципов вариативного обучения дисциплинам, обеспечивающим углубленное изучения математики студентами педагогических университетов и институтов и применяемых методик, то, как следует из результатов, приведенных в предыдущем параграфе, является важным строить его на интегративной основе, объединяя элементарную и “высшую” математику, обучение решению задач и применяемым для этого методикам (см. главу 2).

Еще одним моментом, который не полностью учтен в концепции ППНО, является проблема интеллектуального развития будущего учителя. Как указано Г. В. Дорофеевым [17], интеллектуальный уровень личности характеризуется в целом при помощи двух параметров: объемом приобретенной информации и способностью использовать ее для решения возникающих в его дальнейшей деятельности задач, “... задача сообщения человеку на уровне среднего и даже высшего образования объема информации, достаточного для его будущей деятельности, оказывается нереальной. На первый план выходит задача интеллектуального развития, включающего, в частности, способность человека к усвоению новых знаний, к самостоятельному поиску и усвоению новой информации”[6]. Таким образом, переориентация методической системы обучения на приоритет его развивающей функции требует отражения этого требования в основных принципах подготовки преподавателей (более подробно этот вопрос обсуждается далее в § 2.2, в частности, в связи с проблемой формирования базового педагогического опыта будущего преподавателя — см. 2.2.2).

Приведем один характерный пример. В качестве одного из существенных недостатков в подготовке учителя в педагогическом институте выше было указано незнание им школьных учебников. Однако для личности, имеющей глубокую методическую и математическую подготовку, обладающей высокой *интеллектуальной восприимчивостью*, т.е. способностью к усвоению новой информации, и *интеллектуальной подвижностью*, т.е. гибкостью мышления, не составляет никакого труда (более того, представляет интересную практическую задачу) разобраться в методике построения нового учебника для того, чтобы далее использовать его в процессе обучения. Концепция ППНО направлена более на формирование основ професионального мастерства с точки

[6]“В наши дни мы часто говорим о предметах, которые полагается изучать в школе, колледже или на специальных курсах... Но дело не столько в этих предметах — пора осознать собственное невежество, начать стремиться к новому, развивать в себе умение постигать привычку мыслить. Образование не суть нечто застывшее, оно должно стимулировать человека на дальнейшее изучение различных проблем” [43, с. 225].

зрения формирования необходимого уровня математических и методических знаний, умений и навыков.

Вопросы профессионально-педагогической подготовки будущих преподавателей математики и информатики рассматривались в работах З. О. Шварцмана (см., к примеру, [59–60]). В работе [60] указано, что в результате проведенных в Томском государственном университете исследования "составлена модель структуры и содержания подготовки преподавателя математики и информатики в университете с учетом современных и прогнозируемых требований на рынке педагогического труда. На основе этой модели создана гибкая система профессионально-педагогической подготовки. Блоки общенаучных дисциплин и фундаментальной подготовки по специальности согласованы с профессионально-педагогической подготовкой будущего преподавателя на каждом уровне обучения".

*План специализации ТГУ*
*"Методика преподавания математики и информатики"*

3 курс, 6 семестр

1. Методика обучения решению задач (68 ч).
2. Система воспитательной работы классного руководителя (34 ч).
3. Числовые системы (34 ч).

4 курс, 7 семестр

1. Неевклидова геометрия (историко-философский обзор) (54 ч).
2. Возрастные особенности формирования личности учащихся (34 ч).
3. Методика и техника урока (34 ч).

8 семестр

1. Методика преподавания (частные методики) (68 ч).
2. История математики (34 ч).
3. Технические средства обучения (34 ч).

5 курс, 9 семестр

1. Содержание учебников по математике, информатике и вычислительной технике в средних учебных заведениях (54 ч).
2. Факультативные занятия по математике и информатике (34 ч).
3. Профессиональная ориентация учащихся на занятиях (34 ч).

10 семестр

1. Школьная информатика (34 ч).

2. Развитие творческих способностей учащихся на занятиях по математике и информатике (34 ч).

3. Педагогическое мастерство (34 ч).

На первом месте в плане каждого семестра стоит обязательный спецкурс для всех студентов данной специализации, второй (из пп. 2-3) выбирается студентом самостоятельно. Отмечено, что целесообразна замена некоторых спецкурсов математических специализаций на спецкурсы психолого-педагогического характера, к примеру — "Факультативные занятия по математике" для тех студентов-математиков, дипломные работы которых связаны со школой. На с. 70 этой книги приведены вопросы, изучение которых входит в содержание спецкурса "Методика обучения решению задач": 1) функции задач в обучении математике; 2) методика обучения математике через задачи; 3) алгоритмические и эвристические элементы в деятельности по решению задач; 4) моделирование как средство решения задач; 5) обучение составлению задач; 6) решение одной и той же задачи различными способами; 7) обобщение задач.

На основе приведенных данных можно констатировать, что:

• программа данной специализации отвечает задаче подготовки учителя математики в педагогическом университете;

• построение обучения основано на концепции ППНО[7].

Следует подчеркнуть, что, во-первых, использование разработанных автором настоящей работы технологий обучения решению задач (на основе интегративного подхода) позволило бы построить не спецкурсы, а практикумы "Методика обучения решению задач", "Развитие творческих способностей учащихся", "Факультативные занятия"; во-вторых, применение интегративного подхода позволяет оптимизировать процесс обучения и, в частности, сделать материал, изучаемый в спецкурсе "Числовые системы", обязательным для всех будущих преподавателей математики (что абсолютно необходимо).

Среди других исследований последнего времени следует выделить монографию В. А. Кузнецовой [32], в которой, в частности, содержится большой фактический материал, примеры учебных планов и программ подготовки преподавателей для средней школы в различных университетах. Для настоящей работы существенны следующие сделанные В. А. Кузнецовой выводы:

[7]особое внимание в котором уделено школьному курсу геометрии и решению геометрических задач [60].

— существует возможность построения университетской педагогической подготовки как надстройки над подготовкой по специальности;

— множественность довузовских учебных заведений, различие их требований к степени специальной и общей подготовки вызывает большое квалификационное разнообразие преподавателей разного уровня образования; требуемое различие состоит не только в уровне, но и в типе подготовки, определяемой расстановкой акцентов, характером запаса знаний и умений;

— дисциплины специальностей играют образовательную и, частично, профессиональную роль; дисциплины, определяющие сущность профессионально-педагогической подготовки, можно разделить на две части: общепрофессиональную и предметную;

— для построения системы подготовки преподавателей в университете необходимо определить резервы для дополнительных профессиональных дисциплин, отражающих специфику данного вуза, и найти пути возможной конкретной реализации этих дисциплин в учебном процессе.

Между тем построение специальной математической и методической подготовки по интегративному принципу дает возможность реализовать применительно к обучению в вузе следующие высказанные Л. В. Занковым принципы [19]: обучение на высоком уровне трудности; ведущая роль теоретических знаний; изучение быстрым темпом; осознание самого процесса учения; систематическая работа над развитием всех.

Приведем выдержки из утвержденных в 1995 году "Государственных требований к минимуму содержания и уровню профессиональной подготовки выпускника для получения дополнительной квалификации "Преподаватель" (третий уровень профессионального образования)".

1.1. Нормативная трудоемкость образовательно-профессиональной программы подготовки преподавателя при очной форме составляет 680 часов. Дополнительная квалификация — "Преподаватель".

1.2. Характеристика сферы и объектов профессиональной деятельности преподавателя. Деятельность преподавателя направлена на:

— реализацию образовательных программ и учебных планов на уровне, отвечающем принятым стандартам образования;

— проектирование, разработку и проведение типовых мероприятий, связанных с преподаванием (уроков, лекций, семинарских и практических занятий, консультаций, аттестационных мероприятий);

— проведение исследований проблем, связанных с преподаванием, разработку рекомендаций по их разрешению;

— анализ частных и общих проблем преподавания, управления образовательными учреждениями;

— использование современных технологий образования для выбора оптимальной стратегии преподавания в зависимости от уровня подготовки обучаемых и целей обучения;

— воспитание и интеллектуальное развитие личности.

3. Обязательный минимум профессиональной подготовки.

ОД. 00. ОБЩИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

180 часов [8]

ОД. 01. Психология и педагогика

50 часов

ОД. 02. Дополнительный цикл психолого-педагогических дисциплин

90 часов

ОД. 03. Новые информационные технологии в учебном процессе

40 часов

СД. 00ĊПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫя

160 часов

СД. 01. История и методология предмета

30 часов

СД. 02. Методика преподавания предмета

50 часов

СД. 03. Научные основы школьного курса предмета

40 часов

СД. 04. Практикум для развития и закрепления практических навыков по предмету

40 часов

П. 00. Педагогическая практика 10 недель.

И. 00. Итоговая государственная аттестация: Государственный квалификационный экзамен или защита выпускной работы.

Необходимо констатировать, что количество часов учебных занятий, отводимых в соответствии с этими требованиями для получения практических знаний по предмету, совершенно недостаточно для формирования базового педагогического опыта будущего преподавателя

[8] Здесь и далее указано число аудиторных часов. — *О. И.*

математики (а также физики, химии) даже обычной школы, не говоря уже о подготовке к преподаванию в профильном среднем учебном заведении. Указанная программа (с соответствующими коррективами) более подходит для подготовки ассистента, а ведь *"учителю математики средней школы требуется более высокая квалификация, чем ассистенту, ведущему занятия в техническом вузе. Здесь требуется более тонкое понимание вопроса."* — А. Н. Колмогоров [29].

Таким образом, необходима разработка учебного плана и программ, обеспечивающих целенаправленную подготовку по специальности "математика" с дополнительной квалификацией "преподаватель" профильного среднего учебного заведения. Кроме того, требуется разработать соответствующие учебные и методические пособия, поскольку, в частности, существующие пособия для проведения практикумов по решению задач не ориентированы на углубленное изучение математики. Более того, методическое построение некоторых из таких пособий направлены на то, чтобы дать студентам общие методы решения, а не обучать их решению задач. К примеру, в пособии А. Б. Василевского под названием "Обучение решению задач по математике"[9] [5] имеется раздел "Методы неравносильных преобразований", что неверно методически, поскольку это более "рецепт" действий для тех учащихся, которые не способны использовать понятие равносильности при решении уравнений/неравенств. В этом же пособии рассматривается метод "векторного доказательства неравенств", заключающийся в применении неравенства Коши–Буняковского, геометрическую интерпретацию которого, безусловно, должен знать каждый учитель математики. Однако вводить векторы всякий раз, когда оно применяется (а во многих приводимых в этом пособии задачах можно к тому же обойтись и без этого, просто возведя в квадрат данное неравенство), — значит давать будущим учителям неверное представление о математике и ее методах. Хорошими примерами правильно построенных методических пособий являются книги И. Ф. Шарыгина [55–56], однако они более предназначены для учащихся, поэтому в них не настолько выпукло, насколько это желательно в пособиях для студентов, проявляются внутриматематические связи и, в частности, связи между элементарной математикой и изучаемыми в вузе разделами "высшей" математики.

Проведенный в данной главе анализ приводит к следующим выводам:

[9] Учебное пособие для студентов физмат специальностей désинститутов.

1) введение профильной дифференциации в старших классах средней школы есть объективная необходимость, определяемая современными тенденциями развития общества;

2) для практической реализации идеи дифференциации в обучении математике требуется серьезная перестройка всей методической работы: необходимо создать разноуровневые и профильные программы и соответствующее учебно-методическое обеспечение;

более того,

3) необходима переориентация методической системы обучения на приоритет его развивающей функции, что должно отразиться на основных принципах подготовки преподавателей;

4) множественность довузовских учебных заведений, различие их требований к степени специальной и общей подготовки вызывает большое квалификационное разнообразие преподавателей разного уровня образования; требуемое различие состоит не только в уровне, но и в типе подготовки, определяемой расстановкой акцентов, характером запаса знаний и умений;

таким образом,

*новые задачи требуют изменения содержания подготовки учителя при сохранении роли фундаментальных математических дисциплин и глубокого изучения элементарной математики.*

далее,

5) существует объективная возможность построения университетской педагогической подготовки как надстройки над подготовкой по специальности, основополагающим принципом которой является принцип фундаментальности, заключающийся в том, что *профессиональные знания, умения и навыки формируются на основе фундаментальных знаний*, в том числе и знаний в области психологии, педагогики и методики преподавания математики;

однако, как показано выше,

6) существующие принципы и системы подготовки преподавателей математики в высших учебных заведениях (в том числе и концепция профессионально-педагогической направленности обучения) не отвечают задаче подготовки будущего преподавателя профильной школы на математическом факультете университета.

В связи с этим встает основная задача, заключающаяся *в разработке основных педагогических положений, определяющих концепцию подготовки преподавателя профильной школы на математическом факультете университета посредством введения дополнитель-*

*ного (по отношению к фундаментальным предметам) блока дисциплин специальной математической и методической подготовки,* теоретическому анализу которой, введению и обоснованию основных вводимых автором принципов посвящена следующая глава.

# Глава 2

# Теоретические основы интегративного построения системы специальной математический и методической подготовки

Важнейшим теоретическим положением, отвечающим сформулированной в конце главы 1 основной задаче, является *принцип интегративности специальной математической и методической подготовки.* Однако его развернутая формулировка будет приведена лишь в разделе 2.2.5 данной главы, поскольку этот принцип имеет глубокую внутреннюю структуру, отражающую методическую сложность самой системы специальной подготовки, а его формулировка использует несколько других вводимых в данной работе новых принципов, каждый из которых связан с результатами анализа возможных путей решения конкретных проблем.

Первый из них — *принцип рефлексии* — связан с одной из рассматриваемых в этой главе частных задач, а именно с приведенным в разделах 2.1.2–2.1.3 изучением структуры, форм и путей развития профессионального опыта преподавателя на основе результатов И. Я. Лернера и ряда зарубежных исследователей, что соотносится напрямую с важнейшей задачей подготовки будущего преподавателя — формированием его базового педагогического опыта. Перед этим необходимо рассмотреть еще одну частную задачу: дать описание совокупности необходимых преподавателю профильной школы знаний, умений как одной из составляющих его профессионального опыта (этому посвящен раздел 2.1.1). Анализ последней из рассмотренных в первом параграфе этой главы задач (указанной в главе 1) — определения понятия *фундаментальное образование в области элементарной математики* — приводит к следующему важному для решения основной задачи выводу, заключающемуся в том, что

*фундаментальное образование в области элементарной математики необходимо включает в себя знание некоторой совокупности понятий и фактов "высшей" математики как целостной системы знаний в их взаимосвязях с понятиями, утверждениями и конкретными задачами элементарной математики,*

что является одной из составляющих в формулировке принципа интегративности.

Как было подчеркнуто в главе 1, отдельные моменты, характерные для интегративного подхода к обучению будущих преподавателей, имелись в работах Н. Ф. Талызиной, Ю. М. Колягина и Г. Л. Луканкина, Г. Г. Хамова, В. М. Монахова и Н. Л. Стефановой, П. М. Эрдниева и Б. П. Эрдниева, И. А. Новик и П. И. Кибалко, а также С. И. Шварцбурда. Проведенный в разделах 2.2.1–2.2.2 второго параграфа теоретический анализ результатов, идей и подходов, примененных в этих работах, приводит к выделению понятий *пучков: понятий и утверждений, задач.* К примеру, понятие *пучок задач* содержит в себе те основные характеристики, присущие так называемой укрупненной дидактической единице, которые лежат в основе одноименного метода. Более того, понятие *пучка* применительно к совокупности содержательно-методических линий конкретного курса является важнейшим компонентом в формулировке *принципа полифоничности в обучении* (см. раздел 2.2.4). Более того, применение некоторых положений, высказанных П. Я. Гальпериным, Н. Ф. Талызиной и А. Н. Леонтьевым и связанных с результативностью обучения, приводит, с одной стороны, к выделению еще одного принципа — *принципа кумулятивности процесса обучения*, а с другой — к необходимости проведения в каждой из составляющих специальной математической и методической подготовки будущего преподавателя двух конкретных содержательно-методических линий. Поскольку эти линии напрямую связаны с проблемой возможности реализации основных принципов подготовки в реальном учебном процессе, то их обсуждение будет отложено до конца данной главы.

## 2.1 Специальная математическая и методическая подготовка преподавателей профильных школ

### 2.1.1 Необходимые знания, умения и навыки преподавателя профильной школы

В статье [12] Б. В. Гнеденко и Р. С. Черкасов писали, что "успешное развитие школьного математического образования требует научно-методической подготовки учителя, отвечающей запросам не только сегодняшнего дня, но и ближайшей перспективы. Учитель математики должен:

— обладать глубоким интересом как к излагаемой науке, так и к процессу преподавания учебного предмета;

— приобрести высокую научную подготовку по циклу фундаментальных дисциплин и предметов психолого-педагогического цикла;

— овладеть искусством творческого общения с учениками."

Раскрывая содержание этих требований, можно указать, что с точки зрения подготовки преподавателя математики профильной школы на математических факультетах университетов учебный процесс должен:

1) обеспечить такой уровень математических знаний, умений и навыков, который гарантировал бы:

• владение научным фундаментом изучаемых в школе понятий, полное и глубокое понимание фактов, идей, методов и структуры школьного курса;

• понимание взаимосвязей между различными разделами математики, единства применяемых методов;

• понимание как глобальных целей преподавания математики в средней школе, так и тонкостей изложения отдельных вопросов;

• способность решать школьные задачи вплоть до задач олимпиадного характера и способность оценивать оригинальные решения задач, предлагаемых учащимися;

• широкий кругозор в области внеклассной работы и знание литературы, дающее возможность проведения в школе кружковых, факультативных занятий и индивидуальной работы;

• знакомство с основами информатики и вычислительной техники, умение использовать в учебном процессе, при его подготовке и также для проведения самостоятельных исследований возможности, предоставляемые средствами современных технологий и коммуникаций;

2) сформировать достаточно высокий уровень математического мышления и владения математическим языком, который гарантировал бы умение:

• грамотно, лаконично, логически ясно и расчлененно, соблюдая при этом скрупулезную точность символики, объяснять и аргументировать проводимые действия и рассуждения;

• исправлять рассуждения и решения, предлагаемые учащимися, а также грамотно и содержательно отвечать на некорректные и даже “бессмысленные” вопросы;

• понимая разницу между интуитивными и строгими рассуждениями, в то же время использовать “наводящие” и иные правдоподобные рассуждения в процессах поиска решений задач;

• импровизировать на уроках;

3) обеспечить понимание роли математики в историческом развитии человеческого общества и возрастание ее значения на современном его этапе, в частности:

• знание пути развития математических идей, понятий и методов и понимание историчности введения в школьную математику большинства используемых в ней понятий;

• знакомство с известными математическими моделями реальных ситуаций, навыки в построении, исследовании различных моделей и интерпретации получаемых результатов;

• знание взаимосвязей между математикой и другими науками, понимание возможностей и ограничений для ее применения;

4) воспитать устойчивый интерес к математике, развить математические способности, мышление и интуицию, так чтобы сделать будущих преподавателей способными:

• самостоятельно изучать математику и проводить математические исследования, развивать свои собственные идеи, подходы и технику для решения математических задач;

• ценить красоту и силу математики, получать удовольствие от занятий ею и передавать это своим ученикам;

5) сформировать достаточно высокий уровень математической и методической культуры, что позволит:

• эффективно преподавать в условиях дифференцированного обучения, выбирая правильное соотношение между содержательным и формальным, строгостью и наглядностью, используя рациональные и адекватные профилю учебного заведения и уровню учащихся пути, методы и стили обучения, уровни строгости и полноты изложения;

• вести индивидуальную и внеклассную работу с учащимися, проявляющими интерес и способности к математике, которая способствовала бы дальнейшему развитию их творческих способностей и активизации интереса к углублению и расширению своих математических знаний.

Таким образом, обучение на математических факультетах университетов должно быть направлено на подготовку специалиста — учителя высшей квалификации — с профессиональными навыками *научного работника* и *учителя-методиста*. Можно сказать, что, в дополнение к задачам подготовки учителя для массовой школы, выпускник педагогической специализации математического факультета университета должен:

— быть специалистом в одной из областей наук и иметь опыт самостоятельного научного исследования,

— свободно владеть основами университетских базовых курсов и теоретическими основами школьного курса математики,

— быть в состоянии самостоятельно составить программу обучения,

— иметь навыки в составлении задач различного уровня сложности,

— иметь широкий кругозор в области внеклассной работы, знать литературу и уметь в ней ориентироваться,

— уметь адаптировать и популяризировать материал, избегая как вульгаризации, так и фактических ошибок,

— уметь импровизировать на уроках.

Традиционные университеты, такие как Московский, Санкт-Петербургский, Новосибирский и многие другие, обладают огромным опытом подготовки профессиональных математиков, которые способны работать как в теоретических областях, так и в сфере приложений математики. Однако те задачи, которые должны быть решены в процессе подготовки учителя высшей квалификации, не могут быть достигнуты на пути получения студентами-математиками дополнительной квалификации учителя за счет только лишь изучения указанного в главе 1 необходимого минимума дисциплин в соответствии со стандартами высшего образования. Необходима *система специальной математической и методической подготовки* студентов-педагогов математических факультетов университетов. Основные принципы, на которых должна быть основана такая система, будут сформулированы в следующем переграфе данной главы, пока же сделаем следующий вывод. Первое, что необходимо сделать, — это построить систему методической подготовки. Д. Пойа писал [42], что “курсы методики должны быть тесно связаны с курсами математики или с практическим преподаванием; читать их должны лишь те преподаватели высших учебных заведений, которые имеют как опыт научно-исследовательской работы, так и опыт практического преподавания”. В рекомендациях по подготовке учителей математики, утвержденных правлением Американского Математического Общества еще в 1960 году [85] говорилось о необходимости повышения чисто научной подготовки будущих преподавателей, и, кроме того, отмечалось, что курсы методики преподавания должны обеспечить:

— знание разных вариантов построения курса математики, используемых в преподавании и имеющихся в литературе;

— владение техникой индуктивного и дедуктивного введения новых математических идей и оценку сравнительных достоинств и места той или иной системы изложения;

— знание имеющейся математической и методической литературы;

— владение основными идеями элементарной математики и возможностями реализации этих идей в практическом преподавании;

— понимание основных путей применения заложенных в курсе средней школы математических идей и развиваемого аппарата.

То, как происходит обучение, столь же важно, как и само содержание этого обучения. Умение логически рассуждать, догадываться, исследовать, эффективно использовать математические методы при решении задач, а также использовать язык математики для передачи идей, может развиваться только при условии, что обучаемые вовлечены и активно участвуют в процессе обучения. От того, как математика преподается, во многом зависит формирование целостного представления об этом предмете в противоположность представлению о ней, как о фрагментированном наборе отдельных тем, а также представление об ее ценности.

Эти мысли высказываются в преамбуле рекомендаций к математической подготовке учителей математики, подготовленных и опубликованных Математической Ассоциацией Америки в 1991 году [63]. По мнению составителей, идеальный учитель 90-х годов должен:

— уметь просто и ясно излагать (передавать) математические идеи;

— уверенно решать задачи, анализируя данные и строя логические рассуждения;

— обладать значительно более глубокими знаниями и пониманием математики по сравнению с тем, чему он непосредственно учит в школе;

— наслаждаться математикой и ценить ее силу и красоту;

— понимать как математика пронизывает стороны нашей жизни, а также взаимосвязи внутри нее самой;

— естественно и свободно использовать современные технологии для изучения математики, ее преподавания и математической деятельности.

В заключение данного раздела отметим, что Комитет по математическому образованию Математической Ассоциации Америки и Национальный совет преподавателей математики (США) разработали целую систему *Стандартов*, которым должна удовлетворять подготовка будущих преподавателей [64, 66, 77].

### 2.1.2 Структура профессионального опыта. Принцип рефлексии

Современные теории выделяют следующие элементы в опыте любой человеческой деятельности (в том числе и преподавательской) как в социальном аспекте, так и в отношении опыта индивидуума (см., к примеру, [34]):

1) знания о мире и способах деятельности;

2) опыт осуществления способов деятельности, воплощенный в умениях и навыках;

3) опыт творческой, поисковой деятельности;

4) опыт воспитанности потребностей, мотивов и эмоций, обусловливающий отношение к миру и систему ценностей личности.

Указанное основание деления социального опыта правильно соотносится с другим возможным основанием деления социального опыта, именно с самостоятельностью и невозместимостью функций каждого из его элементов в формировании следующего поколения и его отдельной личности: любой из элементов, переданный изолированно, не обеспечивает сохранение функций остальных элементов, не может быть ими возмещен.

Каждый из этих отдельных элементов может существовать и в действительности существует в чистом виде, как в обществе, так и у отдельной личности, например — знания, области применения которых неизвестны; знания о способах деятельности без умения их осуществлять. Однако с точки зрения структуры *профессионального опыта* важно то, что между указанными его элементами имеются тесные взаимосвязи. И. Я. Лернер сводит все эти данные в следующую схему, подчеркивая, что "эмоционально-чувственный опыт, отражая и формируя потребности человека, обусловливает соотнесение окружающей действительности и деятельности человека с его потребностями и мотивами".

Однако сама приводимая им схема не дает правильного представления о важность этого последнего элемента профессионального опыта, хотя уже с социальной точки зрения именно этот элемент определяет и структуру системы образования, и требования, определяемые ее стандартами, программы, по которым осуществляются образовательные процессы, и т.д. Для дальнейшего существенно, что этот четвертый элемент всякого профессионального опыта имеет в качестве своего ядра то, что является одной из составляющих *мировоззрения*.

"Мировоззрение — это система взглядов на объективный мир и место человека в нем, на отношение человека к окружающей его действительности и самому себе, а также обусловленные этими взглядами основные жизненные позиции людей, их убеждения, идеалы, принципы познания и деятельности, ценностные ориентиры. Мировоззрение — не все взгляды, а их предельные обобщения."[1]

Из истории человеческого общества, в частности, из истории науки, хорошо известно, что (научное) мировоззрение играет определяющую роль в процессе развития, принятия новых идей и представлений, и что изменение имеющегося мировоззрения происходитскачкообразно (в этом случае говорят о его ломке). Более того, поскольку и научная работа, и преподавание связаны с деятельностью отдельного индивидуума, в этих процессах играют важную роль его убеждения, точка зрения [2]. По этому поводу Г. Фройденталь пишет [51]: "Педагогиче-

[1]Большая Советская Энциклопедия.

[2]"Всякий носит в себе свое миропредставление, от которого не так-то легко

ская деятельность — это поиск верного пути воспитания в соответствии с искренними убеждениями. Педагогическая наука должна быть в первую очередь сознанием ответственности этих искренних убеждений. По-моему, это называется философией... Самые детальные исследования не могут заменить философию; напротив, они могут строиться лишь на правильной философской основе." Применительно к преподаванию это означает, что

*система научных, предметных и педагогических знаний, умений и навыков преподавателя (далее — система знаний) реализуется в его практической работе (далее — педагогической практике) через имеющуюся у него систему представлений/убеждений о сути данной науки и ее методов и возможности их реализации в процессе преподавания данного предмета (далее — системе убеждений).*

Поэтому одной из важнейших задач в процессе воспитания преподавателя в (педагогическом) университете должно быть формирование правильной системы убеждений.

Решение этой задачи затруднено тем, что, как отмечено в [76], убеждения/представления о преподавании формируются уже в среднем учебном заведении и играют роль фильтра, через который к студенту (педагогического) университета поступает новая информация. Как указывает Г. Фройденталь [51, с. 51], студенты часто относят к наиболее ценным качествам учителя те стороны его преподавания, которые им самим, как его ученикам, облегчали изучение предмета, например, *умение хорошо объяснять*. Вообще, будущие преподаватели часто видят свою педагогическую деятельность в воссоздании тех уроков, на которых они сами присутствовали как ученики [65].

Поэтому одной из первых задач в процессе формирования правильной системы представления является "высвобождение от давления традиционных убеждений" [51]. Однако решение ее является непростым делом, поскольку, как показано в [67], программы часто не приносят успеха в изменении представлений о преподавании, если только в них не используется новый для студентов подход, который они впоследствии признают удачным.

Однако в существующих в настоящее время концепциях подготовки преподавателей, например, в описанной в главе 1 концепции профессионально-педагогической направленности обучения, решение указанной проблемы не рассматривается в качестве одной из основополагающих задач, определяющих успешность профессиональной подготовки.

---

отрешиться."— А. Пуанкаре [44].

В последние годы за рубежом возродился интерес к исследованиям по проблеме связи убеждений начинающих учителей с их практической деятельностью, а также по вопросу создания условий, способствующих изменениям в системе представлений будущих и работающих учителей. В работе [87] показано, что когда учителям предоставляется возможность размышлять о своем преподавании с точки зрения возможных изменений в нем, обсуждать эти проблемы со своими коллегами, они могут и действительно меняют свою практику преподавания (*classroom practice*). Р. Бораси [65] отмечает, что для того, чтобы будущие преподаватели могли произвести объективную оценку своих собственных убеждений, посмотрев на них как бы со стороны, необходимо такое обучение, которое предоставляло бы им возможность анализировать и переосознавать эти убеждения в соответствии с получаемым ими математическим образованием. По этому поводу в работе [69] приведена схема, характеризующая связи между педагогическими знаниями, убеждениями и практикой преподавания.

Название этой статьи "Изменение убеждений будущих учителей через рефлексивный анализ и углубление педагогических знаний" [3] отражает суть проведенного исследования и педагогического эксперимента. Как пишут ее авторы, оно "продемонстрировало, что занятия по специальной программе, вовлекающей будущих учителей в совместное выполнение учебных заданий, дающее им постоянные возможности для рефлективного анализа своей преподавательской деятельности и способствующее постоянному углублению их педагогических знаний, влияет как на их представления о преподавании, так и на их практическую деятельность. Причем изменения, происходившие в практике их преподавания, являлись отражением изменений в их представлениях о сущности процессов научения и обучения".

Основной вывод, который можно сделать из анализа результатов всех этих исследований, состоит в том, что

*изменение и формирование правильной (научной) системы убеждений будущих преподавателей математики о сути и методах образовательного процесса происходит только через осознание их роли, следующее из анализа конкретного педагогического процесса.*

Однако, в отличие от основного метода, описанного в статье [69], в качестве такого конкретного процесса может быть использован сам процесс обучения будущих преподавателей.

[3]"Changing prospective elementary mathematics teachers' beliefs through reflective analysis and enhanced pedagogical knowledge"

Итак, *принцип рефлексии* в процессе обучения состоит

*в использовании процесса научения для анализа роли используемых методических принципов и частных методик в результативности процесса обучения и, как следствие, формирование системы убеждений будущих преподавателей.*

Этот принцип является одной из составляющих формулируемого в следующем параграфе *принципа интегративности* подготовки преподавателей и заменяет собой принцип бинарности концепции ППНО.

### 2.1.3 Формы професионального педагогического опыта

В статье [78] К. Ратвен обсуждает одну идею, предложенную министерством образования Великобритании. В соответствии с ней предполагалось готовить будущих учителей преимущественно — даже исключительно — в школах, возложив задачу по их подготовке (и ответственность за нее) на практикующих учителей. По этому поводу К. Ратвен приводит результаты опросов, проводившихся во французских школах. “В основной своей массе учителя считают, что нет никакого верного пути готовить к трудной учительской стезе, что учиться придется уже во время непосредственной работы с классом, что опыт очень трудно передать, что они не могут предложить никаких рецептов и сами не знают, почему они добиваются успехов при работе с одним классом и только неудач — с другим. Все, что они могут сделать — это разрешить студентам присутствовать на их уроках, которым они (учителя) не могут дать никакого теоретического обоснования или же сформулировать некоторую общую модель обучения” [73, с. 59–60]. В работе [75] Макинтайр (D. McIntyre) также высказывает критичное отношение к таким традиционным формам обучения будущих преподавателей, как присутствие на уроках и наблюдение за работой опытных учителей и опыт первоначального преподавания, отмечая, что в большинстве случаев наблюдение за ходом урока нерезультативно по следующим двум причинам: студенты не понимают, на что следует обращать внимание, а учителя не знают, что в их практике следует подчеркнуть. В отношении собственного опыта преподавания он говорит, что при отсутствии систематического анализа и критического обсуждения проводимых студентом занятий все сводится к полусознательным действиям по методу проб и ошибок (*trial-and-error*) которые направляют и результативность которых как бы оценивают сами обучаемые.

Эти результаты, во-первых, подтверждают выводы, сделанные в предыдущем разделе, а во-вторых, указывает на наличие таких компонент педагогического опыта отдельных личностей, которые не содержатся в социальном педагогическом опыте. К примеру, в [81] выделена такая форма, как “знание-в-действии” (*knowing-in-action*; в связи с отсутствием адекватных русских терминов здесь и далее приводятся также оригинальные названия). В работах [71,72] (см. также [70]) произведен анализ планов уроков, составленных новичками и опытными учителями, различия между которыми оказались очень глубоки. Прежде всего отмечено, что в планах опытных учителей содержится широкий репертуар стандартных частей уроков, часто обозначенных двумя-тремя словами, такими как “вечер с пиццой” (*a pizza party*), в то время как новичкам недоставало как широты в использовании таких стандартных кусков, так и ясности и точности в их обозначении. Далее, в планах опытных учителей была ярко выражена их направленность на активизацию познавательной деятельности самих учащихся и, кроме того, приведены контрольные вопросы для оценки понимания учащимися изучаемого материала. Наконец, сама форма, в которой были написаны эти планы, со всей очевидностью свидетельствовала о более глубоком понимании опытными учителями логики и необходимой последовательности в изложении.

В связи с этим в статье [78] рассматриваются различные формы профессиональных знаний и анализируется, в какой степени каждая из них может быть получена на основе, так сказать, “внутришкольного обучения”.

Одна из давних традиций в педагогической деятельности состоит в выделении и формулировании того, что называется “опытом работы”. Результатом этой работы являются многочисленные учебники, задачники, учебные и методические пособия, являющиеся источником для той деятельности, которую принято называть “хорошей практикой преподавания математики”. К. Ратвен называет такую форму педагогических знаний *практическим (прагматическим) знанием (pragmatic wisdom)*, подчеркивая тем самым, во-первых, само ее происхождение, а во-вторых, роль этой формы как образца для подражания в практике преподавания.

Данная форма педагогических знаний безусловно входит в состав социального педагогического опыта, и, тем самым, может быть передана конкретному индивидууму. Однако приведенные выше примеры показывают, что каждый работающий учитель имеет интуитивные представления, такой индивидуальный опыт, который не нашел своего выражения (отражения) в знаковой системе; это та форма педагогических знаний, которой обладают отдельные личности, но которая тем не менее не входит в обобщенный социальный опыт, т. е. *интуитивное (невыраженное) знание; tacit expertise — unarticulated knowledge*.

В связи с этим обратимся к знаковой концепции научения. В основу этой концепции положены смысловые связи, или, как их еще называют, знаковые связи. Л. С. Выготский показал, что появление у человека особой формы отражения реальности — понятий и специальной системы знаков — языка для обозначения понятий и их отношений дало возможность осваивать накопленные человечеством знания об общих свойствах реальности. Знаковая концепция характеризуется следующими параметрами:

сущность научения — формирование у учащихся понятий и их систем, отражающих существенные отношения реальности;

содержание научения — обнаружение и использование этих отношений, отображение их в понятиях и закрепление в словах;

условия научения — выявление и абстрагирование отношений, значимых для общественной практики, установление их характера и общности, закрепление их в словах;

основа научения — образование знаковых отношений между понятиями и соответствующими им терминами, между понятиями и отображенными в них реальными отношениями.

Обучение есть формирование системы понятий и принципов, того, что применительно к научению преподавательской деятельности К. Ратвен называет *научным (обоснованным) знанием, grounded science*, а не есть только накопление суммы знаний, даже отражающих содержание практического знания.

Подчеркнем, что целью подготовки студентов является научить их преподавать; перефразируя то, о чем писал Г. Фройденталь [51], скажем: “не преподавать нечто вполне конкретное, а преподавать вообще”. И далее у него же (по несколько другому, но тесно связанному с рассматриваемым, поводу): “всему конкретному, отдельно взятому можно обучить при необходимом усилии, особенно если это конкретное незначительно и не требует глубины понимания”.

В данной работе как раз и вводятся такие новые принципы и понятия, которые связаны с процессом подготовки преподавателей профильных школ на математических факультетах университетов, но которые, безусловно, будут иметь более широкое применение. Изложению этих принципов посвящен следующий параграф данной главы.

### 2.1.4 Элементарная математика и “высшая” математика

Основная разница между элементарной и “высшей” математикой состоит в уровне абстракции при образовании используемых понятий. *Число* и *фигура* — это понятия первого уровня в отличие, к примеру, от понятия *гильбертово пространство* или таких (общематематических, но почти философских) понятий, как *категория* и *функтор*. По этому поводу Б. В. Гнеденко [11] писал: “Конечно, первоначально эти понятия были тесно связаны с конкретными задачами и представлениями. Позднее подмечалось, что к таким же понятиям приводят и другие вопросы. Тесные связи с данной задачей разрушались, и математическое понятие приобретало общность; его определение становилось абстрактным. Далее оказывалось, что операции, связанные с этим понятием, имеют место и для других понятий, возникших в математике по другим поводам. Возникала потребность в формировании более общего понятия. При этом базой для его формирования были уже не непосредственные представления о реальных объектах, а абстракции, сложившиеся ранее. Так появлялись абстракции над абстракциями.”

Сила математического метода рассуждений во многом связана с возможностью образования понятий следующего уровня абстракции. Хорошие примеры приводит в своей книге [51] Г. Фройденталь, один из которых в несколько анекдотичной форме показывает возможность использования глубокой абстракции для многократного повышения емкости изложения и связан как раз с понятием категории[4].

Однако именно разрыв в уровне используемой абстракции в изложении математики в школе и университете определяет диалектическое противоречие между возможностью изложения материала и возможностью его восприятия учащимися/студентами.

[4]“К одному профессору пришел инженер с готовой диссертацией объемом 30 страниц. Бегло пролистав рукопись, профессор сказал: “Это напоминает о категориях. Вы знаете категории?” “Нет”, — ответил диссертант и отправился изучать категории. Чем современнее математика, тем она проще; оказалось, что эту работу с помощью категорий можно было изложить на трех страницах, что составило бы бедноватую диссертацию. Чтобы снова получить тридцать страниц, нужно было десятикратно увеличить содержание...”

Об этом очень хорошо сказал Ф. Клейн [28], имея в виду подготовку преподавателей для средних учебных заведений в университетах; эти слова, хотя были сказаны в другую эпоху и в другой стране, не потеряли своей актуальности и поныне: "Вступая в высшую школу, молодой студент оказывается лицом к лицу с такими задачами, которые совершенно не напоминают ему того, чем он до сих пор занимался; естественно, что все это он быстро и основательно забывает. Когда же он заканчивает университетское образование и становится преподавателем, то он вынужден в качестве учителя преподавать традиционную математику; не будучи в состоянии самостоятельно связать эту задачу с тем, что он слышал в высшей школе, он быстро усваивает старую традицию, университетское же образование остается у него только в виде более-менее приятного воспоминания, не оказывающего никакого влияния на его преподавание." К этим словам нужно добавить, что, как было отмечено выше, система убеждений о сути и методах преподавании математики формируется на этапе школьного обучения и является достаточно устойчивой, "обогащаясь", так сказать, в процессе обучения в университете стремлением к дедуктивно-формально-логическому изложению материала. Конечно, в преподавании математики в современной школе сейчас также присутствуют абстракции более высокого уровня, но это в большой степени определяет трудность их восприятия учащимися.

На историческом пути школьное математическое образование прошло через этап, который можно назвать его "бурбакизацией". Характерным памятником этой эпохи является книга Л. Феликс [50], в предисловии к которой говорится, что "задача изложения заключается по существу в том, чтобы выбрать определенные предложения в качестве аксиом и показать, что их достаточно для вывода прочих результатов рассматриваемой теории... Начала математики, построенные таким образом, имеют абстрактный характер... Они составляют введение в изучение структур "самих по себе", как "чистых культур", по выражению профессора Дьедонне"[5]. Яркий контраст этому стилю представляет мысль Ф. Клейна о том, что "изложение в школе, выражаясь образно, должно быть *психологическим*, а не *систематическим*. Учитель должен быть, так сказать, дипломатом; он должен учитывать и душевные движения юноши, он должен уметь возбудить его интерес, а это будет ему удаваться только тогда, если он будет излагать вещи

[5] книга которого "Линейная алгебра и элементарная геометрия" есть яркий пример изгнания геометрического духа из основных понятий элементарной геометрии.

в наглядной, доступной форме. Лишь в старших классах возможно и более абстрактное изложение".

Книга [28], написанная Феликсом Клейном, была первой, в которой понятия, идеи и методы элементарной математики излагались и трактовались с точки зрения "высшей" математики. Другой пример 'интегрированного' изложения дают книги Дьердя Пойа, в которых автор подходит к вопросам "высшей" математики от предлагаемых им задач, часто имеющих вполне элементарные формулировки. К сожалению, указанные книги Ф. Клейна и Д. Пойа (с идеями которых должен быть хорошо знаком каждый преподаватель) трудно использовать в качестве учебных пособий. Сам Ф. Клейн в предисловии к [28] указывал: "я хочу только высказать в заключение пожелание, чтобы настоящая книга оказалась полезной тем, что побудит иного учителя нашей средней школы к самостоятельному размышлению о новом, более целесообразном изложении того учебного материала, который он преподает."

Этот экскурс в историю был предпринят с той целью, чтобы показать правомерность и актуальность постановки следующего вопроса:

Что же следует понимать под фундаментальным образованием в области элементарной математики?

В данном разделе будут указаны некоторые основные характеристики, связанные с принципом *фундаментальности* этой подготовки. К таковым следует отнести:

— умение проводить рассуждения на уровне использования понятий и их свойств и на современном математическом языке, в частности, использование понятий, связанных с определением функции при решении уравнений/неравенств и их систем;

— умение видеть те разделы математики, которые связаны с данной конкретной задачей, сформулированной в иной предметной области, и использовать методы этих разделов при ее решении;

— использование математических абстракций для выявления и демонстрации единства понятий и методов, вводимых и применяемых в различных разделах школьной математики;

— формирование математического стиля мышления; умелое использование правдоподобных рассуждений и эвристических соображений при поиске решений задач вместе с умением строить на их основе строгие обоснования решений;

— постоянное применение геометрической наглядности, использование геометрических интерпретаций и переформулировок.

Приведем один пример (см., к примеру, [23, глава 5]). Вопрос об общей форме для так называемых *пифагоровых троек*, т. е. целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, связан с существованием параметризации окружности при помощи рациональных функций. С другой стороны, к аналогичной задаче сводится и проблема выражения интегралов от квадратичных иррациональностей через элементарные функции. Далее, принципиальное отличие уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n \geqslant 3$ от уравнения, определяющего пифагоровы тройки, в том что, как нетрудно показать, так называемая кривая Ферма — плоская кривая, задаваемая уравнением $x^n + y^n = 1$ — не допускает (при $n \geqslant 3$) никакой рациональной параметризации. Подчеркнем, что доказательство последнего утверждения использует средства и технику математического анализа.

Указанные характеристики содержат в себе те качества, совокупность которых М. М. Буняев [4] называет *математической культурой*: "определенный уровень сформированности математического мышления; умение грамотно изложить и объяснять производимые действия; наличие представлений о многообразии специфических для математики понятий и операций, о возможностях, представляемых математикой для науки и техники; понимание внутренних связей между различными разделами математики".

Из вышесказанного следуют два вывода:

1) фундаментальное образование в области элементарной математики необходимо включает в себя задачу формирования математической культуры будущего преподавателя, в частности, знание совокупности понятий и фактов "высшей" математики как целостной системы знаний в их взаимосвязях с понятиями, утверждениями и конкретными задачами элементарной математики;

2) совокупность таких понятий, фактов и взаимосвязей входит в группу *целевых знаний* (по Г. В. Дорофееву [17]) применительно к процессу подготовки будущего преподавателя профильного среднего учебного заведения.

### 2.1.5 Специальная математическая и методическая подготовка. Основная гипотеза

В соответствии с утвержденным в 1994 году "Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования" (см., к примеру, [32]), учебный план университетской специальности

01.01.00 “Математика” включает в себя циклы:

общих гуманитарных и социально-экономических дисциплин;

общих естественно-научных дисциплин;

общепрофессиональных и специальных дисциплин;

дисциплин специализаций;

факультативных дисциплин,

а также (производственную) практику и выполнение квалификационной работы.

В главе 1 данной работы были приведены утвержденные в 1995 году “Государственные требования” к минимуму содержания и уровню профессиональной подготовки выпускника для получения дополнительной квалификации “Преподаватель”. Из проведенного в данном параграфе анализа со всей очевидностью следует недостаточность учебного времени, отведенного в соответствии с этими требованиями на изучение дополнительных дисциплин для получения всего комплекса знаний, умений и навыков, необходимых преподавателю математики профильного среднего учебного заведения.

**Основная гипотеза** данного исследования заключается в том, что целей подготовки преподавателей для профильных средних учебных заведений на математических факультетах университетов при сохранении их подготовки в определенной научной области можно добиться путем:

— корректировки направленности преподавания и содержания дисциплин, входящих в первые два цикла;

— введения общего курса методики преподавания математики;

**— выделения блока дисциплин специальной математической и методической подготовки**, направленных на формирование базового педагогического опыта будущих преподавателей, в том числе на приобретение ими необходимых знаний, умений и навыков, на основе имеющихся у студентов фундаментальных знаний в области математики, психологии, педагогики, методики преподавания математики при условии реализации деятельностного подхода к обучению;

— индивидуализации обучения студентов педагогической специализации.

Корректировка блока естественно-научных дисциплин для будущих преподавателей связана с естественностью введения в него курса астрономии и некоторого изменения курса физики, предметов, наиболее близких математике с точки зрения установления межпредметных связей в школьном курсе. Естественно, что общий курс методики преподавания математики имеет для будущих педагогов фундаментальное значение. Что касается индивидуализации обучения студентов, то, во-первых, здесь можно применить разработанные В. А. Гусевым (применительно к обучению в средней школе) и З. О. Шварцманом [59] принципы и методы, а во-вторых, самой университетской системе присущ индивидуальный подход к обучению.

Таким образом, основное направление исследований, разработки программ курсов, практических рекомендаций и методических разработок, выполненных автором, связано с блоком дисциплин специальной математической и методической подготовки. Подчеркнем, что поставленная проблема потребовала принципиально иного, чем существовавшие до сих пор, подхода, выделения новых принципов обучения, разработки методик отбора содержания и методического построения лекционных курсов, организации занятий специальных семинаров и практикумов. Изложению этих принципов и их теоретическому обоснованию посвящен следующий параграф данной работы.

В заключение данного раздела приведем следующую цитату, имеющую непосредственное отношение к применяемой автором методологии исследования принципов построения системы подготовки будущих преподавателей.

“Правильно проведенная методология поиска истинной действительности всегда приводит студента к постижению не только ее конкретности, но и всеобщности. Преподаватель, включая в учебный процесс эту действительную сторону математики, раскрывая там, где это возможно, естественную структуру ее, способствует формированию научного мировоззрения студентов. А, с другой стороны, преподаватель делает свой предмет богаче, он, говоря словами Гегеля, “обогащается противоположностью” [21].

## 2.2 Основные принципы построения системы специальной математической и методической подготовки

### 2.2.1 Интегративные лекционные курсы. Пучки понятий и утверждений

Основным принципом построения системы специальной математической и методической подготовки будущих преподавателей профильных школ является *принцип интегративности* этой подготовки. Однако развернутая формулировка указанного принципа будет дана лишь в последнем разделе данного параграфа, поскольку этот принцип имеет достаточно глубокую внутреннюю структуру, отражающую методическую сложность самой системы специальной подготовки, а его формулировка использует несколько других вводимых в данной работе принципов. В данном разделе будет рассмотрено одно конкретное проявление интегративного подхода, связанное с понятием *интегративного лекционного курса.*

Непосредственной предпосылкой для выделения принципа интегративности послужила опубликованная в журнале "Математика в школе" статья Г. Г. Хамова [52], в которой подчеркивалась недостаточность подготовки выпускников педагогических вузов в области элементарной математики, что связано, по мнению автора, с тем "что многие вопросы элементарной математики (особенно те, которые относятся к повышенной трудности) или совсем не рассматриваются ... или изучаются вне связи с задачами подготовки будущего учителя". А в результате, к примеру, "оказывается утерянной элементарная составляющая теории многочленов от нескольких переменных, включающая формулы сокращенного умножения, свойства однородных многочленов, замечательные тождества (Эйлера, Лагранжа) и их приложения к решению задач. Многие замечательные неравенства: Коши–Буняковского, Бернулли, неравенства между средним арифметическим, средним гармоническим, средним геометрическим и средним квадратичным $n$ неотрицательных чисел — будущие учителя либо не знают, либо не могут их применить ни к доказательству других неравенств, ни к элементарному определению экстремумов некоторых функций".

Далее Г. Г. Хамов пишет, что:

"Преодоление указанных недостатков мы видим во введении в пединститутах интегративных математических курсов, соединяющих элементарную и высшую математику, в сохранении практикума по решению элементарных задач и в создании на этой базе условий для непрерывного пополнения знаний, умений и навыков в области элементарной математики. Они позволят:

1. Обеспечить преподавание математики специалистами, имеющими серьезную математическую подготовку.

2. Поставить преподавателей основных математических дисциплин педвузов в условия, требующие от них глубокого знания не только школьного курса математики, но и разделов математики, не изучае-

мых в средней школе.

3. Более основательно реализовать принципы профессионально-педагогической направленности обучения.

4. Усилить мотивационный аспект обучения с помощью плавного перехода от элементарной математики к высшей, применения элементов высшей математики к решению задач элементарной математики, обоснование некоторых теоретических положений элементарной математики с точки зрения высшей.

5. Более эффективно осуществлять пропедевтическую линию в обучении математике, готовить студентов к сознательному усвоению разделов высшей математики, что даст возможность оптимизировать обучение с точки зрения как критериев оптимизации, так и профессионально-педагогического подхода к обучению математике.

6. Расширить возможности для реализации деятельностного подхода в обучении математике; сочетание элементарной математики и высшей будет стимулировать развитие творческих способностей студентов, увеличит их возможности для самостоятельных открытий.

7. Осуществлять более плавный переход от школьного уровня строгости к вузовскому, используя промежуточный, если возможно, элементарный уровень, но более строгий, чем в школе."

По-видимому, многим профессиональным математикам-преподавателям понравилась бы идея создания такого лекционного курса, предмет которого — "математика в целом", без традиционного деления на алгебру, геометрию, анализ и т.д. К примеру, в предисловиии к книге "Mathematics and its history" [84] Дж. Стилвелл пишет, что: "Одно из разочарований, испытываемых моими студентами, состоит в том, что они никогда не изучают математику. Они слушают лекции по анализу, алгебре, топологии и т. д., и такое деление не дает им возможности увидеть математику в ее целостности. Цель этой книги состоит в том, чтобы дать общий взгляд на фундаментальные математические дисциплины с точки зрения истории математики." И далее: "Младшекурсники могут проинтегрировать $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, но им говорят, чтобы они не мучались, пытаясь взять интеграл от $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$. Почему? Исследование истории вопроса оказывается плодотворным, поскольку приводит к более глубокому пониманию, к примеру, комплексного анализа и алгебраической геометрии."

Специфика математики требует строго последовательного подхода к изложению нового материала: рассматриваются конкретные примеры, вводится некоторое определение, к примеру, группы, изучаются свойства объектов, удовлетворяющих этому определению, рассматриваются примеры таких объектов, вводятся новые определения, связанные с исходным (*отображение одной группы в другую называется гомоморфизмом, если ...*), доказываются новые теоремы, и т.д., и т.п. Конечно, порой обращается внимание слушателей на то, что в результате проделанного рассмотрения получено обобщение известного ранее понятия, либо же демонстрируется его связь с другими разделами математики ("группа движений плоскости"), однако при традиционном изложении математических дисциплин примеры второго из указанных типов взаимосвязей достаточно редки. Специфика математики как науки часто требует доказательства большого числа утверждений вспомогательного характера (как и в разделе 2.1.4 — см. [17]), характерный пример — теоретико-множественная топология с ее обилием эквивалентных определений и достаточно простых фактов, из которых лишь один заслуживает имя — "теорема"; это утверждение о мультипликативности свойства компактности топологического пространства.

Другого пути при первоначальном изучении фундаментальных математических дисциплин в высших учебных заведениях, вообще говоря, нет. Однако следующий далее пример показывает, что иногда возможен и другой подход к построению материала, основанный на понятии *пучка понятий и утверждений.*

При изложении темы "Площадь и объем" в курсе геометрии для студентов 2-го курса педагогической специализации математико-механического факультета СПбГУ, читаемого автором данной работы, появляется следующая совокупность понятий, их свойств и взаимосвязей между ними: понятия площади и объема, их аксиоматики и два подхода к определению; равносильность равносоставленности и равновеликости многоугольников и третья проблема Гильберта; формула Грина для вычисления площадей плоских фигур, принцип Кавальери и теорема Фубини; лемма Цорна и существование базиса произвольного векторного пространства; инвариант (Дена); несоизмеримость и формулы удвоения для тригонометрических функций; неотрицательные аддитивные функции и "парадоксальные" аддитивные функции; определители и векторное произведение; движения плоскости и их координатное представление; свободные группы и их представления в группе вращений. А само изложение можно начать со следующих трех элементарных задач.

*Задача 1.* Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1,-1)$, $B(1,1995)$ и $C(1,1996)$ координатной плоскости.

*Задача 2.* Какова наименьшая площадь треугольника на координатной плоскости, координаты вершин которого целочисленны?

*Задача 3.* Докажите, что следующее число — целое:

$$\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{29})(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{29})}\times$$
$$\times\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{29}-\sqrt{5})(\sqrt{29}+\sqrt{5}-\sqrt{10})}.$$

Формула

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right| \tag{2.1}$$

для площади треугольника, объединяющая эти задачи, и без которой трудно решить вторую из них, является вполне элементарной. Кроме того (что полезно вспомнить студентам), она сразу следует из формулы для вычисления векторного произведения.

Совершенно неясно, каким путем ее можно обобщить до формулы, выражающей площадь многоугольника через координаты его вершин. Однако если мы перепишем ее в виде

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|, \tag{2.2}$$

то кажется вполне правдоподобным, что искомое обобщение — это формула

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}\right| \tag{2.3}$$

(здесь для удобства записи $x_{n+1}=x_1$ и $y_{n+1}=y_1$).

Один из способов доказать это обобщение — проверить, что правая часть формулы (2.2) определяет функцию, определенную на всех многоугольниках и удовлетворяющую аксиомам площади. Проверка инвариантности относительно движений связана с координатным представлением движений плоскости. Кстати, из формулы (2.2) при помощи предельного перехода можно получить формулу Грина, выражающая площадь плоской фигуры через интеграл по ее границе.

Естественно возникает вопрос: а как дать определение площади многоугольника? Подход, связанный с определением площади треугольника по стандартной формуле и распространение определения на произвольные многоугольники путем их разрезания на треугольники, натыкается на трудность доказательства корректности, т.едоказательство независимости суммы площадей полученных треугольников от способа разрезания исходного многоугольника. При стандартном школьном определении площади (при помощи палетки) далеко не очевидна инвариантность относительно движений. Третий подход как раз связан с определением площади по формуле (2.2).

Равновеликость равносоставленных многоугольников (и многогранников) непосредственно следует из свойств площади (объема). Равносоставленность равновеликих многоугольников доказывается не слишком сложно, хотя необходимо отметить, что мы не можем *a priori* оценить число кусков, на которые необходимо разрезать данные многоугольники (даже в том случае, когда они — прямоугольники!).

Третья проблема Гильберта — неравносоставленность куба и правильного тетраэдра — интересна как с исторической точки зрения, поскольку это, пожалуй, единственная из проблем Гильберта, решение которой доступно студентам, так и с математической. Введенный Деном нетривиальный инвариант, связь со школьной математикой — иррациональность $\arccos\frac{1}{3}$, доказываемая через формулы удвоения, "парадоксальные" аддитивные функции на числовой прямой, доказательство существования которых использует лемму Цорна — использование всех этих настолько различных математических идей для доказательства неравносоставленности куба и тетраэдра очень поучительно.

Итак, *пучком понятий и утверждений* называется такая совокупность понятий и утверждений некоторого лекционного курса, которая

*обеспечивает совместное и одновременное изучение взаимосвязанных понятий, что выявляет, с одной стороны, сложную природу математического знания, а с другой стороны — способствует достижению системности знаний.*

(ср. [61] и см. следующий раздел данного параграфа).

На основании этого определения мы теперь в состоянии ввести основное понятие данного раздела.

Будем называть *интегративными* такие лекционные курсы, которые отличаются от традиционных университетских математических курсов следующими двумя особенностями:

- *во-первых, изложение материала в них происходит не линейно* *(т. е. не строго последовательно), а группируется вокруг определенных понятий, математических идей и утверждений, образующих то, что было названо выше пучками понятий и утверждений;*

• *во-вторых, в этом изложении понятия и идеи элементарной (школьной и внешкольной) математики связываются с общими математическими понятиями, идеями и утверждениями, которые известны студентам по базовым университетским математическим курсам.*

Исторически первый пример интегративного изложения был дан Ф. Клейном в его "Элементарной математике с точки зрения высшей". К сожалению, великолепные книги [28, 41, 42] (с которыми должен быть знаком каждый преподаватель) не являются учебниками, поэтому возникает задача реализации высказанной идеи интегративности, т. е. построения конкретных интегративных курсов. Автором разработан и в течение ряда лет читается курс "Избранные главы элементарной математики" (см. [23]), который, в частности, содержит материал, традиционно входящий в курсы типа "Научные основы школьного курса математики", читаемые в высших педагогических учебных заведениях. Подчеркнем, что интегративный характер курса "Избранные главы ..." усилен единством его

• конкретного содержания: набор задач кружкового плана; изложение оснований школьной математики; изложение дополнительных разделов школьной и "высшей" математики;

• методического содержания: связью идей и методов элементарной и "высшей" математики; обобщающим повторением понятий и утверждений базовых математических курсов;

• и частной методики: переходом от элементарных задач к вопросам "высшей" математики, связанными либо с обоснованиями, либо с обобщениями различных утверждений и задач, путем рассмотрения пучков понятий.

Это последнее качество является проявлением *принципа полифоничности* (см. раздел 2.2.4).

Отбор материала для интегративных курсов представляет сложную, но одновременно и интересную задачу. Разумеется, такие лекционные курсы, являясь надстройкой над базовыми математическими, не могут их заменить. С другой стороны, для последовательного изложения всего того, что должен знать учитель профильного среднего учебного заведения, не хватит никакого учебного времени, в то время как построение курсов по интегративному принципу позволяет оптимизировать процесс обучения.

### 2.2.2 Пучки задач как методическая основа построения практикумов по решению задач

Если теоретико-методической основой понятия интегративного лекционного курса является понятие “пучок понятий и утверждений”, то применительно к проблеме построения системы практикумов по решению задач подобную теоретико-методическую роль играет понятие *пучок задач.* С точки зрения практического использования пучков задач, близкими к нему являются такие хорошо известные и давно разрабатываемые понятия, как *серии и циклы взаимосвязанных задач.* Укажем на одно принципиальное отличие *пучков* от *серий (циклов).* Теоретической основой введения и использования понятия “пучок задач” являются результаты исследований, проведенных П. М. Эрдниевым и Б. П. Эрдниевым, связанных с их *методом укрупнения дидактических единиц* (УДЕ) (см., к примеру, [61]). Введение и практическое использование понятия “пучок задач” подтверждает сказанные ими слова, что “общность выводов теоретического анализа позволяет предвидеть и выгоды переноса указанной методической системы с младших классов на старшие, от школьной практики в вузовскую дидактику” [61] (и далее все ссылки на понятия и выводы метода укрупнения дидактических единиц приводятся по этой книге).

Характерный недостаток структуры многих учебников и задачников состоит в изолированности упражнений друг от друга, а когда слишком долго отрабатывается преобразование или правило, представления учащихся поневоле пребывают в фазе необобщенных “элементарных знаний”. Центральную роль в методе УДЕ является понятие укрупненной дидактической единицы как клеточки учебного процесса, состоящей из логически различных элементов, обладающих в то же время такой общностью, которая обеспечивает такие качества УДЕ, как системность и целостность, устойчивость к сохранению во времени и быстрое проявление в памяти. Как пишут в своей книге П. М. и Б. М. Эрдниевы:

“Понятие УДЕ вбирает в себя следующие взаимосвязанные подходы к обучению: 1) совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций, функций; 2) обеспечение единства процессов решения и составления задач; 3) рассмотрение во взаимопереходах определенных и неопределенных заданий; 4) обращение структуры упражнений, что создает условия для противопоставления исходного и преобразованного знаний; 5) выявление сложной природы математического знания, достижения системности знаний; 6) реализация принципа дополнительности в системе упражнений (понимание достигается в результате межкодовых переходов между образным и логическим в мышлении, между его сознательным и подсознательным компонентами)."

И далее там же: "если освоение знаний осуществляется укрупненными порциями, то создаются лучшие условия для возникновения и системного качества знаний, ибо элементы знания образуют укрупненную единицу усвоения лишь благодаря многообразным связям между этими элементами".

С теоретико-методической точки зрения представляется необходимым выделить из совокупности приведенных выше сторон УДЕ те ее качества, которые являются определящими; данное авторами перечисление отчасти является излишне конкретным (ср., к примеру, пункты 4 и 5). Для этого следует проанализировать суть следствий, получаемых на основе результатов современных исследований в области физиологии высшей нервной деятельности (П. К. Анохин) и психологии (А. Н. Леонтьев). Согласно современным представлениям физиологов и психологов центральным явлением психической жизни человека выступает образование функциональных систем — ансамблей нейронов — "специализирующихся" на решении сходных в чем-либо познавательных задач, а в основе всей психической деятельности находятся циклические, кольцевые процессы, поток информации по замкнутым путям. Его характерная особенность состоит в том, что он может быть начат с любого цикла умозаключений и тем не менее привести к проявлению всех элементов и связей цикла. Основной теоретический вывод, сделанный П. М. и Б. П. Эрдниевыми и лежащий в основе метода УДЕ, состоит в том, что из этих результатов следует, что в качестве основной характеристики УДЕ, той, которая и определяет ее основные качества, следует рассматривать включение механизма *обратной связи* в процесс мышления.

В рассматриваемой книге в качестве одного из примеров включения механизма обратной связи взято использование так называемых *деформированных задач* [61]. По-видимому, специфика обучения младших школьников привела к тому, что приводимые ими конкретные примеры деформированных задач несколько однотипны. Однако само это понятие гораздо шире, к примеру, к данному типу принадлежат многие из задач из опубликованных автором методических и учебных пособий [22, 24, 25]. Приведем два примера подобных задач.

*Задача 4.* Определите знаки чисел $a, b, c$ по данному графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

*Задача 5.* Найдите (изобразите на плоскости) множество всех пар $(a, b)$, таких что неравенство $|x - a| + |x - b| \leqslant 2$ справедливо для всех $x \in [0; 1]$.

На рисунке изображены множества точек плоскости, координаты $(a, b)$ которых удовлетворяют неравенствам $|x - a| + |x - b| \leqslant 2$, при $x = 0$ и $x = 1$, — каждое из них есть квадрат, стороны которого параллельны биссектрисам координатных углов, а центры расположены в точках $O(0, 0)$ и $P(1, 1)$, соответственно; ясно, что искомое множество является их пересечением — выделено на рисунке.

Как сказано в [61], "структура одних упражнений такова, что при их выполнении развиваются навыки лишь в прямолинейном применении правил. Однако характер мыслительных процессов резко изменится, если использовать так называемые деформированные примеры. Такие задания развивают навыки самоконтроля. Где выполняются деформированные упражнения — включается механизм обратной связи".

Итак, дадим основное определение данного раздела. Будем называть

*пучком задач такую их совокупность, определяющей характеристикой которой является наличие разнотиповых взаимосвязей между отдельными составляющими эту совокупность задачами, обеспечивающее включение обратной связи в процессе их решения.*

Из приведенного определения следует, в частности, что пучок задач является укрупненной дидактической единицей, поэтому к процессу обучения, построенному с использованием пучков, применимы все выводы метода УДЕ.

Характерным примером пучка учебных задач является следующий набор из двух неравенств и одного уравнения.

*Задача 6.* Решите неравенства:

а) $\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}-3} \leqslant 1$;

б) $\dfrac{\log_2 x - \log_x 4}{\log_x x^2/8} \leqslant 2$.

в) Докажите, что уравнение $2\cos 2x = k(4\cos x - 3)$ имеет решение при любом целом $k$.

Рассмотрим типы взаимосвязей между составляющими этот пучок отдельными задачами (в данной формулировке — пунктами). Прежде всего следует отметить, что все эти задачи логически независимы. Далее, замены $t = \sqrt{x}$, $t = \log_2 x$ и $t = 2\cos x$ приводят к неравенствам/уравнению вида $f(t) = (\leqslant)a$ с одной и той же левой частью $f(t) = \frac{t^2-2}{2t-3}$ (общая линия преобразований в школьном курсе математики). Получаемое в пункте в) уравнение с параметром может быть исследовано алгебраически, что, однако, связано с решением четырех иррациональных неравенств; к тому же на этом пути учащиеся (и студенты!) часто допускают ошибку, игнорируя ограничение $|t| \leqslant 2$. Следующий, более глубокий тип взаимосвязи, являющийся производным от предыдущего, состоит в использовании функционально-графической линии школьного курса математики: короткое и ясное решение последней из задач (пункт в)) может быть получено путем построения графика функции $f$ (см. далее рисунок), рассматриваемого на объединении промежутков $[-2; 3/2) \cup (3/2; 2]$ и нахождения с его помощью множества значений функции $f$ на указанном объединении. Именно эта взаимосвязь имеет и прямой, и обратный характер, поскольку, с одной стороны, появление одного и того же выражения во всех трех случаях наводит на мысль рассмотреть функцию, заданную этим выражением и, как следствие, использовать функциональный подход, а, с другой стороны, необходимость этого подхода при решении последнего пункта приводит к идее графической интерпретации предыдущих двух неравенств, что, в частности, поможет избежать ошибки при решении второго из них — пропуска изолированной точки.

“Основной формой упражнений должно стать многокомпонентное задание”, более того, “синтетические упражнения целесообразно включать и в контрольные работы” [61]. Заметим, что хотя в рассмотренном примере и нет деформированных заданий, однако при его решении также развиваются навыки самоконтроля.

Таким образом, не обязательно: рассматривать одновременно решение и составление задач, изучать взаимосвязанные действия и теоремы; или же использовать деформированные задачи, для того, чтобы проявлялись основные качества метода УДЕ, — это все примеры конкретных ситуаций, в которых необходимо появляется обратная связь. Что касается упражнений в составлении задач и примеров, которые, как сказано в [61], “надо ввести в практику обучения как равноправные среди других упражнений”; об их использовании в процессе обучения будущих преподавателей см. [82].

Основной вывод, который можно сделать из приведенного анализа, заключается в том, что построение занятий практикумов по решению элементарных задач на основе пучков задач

• способствует построению системы фундаментальных знаний в области элементарной математики (в смысле пункта 2.1.4), отвечая при этом критерию оптимизации процесса обучения,

• а одно из проявлений принципа интегративности в соответствующей методике состоит в том, что "в этом случае система учебных заданий сливается с методикой обучения, становится почти неотличимой от указаний учителя (или преподавателя — *О. И.*) по организации учебной деятельности учащихся (студентов)" [30].

В заключение данного раздела укажем еще одну связь основных положений метода укрупнения дидактических единиц и подхода, разработанного в исследованиях автора данной работы. Понятие пучка понятий и утверждений, введенное в предыдущем разделе, удовлетворяет определению УДЕ, а одна из содержательно-методических линий, проводимая в интегративных лекционных курсах, связана с обобщенным повторением, которое происходит именно в том ключе, который указан в [61]: повторение через преобразование знаний, через укрупнение, путем окружения основного понятия, наращивания и развитие знаний вокруг логического ядра, путем построения "спиральной структуры знаний, в которой каждый виток спирали образует внутренне целостную схему". И далее: "наибольший дидактический эффект получается при создании специфически нового учебного предмета, когда основные теоремы алгебры или анализа сопровождаются геометрическим толкованием, и наоборот".

### 2.2.3 Принцип кумулятивности обучения

Идеи, которые составляют содержание принципа, формулируемого в данном разделе, содержатся во многих работах. Возможно, что он имеет достаточно общий характер и применим к любому процессу обучения, здесь же мы рассмотрим его в связи с основной задачей настоящей работы — подготовкой преподавателя. П. Я. Гальперин [9] писал, что "все приобретения в процессе учения можно разделить на две неравные части: одну составляют новые общие схемы вещей, которые обусловливают новое их видение и новое мышление о них, другую — конкретные факты и законы изучаемой области, конкретный материал науки. По общей массе вторая часть намного превышает первую, но в такой же мере уступает ей в значении для развития мышления." К сожалению, во многих случаях изучаемый конкретный материал из определенной науки (предмета), или ее отдельной области, не складывается в систему знаний; учащийся (студент) оказывается "погребенным" под массой обрушивающейся на него информации, будучи не в состоянии самостоятельно структурировать ее, увидеть и осмыслить то, что П. Я. Гальперин называет "общей схемой вещей". Итог закономерен: такая информация и быстро забывается, и бывает некорректно использована. Примеры, связанные с изучением школьного курса математики, хорошо известны. Те же самые проблемы, даже в большей степени, характерны для процесса обучения в вузах. В второй половине 80-х годов на математико-механическом факультете СПбГУ проводилось специальное исследование, целью которого являлось определение уровня знания студентами старших курсов фундаментальных понятий базовых математических курсов и уровня их навыков в использовании основного математического аппарата. Его результаты были неутешительны, поскольку оказалось, что большая масса студентов обладает лишь формальными знаниями, у них плохо развито математическое мышление даже на вполне элементарном уровне, а имеющиеся навыки используют лишь сугубо формальную сторону математического аппарата, в связи с чем при его применении часто возникают грубейшие, с точки зрения математических понятий, ошибки. О формализме математических знаний А. Я. Хинчин [53] писал, что это есть "доминирование в сознании привычного внешнего выражения математического факта над содержанием этого факта".

Конечно, в дидактике математики имеются общие принципы *сознательности, активности и самостоятельности; систематичности и последовательности; прочности знаний* и в каждом из них, в частности, говорится о необходимости осознания приобретаемых учащимися знаний как элементов некоторой системы и о понимании взаимосвязей внутри этой системы. Однако есть и другие характеристики *системы знаний* личности (учащегося, студента, преподавателя и др.), те, которые характеризуют ее как *открытую систему*, рассматриваемую с точки зрения ее будущего развития.

Рассмотрим одну из общих идей построения обучения, которую формулировала еще Н. Ф. Талызина [49]. Анализируя трудности, возникающие в связи с лавинообразным нарастанием содержания образования (в высшей школе. — *О. И.*), она указывала на необходимость "выделять те структурные элементы, из которых слагаются любые частные явления этого предмета... Таким образом, отпадает необходимость изучать все частные явления данной области. Можно ограничиться лишь некоторыми из них, но изучать их не со стороны отдельных особенностей, а со стороны той сущности, проявлением которой они являются. Кроме того, на их примере следует раскрыть метод, позволяющий конструировать как эти явления, так и другие, входящие в эту систему". Следовательно, познание, во-первых, общей структуры и общих методов некоторой области (т. е. со стороны ее "сущности"), во-вторых, некоторых конкретных понятий, фактов и рассуждений (т. е. проявлений этой сущности) может обеспечить качественные сдвиги в развитии обучаемых при условиях, что это новое знание

1) приобретается во взаимосвязи с уже имеющимися у обучаемых знаниями, способствуя их дальнейшей структуризации и систематизации (структурообразующее качество новоприобретенного знания);

2) дает обучаемым достаточно полное представление об этой новой области, указывая тем самым возможное направление и формируя способности для дальнейшего развития образования (потенциальное качество новоприобретенного знания);

3) указывает на необходимость вводимых понятий и новых методов, к примеру, с точки зрения естественности используемых обобщений, ясности и красоты применяемых методов, тем самым формируя потребности к расширению и углублению системы знаний (эмоционально-мотивационное качество новоприобретенного знания).

Таким образом, суть *кумулятивного принципа обучения* состоит, говоря образно и коротко, в том, что

*необходимы такие этапы в процессе обучения, на которых относительно небольшое количество приобретаемой новой информации обеспечивает, так сказать, фазовый переход в системе знаний обучаемых и "большой взрыв" в их интеллектуальном развитии.*

Принцип кумулятивности тесно связан с такими параметрами в оценке интеллектуального развития личности, как *интеллектуальная восприимчивость*, т. е. способность к усвоению новой информации, и *интеллектуальная подвижность* — гибкость мышления [17]; хотя "в современной развитой системе наук любые элементарные конкретные знания ... представляют собой основы, на которых строятся эти науки, рассмотрение начальных знаний именно в этом качестве должно уступить место их трактовке как материала для интеллектуального развития учащихся". И далее в [17] сказано, что конкретные знания являются, с информационной точки зрения, определенной базой данных, предназначенной прежде всего для переработки (добавим, и использования. — *О. И.*) этой информации; а создание такой базы данных вместе с методическим механизмом организации ее структуры в процессе учебной деятельности есть центральная проблема методической системы обучения.

В этой связи интересен поднятый в статье [62] вопрос о представлении знаний, который, как сказано в этой статье, является "новым не только для дидактики, но и для классической психологии обучения". Однако приводимые примеры так называемых *фреймов (frame)* не совсем удачны. Б. П. Эрдниев, к примеру, говорит, что "примером удачного фрейма может служить шуточное "квадрат–тунеядец", позволившее ученику В. Ф. Шаталова *помнить все свойства этой фигуры через много лет*[6]". Здесь можно сделать два замечания: во-первых, это есть характерный пример формализма математических знаний (см. выше), во-вторых, а кому и зачем нужно помнить(!) свойства этой фигуры? Проблема представления знаний должна решаться прежде всего на основе исследований по физиологии высшей нервной деятельности. Правильным примером использования таких исследований для развития методики преподавания математики являются приведенные в предыдущем разделе результаты, связанные с методом укрупнения дидактических единиц [61].

В дополнение к сказанному в разделе 2.2.2 в связи с методом УДЕ и его отношению к введенному выше принципу кумулятивности обучения следует выделить указанный эффект "самоукрупнения знаний", обусловливаемый использованием укрупненных дидактических единиц. Как было показано в предыдущем разделе, основными характеристиками УДЕ, которые и определяют методический эффект от их применения, обладают пучки задач. Еще один эффект связан с образованием и использованием так называемых сверхсимволов, т. е. оперирования более длинными последовательностями символов. Феномен сверхсимвола заключается в том, что на восприятие одного сверхсимвола тратится времени почти столько же, сколько на один обычный символ.

Приведенные закономерности могут быть использованы для реализации принципа кумулятивности в процессе формирования практических умений и навыков. Реализация этого принципа в отношении развития системы теоретических знаний требует введения нового принципа в обучении, изложению которого посвящен следующий раздел.

[6]выделено мной. — *О. И.*

### 2.2.4 Принцип полифоничности

Вернемся к понятию системы знаний. Как указано, к примеру, в [7], формирование единой системы знаний происходит в три этапа:
1) отбор и накопление блоков–навыков;
2) объединение отдельных блоков в последовательности;
3) образование схемы из цепочек.
Если осуществление первых двух этапов возможно при первоначальном изучении материала, то естественным способом формирования и закрепления общей структуры изучаемого материала является *обобщающее повторение*, которому, к сожалению, не находится места в стандартных учебных планах и программах обучения в высших учебных заведениях. Необходимость введения целенаправленного обобщающего повторения в систему подготовки преподавателей для системы среднего образования связано прежде всего с решением проблемы формирования глубокой системы знаний. Как, к примеру, указывает В. А. Далингер [16], "отсутствие у учащихся умения обобщать есть одна из основных причин слабого овладения системой знаний. Поэтому на определенном этапе обучения необходимы перекомпоновки, соподчинения, систематизация материала, выявление новых связей и отношений между элементами изученной системы знаний. Это возможно при обобщающем повторении. Несмотря на большую результативность, обобщающее повторение проводится ... достаточно редко ... Обобщающее повторение проводится на уровне понятий, систем понятий и теорий. На повторительно-обобщающие уроки (занятия) следует выносить прежде всего материал, знакомящий учащихся с ведущими идеями курса и имеющий важное мировоззренческое значение, а также материал, который впоследствии из предмета изучения перерастет в средство изучения. Содержание обобщающих повторений можно строить либо на теоретическом материале, либо на системе упражнений, либо на сочетании теоретического и практического материала."

При проведении обобщающего повторения на уровне понятий используемые задания по своим функциональным назначениям можно разделить на несколько групп: а) способствующие воспроизведению факта, формулировки, рассуждения; б) требующие их анализа; в) формирующие умения самостоятельно иллюстрировать примерами теоретические положения; г) приводящие к синтезу знаний и их обобщению; д) развивающие мышление. Обобщающее повторение на уровне системы понятий имеет своей целью выработать у обучаемых умение сопоставлять изученные понятия, отыскивать новые связи и отношения, прослеживать развитие понятий в их иерархических зависимостях. При этом происходит либо обогащение и расширение ранее изученных понятий, либо образование новых. Основная сущность обобщающего повторения на уровне теорий состоит в том, что строится единая, общая форма многообразия частных фактов, понятий, выясняется не столько их содержание, как происхождение, а анализу подвергается природа самих понятий.

Обобщающее повторение на заключительном этапе подготовки преподавателей может быть проведено на каждом из указанных уровней, причем оптимальный путь его построения связан с сочетанием теоретического и практического материала, теории и задач, лекционной формы изложения, предполагающей дополнительную самостоятельную работу студентов, поскольку "науками о человеке установлена фундаментальная закономерность: развитие человека происходит в процессе деятельности и отношений" [47].

Резюмируя сказанное, можно заключить, что

*одной из главных содержательно-методических линий, которая должна быть необходимо проведена в процессе специальной математической и методической подготовки, является обобщающее повторение, выступающее в следующих формах:*

*— обобщающее повторение тех понятий, методов и идей базовых математических курсов, которые входят в школьный курс математики;*

*— обобщающее повторение понятий, методов и идей элементарной (школьной) математики с точки зрения "высшей" математики;*

*— обобщающее повторение понятий, методов и идей базовых математических курсов, являющееся заключительным этапом, обеспечивающим фундаментальность теоретической подготовки будущих преподавателей.*

В качестве одного из следствий получаем, что, как указано в [4], "важнейшим требованием при определении минимального содержания изучаемого в педвузе материала является возможность осуществления обобщения на качественно новом уровне по всем содержательным линиям рассматриваемых математических теорий".

Приведем несколько примеров, показывающих широкие возможности, предоставляемые вполне "школьными" задачами для осуществления обобщающего повторения в его различных формах.

Задача о существовании и вычислении предела последовательности, общий член которой задан рекуррентной формулой $x_{n+1} = (x_n +$

$2/x_n)/2$, и, к примеру, $x_1 = 2$, (см. [23, глава 9]), связана с: а) теоремой Банаха о неподвижной точке сжимающего отображении полного метрического пространства; б) методом касательных Ньютона приближенного вычисления корней уравнений; в) рациональными приближениями иррациональных чисел.

Задача о нахождении явной формулы для чисел Фибоначчи может быть решена методами линейной алгебры, использующими приведение линейного отображения к жордановой форме (см. [23, с. 37]), причем на этом пути мы получаем общую формулу для нахождения формулы для общего члена последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением, что тесно связано с общим методом решения линейных уравнений $n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

Наконец, анализ доказательства того факта, что для любого натурального $n$ число $n^{1996} - 1996n + 1995$ делится на $(n-1)^2$, — задачи, вообще говоря решаемой путем несложного разложения на множители при помощи "формул сокращенного умножения" (а, однако, не при помощи индукции!), приводит к понятию кратного корня, дифференциальному критерию кратности, понятию степени касания кривых, в частности, что касательная к графику функции имеет с этим графиком касание порядка два, а также к формуле Тейлора для многочленов.

Поскольку основной задаче, которая должна быть решена при помощи системы специальной математической и методической подготовки, является формирование базового педагогического опыта будущего преподавателя, мы вернемся к тем моделям его структуры, которые были представлены в разделе 2.1.2. Отличие в моделях, изображенных на приведенных в этом разделе рисунках, принципиально, оно определяется рассмотрением опыта отдельной личности **в его развитии**. Тем самым, мы обязаны рассматривать изменение этого опыта **в его взаимоотношении** с окружающей его средой. В своей последней статье [34] И. Я. Лернер писал, что "особую роль в усвоении социального опыта играют методы, обеспечивающие его развитие:

— передача информации, содержащей новообразования в сфере знаний;

— тренинг в осуществлении принципиально новых типов и способов деятельности;

— методы проблемного обучения;

— отбор системы ценностей и приемы формирования эмоционально-ценностного отношения к миру."

Однако при рассмотрении педагогического опыта в его развитии (динамике) из результатов исследований, изложенных в разделе 2.1.2, следует, что последний компонент социального опыта играет определяющую роль на направление этого развития, поскольку, как писал А. Н. Леонтьев, "актуально сознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности субъекта, т.е̇занимает структурное место непосредственной цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности". Это чрезвычайно важное положение психологической теории имеет своим следствием следующее утверждение.

Итак,

*для того чтобы на практике мог осуществиться кумулятивный характер обучения (в частности, будущего преподавателя), необходимо сформировать потребность к углублению и расширению системы своих знаний как математики, так и методики ее преподавания, путем целенаправленного проведения соответствующей содержательно-методической линии в процессе его теоретической и практической подготовки.*

Таким образом, мы видим, что в системе специальной математической и методической подготовки преподавателей должно быть предусмотрено проведение различных содержательно-методических линий, из которых являются обязательными следующие две:

— обобщающее повторение;

— формирование потребностей к углублению знаний.

В соответствии с критерием оптимизации обучения мы можем заключить, что

*наиболее целесообразна такая организация обучения, при которой возможно соединение всех этих линий как в процессе изложения теоретического материала, так и при формировании практических умений и навыков.*

Последнее положение и составляет содержание *принципа полифоничности обучения.* Подчеркнем, что принципиальное отличие характера проведения этих линий от того, как это делается в традиционном процессе обучения, связано с основным принципом специальной математической и методической подготовки, окончательному обоснованию и формулировке которого посвящен следующий раздел данной работы.

### 2.2.5 Фундаментальность и интегративность — основные принципы специальной подготовки.

Вопросы методической подготовки и, как следствие, методической грамотности (и даже культуры) преподавателя имеют для эффективности его будущей работы не меньшее значение, чем его подготовка по предмету. Курсы психологии, педагогики, методики преподавания математики играют в этом отношении ту же роль, что и фундаментальные математические курсы по отношению к математической подготовке будущего преподавателя. Однако, как известно, лекционные курсы всегда дополняются практическими занятиями, более того, необходима активная деятельность студентов по овладению системой математических знаний, причем важную роль играет обратная связь — например, возможность объективно оценить свои знания, умения, навыки, понимание предмета. Чем можно заменить, к примеру, проблемные методы обучения? Как достичь того, чтобы общие принципы дидактики, вопросы частных методик преподавания математики стали частью мировоззрения будущего преподавателя, вошли в систему его искренних убеждений? Вопрос этот не прост, к примеру, в монографии [59] сказано: "Однако, как показывает многолетний опыт реализации курса методики в университете, проведение даже весьма удачных примеров для иллюстрации теоретических положений еще не обеспечивает высокого качества усвоения материала студентами". З. О. Шварцман видит решение этой проблемы на пути связи со школой, что "позволяет преодолеть рецептурность и однозначность при изучении методики", когда "изучение теоретического материала на лекциях сочетается с проведением практических занятиях по посещению и анализу занятий в школе у учителей"; посредством непрерывной педпрактики на I–III курсах, педпрактики на IV и V курсах. В Российском государственном педагогическом университете (Санкт-Петербург) усилиями преподавателей кафедр психологии, педагогики и методики преподавания математики разработан курс "Теоретические основы обучения математике", основная цель которого "состояла в том, чтобы показать будущим преподавателям математики, как знания из выделенных разделов педагогической науки "работают" в практической деятельности учителя" [37]. В этом курсе (который авторы статьи называют интегрированным) основой для интеграции послужила "профессиональная деятельность учителя математики на уроке". Однако данный, очень интересный и полезный будущим учителям курс опять-таки имеет теоретический (фундаментальный) характер.

Что касается роли педагогической практики в формировании системы методических знаний, то здесь следует иметь в виду следующие обстоятельства. Первым из них является вывод из результатов иследований, описанных в работах [75, 78]: на начальных этапах подготовки будущих преподавателей наблюдение за тем, как работают опытные учителя, и первые опыты самостоятельного преподавания малорезультативны в плане овладения методикой преподавания. Хотя такая деятельность, безусловно, принесет конкретную пользу, к примеру, в том, что касается планирования урока и организации работы с классом. Второй вывод является следствием сформулированного в предыдущем разделе положения психологической теории (А. Н. Леонтьев), он напрямую связан с формированием системы методических взглядов, или, как это было сформулировано в разделе 2.1.2, — мировоззрения по отношению к процессам учения и обучения — на его основе мы и перейдем к вводимому в настоящей работе основному принципу специальной математической и методической подготовки — ее интегративному характеру.

Этим следствием является введенный в разделе 2.1.2 *принцип рефлексии*, на основе которого мы можем заключить, что

*возможна такая организация учебного процесса, такая методика построения учебных математических дисциплин блока специальной подготовки будущего преподавателя, анализ эффективности которой применительно к самим участвовавшим в этом процессе студентам приводит к осознанию ими как основных принципов дидактики математики, так и вопросов частных методик обучения, обеспечивая, тем самым, формирование системы методических знаний (убеждений).*

В разделе 2.2.2 приводилась часть высказывания Ю. М. Колягина и Г. Л. Луканкина, приведем его здесь целиком. “Задачи всегда выступают в роли средства для изучения математики, а их упорядоченный комплекс — в виде определенного метода изучения математики. Образно говоря, в этом случае система учебных задач сливается с методикой обучения” [30]. Таким образом, “именно это позволяет создать условия для комплексного изучения математических и методических особенностей учебного материала, а также различных технологий обучения, которые можно осуществить на этом материале”. Приведенная цитата из статьи [37], в отличие от подхода ее авторов, состоящего в синхронизации рассмотрения одного и того же содержания в разных курсах, относится к использованию одного и того же курса в двух различных направлениях: для знаний и математики, и методики ее преподавания, более того, для того, чтобы конкретные методические знания стали частью мировоззрения будущего преподавателя. В таком соединении, в такой *двойной направленности* конкретных курсов в обучении будущих преподавателей и состоит, коротко говоря, суть интегративного подхода в построении системы специальной математической и методической подготовки. Одной из составляющих этого подхода является использование принципа полифоничности для построения лекционных курсов. Более того, чтобы можно было использовать все преимущества, которые предоставляет применение принципа полифоничности для построения конкретного курса в подготовке студентов-педагогов, стержень, основу этого курса должен составлять не конкретный излагаемый в нем материал, а совокупность содержательно-методических линий, проходящих через пучки понятий и утверждений курса. Таким образом, введенное в разделе 2.2.1 понятие интегративного лекционного курса является отражением и конкретным проявлением *принципа интегративности специальной математической и методической подготовки.* Для раскрытия этого основного принципа мы используем все те понятия и принципы, которые были использованы или введены в данной главе.

Итак, содержание принципа интегративности специальной математической и методической подготовки будущих преподавателей составляет

*использование принципа полифоничности для построения курсов двойной направленности, организации методик обучения, допускающих использование принципа рефлексии, которые дают студентам целостный и богатый взаимосвязями комплекс знаний элементарной и "высшей" математики и методик их преподавания, основанный на имеющихся у них фундаментальных знаниях в области математики, психологии, педагогики и методики преподавания математики, что обеспечит кумулятивный характер развития будущих преподавателей и формирование базового педагогического опыта, необходимого для их успешной дальнейшей работы в профильных средних учебных заведениях.*

# Заключение

Основной результат проведенного теоретического исследования состоит в том, что специальная математическая и методическая подготовка преподавателей для профильных средних учебных заведений на математических факультетах университетов должна необходимым образом опираться на принципы фундаментальности и интегративности. Подчеркнем, что широта применения отдельных компонентов, присущих принципу интегративности обучения, например таких, как понятие пучка (понятий, задач), во всех элементах специальной математической и методической подготовки, а также вскрытые в работе взаимосвязи с известными ранее понятиями и методами, показывают фундаментальный теоретический характер введенных принципов. Однако, в связи со внутренней сложностью указанных принципов и, соответственно, сложностью задачи их осуществления в учебном процессе и конкретном курсе, необходимо продемонстрировать возможность построения конкретного набора учебных дисциплин, основанных на этих принципах. Тем самым для успешного осуществления подготовки в части формирования практических умений и навыков будущих преподавателей нужно разработать методики, использующие методы проблемного обучения и основанные на использовании пучков задач, а, кроме того, дающие студентам возможность оценить не только полученные ими навыки, но и свое понимание как математики, так и методики ее преподавания. Решение этой задачи отражено в пособиях [23–24], используемых при обучении будущих преподавателей на математико-механическом факультете СПбГУ. Результаты этой работы показывают, что интегративный принцип построения системы специальной математической и методической подготовки на базе университетского математического образования адекватен задаче подготовки учителя, отвечающего запросам не только сегодняшнего дня, но и ближайшей перспективы; учителя, который имеет высокую научно-методическую подготовку по циклу фундаментальных математических и психолого-педагогических дисциплин; обладает глубоким интересом как к излагаемой науке, так и самому учебному предмету; умеет не только творчески мыслить, но и создавать подобную атмосферу на своих занятиях.

# Литература


1. *Атанасян Л. С., Дулалаева Т. А., Линькова Г. Н.* О подготовке студентов к преподаванию в классах с углубленным изучением математики // Математика в школе, 1991, Вып. 4. С. 9.

2. *Башмаков М. И.* Уровень и профиль школьного математического образования // Математика в школе, 1993, Вып. 3. С. 8–9.

3. *Болтянский В. Г., Глейзер Г. Д.* К проблеме дифференциации школьного математического образования // Математика в школе, 1988, Вып. 3. С. 9–13.

4. *Буняев М. М.* О содержании математической подготовки учителя // Межд. конф. "Подготовка преподавателя математики и информатики для высшей и средней школы": Тез. докл. Ч.1, М., 1994.— С. 10–14.

5. *Василевский А. Б.* Обучение решению задач по математике. Учебное пособие для студентов физ.-мат. специальностей пединститутов.— Минск, 1988.— 256 с.

6. *Вернер А. Л., Соверткóв П. И.* Актуальные проблемы курса геометрии в педвузе // Математика в школе, 1995, Вып. 5. С. 52–54.

7. *Веселаго И. А., Левина М. З.* Этапы обучения // Математика в школе, 1995, Вып. 2. С. 44–46.

8. *Выготский Л. С.* Избранные педагогические исследования. М., 1956.— 519 с.

9. *Гальперин П. Я.* Основные результаты исследований по проблеме формирования умственных действий и понятий. М., 1965.

10. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.— 272 с.

11. *Гнеденко Б. В.* Теоретическая и прикладная математика // Что такое прикладная математика. М., 1980. С. 50–62.

12. *Гнеденко Б. В., Черкасов Р. С.* О преподавании математики в предстоящем тысячелетии // Математика в школе, 1996, Вып. 1. С. 52–54.

13. *Гусев В. А.* Индивидуализация учебной деятельности учащихся на основе дифференцированного обучения математике в средней школе // Математика в школе, 1990, Вып. 4. С. 27–32.

14. *Гусев В. А.* Методическая подготовка будущих учителей математики в высших педагогических учебных заведениях // Межд. конф. “Подготовка преподавателя математики и информатики для высшей и средней школы”: Тез. докл. Ч.1, М., 1994.— С. 14–18.

15. *Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8-х классах. М., 1984.— 226 с.

16. *Далингер В. А.* Методические рекомендации к проведению обобщающего повторения // Математика в школе, 1983, Вып. 1. С. 10–12.

17. *Дорофеев Г. В.* О принципах отбора содержания математического образования // Математика в школе, 1990, Вып. 6. С. 2–5.

18. *Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В.* Дифференциация в обучении математике // Математика в школе, 1990, Вып. 4. С. 15–21.

19. *Занков Л. В.* Избранные педагогические труды. М., 1980.

20. *Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н.* Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе: Пособие для учителя. М.: Просвещение, 1994.— 96 с.

21. *Иванов А. А.* Отражение современных математических идей и методов во втузовских курсах высшей математики // Методологические проблемы преподавания математики: Сб. науч. трудов ЛОМИ, М., 1987.— С. 39–53.

22. *Ivanov O. A.* How to test 'the understanding' of mathematics // Techn. in Math. Teaching: Pre-conference Proceed. / Ed. B. Jaworski, Birmingham: University of Birmingham, 1993, P. 531.

23. *Иванов О. А.* Избранные главы элементарной математики. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1995.— 228 с.

24. *Иванов О. А.* Практикум по элементарной математике (алгебро-аналитические методы). Учебное пособие. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997.— 228 с.

26. *Карп А. П.* Сборник задач для подготовки к выпускным экзаменам по алгебре и началам анализа. СПб: Игрек-М, 1996.— 272 с.

27. *Карп А. П.* Об опыте работы Санкт-Петербургской экзаменационной комиссии по математике // Математика в школе, 1994, Вып. 1. С. 39–41.

28. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х т. М.: Наука, 1987. Т.1.— 431 с.; Т.2.— 416 с.

29. *Колмогоров А. Н.* О работе вузов со школьниками // Математика в школе, 1995, Вып. 2. С. 45–48.

30. *Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л.* Основные направления совершенствования математического образования в свете требований школьной реформы // Актуальные вопросы совершенствования школьного математического образования. Сб. науч. тр / Отв. ред. Г. Л. Луканкин. М.: Изд-во НИИ школ МН РСФСР, 1987.— 147 с.

31. *Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федорова Н. Е.* Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе, 1990, Вып. 4. С. 21–27.

32. *Кузнецова В. А.* Теория и практика многоуровневого университетского педагогического образования. Ярославль: Изд-во ЯГУ, 1995. – 268 с.

33. *Леонтьев А. Н.* О некоторых перспективных направлениях советской психологии // Вопросы психологии, 1967, Вып. 6. С. 7–22.

34. *Лернер И. Я.* Развивающее обучение с дидактических позиций // Педагогика, 1996, Вып. 2. С. 7–11.

35. *Мацкин М. С., Мацкина Р. Ю.* Больше внимания спецкурсам по подготовке студентов к проведению факультативных занятий // Математика в школе, 1983, Вып. 1. С. 50–51.

36. *Мельников И. И., Олехник С. Н., Потапов М. К., Сергеев И. Н.* Подготовка преподавателей математики для специализированных классов // Конф. посв. 90-летию акад. С. М. Никольского: Тез.докл. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 381.

37. *Монахов В. М., Стефанова Н. Л.* Направления развития системы методической подготовки будущего учителя математики // Математика в школе, 1993, Вып. 3. С. 34–38.

38. *Мордкович А. Г.* О профессионально педагогической направленности математической подготовки будущих учителей // Математика в школе, 1983, Вып. 6. С. 42–44.

39. *Мордкович А. Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителей математики в педагогическом институте / Дис:.ḋ-ра педагог.наук.— М., 1987.

40. *Мордкович А. Г.* О профессионализации подготовки учителя математики в педвузах // Межд. конф. “Подготовка преподавателя математики и информатики для высшей и средней школы”: Тез. докл. Ч.1. М.: Изд-во МПГУ, 1994. С. 22–24.

41. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970.— 452 с.

42. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.— 464 с.

43. *Паркинсон С. Н.* Законы Паркинсона. М.: Прогресс, 1989.— 446 с.

44. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1990.— 736 с.

45. *Семенов Е. Е.* Продолжим разговор о дифференциации // Математика в школе, 1994, Вып. 3. С. 45–48.

46. *Семенов Е. Е.* О дифференцированной подготовке учителя математики в педвузе // Математика в школе, 1995, Вып. 6. С. 40–44.

47. *Скаткин М. Н.* Проблемы современной дидактики. М.: Педагогика, 1984.— 95 с.

48. *Столяр А. А.* Роль математики в гуманизации образования // Математика в школе, 1990, Вып. 6. С. 5–7.

49. *Талызина Н. Ф.* Совершенствование обучения в высшей школе // Советская педагогика, 1993, Вып. 7. С. 74–75.

50. *Феликс Л.* Элементарная математика в современном изложении. М.: Просвещение, 1967.— 488 с.

51. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача. Ч.1. М.: Просвещение, 1982.— 208 с.

52. *Хамов Г. Г.* В педвузах нужны интегративные математические курсы // Математика в школе, 1993, Вып. 3. С. 38–39.

53. *Хинчин А. Я.* О формализме в школьном преподавании математики // Советская педагогика, 1944, Вып. 11. С. 21–27.

54. *Черкасов Р. С.* Академик Андрей Николаевич Колмогоров и школьное математическое образование // Математика в школе, 1992, Вып. 1. С. 11–14.

55. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. М.: Просвещение, 1989.— 352 с.

56. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 11 класса средней школы. М.: Просвещение, 1989.— 352 с.

57. *Шварцбурд С. И.* Содержание и методы обучения в средних общеобразовательных политехнических трудовых школах с математической специализацией / Дисс... канд. педагог.наук, М., 1961.

58. *Шварцбурд С. И.* О развитии интересов, склонностей и способностей учащихся к математике // Математика в школе, 1964, Вып. 6. С. 32–37.

59. *Шварцман З. О.* Профессионально-педагогическая подготовка учителя в университете. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1991.— 128 с.

60. *Шварцман З. О.* Индивидуализация подготовки будущего преподавателя математики в многоуровневой системе университетского образования // Сиб. геом. конф.: Тез.докл. Томск, 1995.— С. 71–73.

61. *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. М.: Просвещение, 1986.

62. *Эрдниев Б. П.* О технологии творческого обучения математике // Математика в школе, 1990, Вып. 6. С. 15–18.

63. *A call for change*: recommendation for the mathematical preparation of teachers of mathematics. / Ed. James R. C. Leitzel. MAA Notes, no. 2, 1991.— 48 p.

64. *Assessment standards for school mathematics.* NCTM, Inc., 1995.— 102 p.

65. *Borasi R.* The invisible hand operating in mathematics instruction // Students' conceptions and expectations teaching ans learning mathematics in the 1990s: 1990 NCTM Yearbook / Eds. T. Cooney, C. Hirsh, 1990. P. 174–182.

66. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* NCTM, Inc., 1996.— 258 p.

67. *Guskey T. R.* Staff development and the process of teacher change // Ed. Res. 1986, vol. 15. P. 5–12.

68. *Krantz S.G.* How to teach mathematics. A personal perspective. AMS, Providence, R.I., 1993.— 76 p.

69. *Langrall C. W., Thornton C. A., Jones G. A., Malone J. A.* Changing prospective elementary mathematics teachers' beliefs through reflective analysis and enhanced pedagogical knowledge, Preprint. – University of Illinois, 1996.

70. *Lehrer R., Franke M. L.* Applying personal construct psychology to the study of teachers' knowledge of fractions // Journal Res. Math. Ed., 1992, vol. 23, no. 3. P. 223–241.

71. *Leinhard G.* Expertise in instructional lessons: an example from fractions // Effective Mathematics Teaching / Eds. D. Grouws, T. Cooney, New York, 1988.

72. *Leinhard G.* Math lessons: a contrast of novice and expert competence // Journal Res. Math. Ed., 1989, vol. 20, no 1. P. 52–75.

73. *Leselbaum N.* La formation des enseignants du second degré dans les centres pédagogiques régionaux. Paris: Institut National de Recherche Pédagogique, 1987.

74. *Manin Yu. I.* Mathematics as metaphor, Proceedings of ICM-1990, Kyoto, 1991. pp. 1665–1671.

75. *McIntire D.* Designing a teacher education curriculum from research and theory on teachers knowledge // Teachers' Professional Learning / Ed. J. Calderhead, Lewes: Falmer, 1988.

76. *Pajares M. F.* Teachers' beliefs in educational research: Cleaning up a messy construct // Rev. Ed. Res., 1992, vol. 62. pp. 307–332.

77. *Professional Standards for Teaching Mathematics.* NCTM, Inc., 1996.— 196 p.

78. *Ruthven K.* Pedagogical knowledge and training of mathematics teachers // Math. Ed. Rev., 1993, no. 3, pp. 1–10.

79. *Ruthven K.* Technology and rationalisation of teaching // Learning from computers: mathematics education and technology / Eds. C. Keitel, K. Ruthven, Berlin: Springer-Verlag, 1993.

80. *Ruthven K.* Beyond commonsense: reconceptualising National Curriculum assesment // Curr. Journal. 1995. pp. 5–28.

81. *Schon D.* Educating the reflective practioner. – San Francisco: Jossey Bass, 1987.

82. *Semenov A.* How to compose it // Short Presentations of 8th International Congress on Mathematics Education, Sevilla (Spain), 1996.— P. 163.

83. *Shukkwan S. L.* Mathematical problem posing: the influence of tasks formats, mathematics knowledge, and creative thinking // Proceedings of 17th Int. Conf. on Psych. of Math. Ed., vol. 3, 1993. pp. 33–40.

84. *Stillwell J.* Mathematics and its history. Springer Verlag, 1995.

85. *The American Mathematical Monthly.* 1960, vol. 67. pp. 982–991.

86. *Vogeli B. R.* Special secondary schools for the mathematically and scientifically talented. An international panorama. New York: Teachers College Columbia University, 1997.

87. *Wilcox S., Schram P., Lanier P., Lappan G.* The role of learning community in changing preservice teachers' knowledge and beliefs about mathematical education // Res. Report 91–1, East Lansing, MI: National Center for Research on Teachers Learning, Michigan State University, 1991.