Из книги «Практикум по элементарной математике». МЦНМО, Москва 2001.

Олимпиады выпускников. 1996-2000.

1996

Вариант 1

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение
$$x^{11} - ax + 1 = 0?$$
б) Пусть $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(a_i \geqslant -1)$. Докажите неравенство
$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1) \leqslant e^s.$$
в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что если
$$\operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A) = 0,$$
то этот треугольник — равнобедренный.
г) Пусть $f(x) = \int\limits_0^x \sin^{1995} t\,dt$. Решите уравнение $f(x) = 0$.

2. а) Решите неравенство $\log_2 x + |\log_{2x} 2| \geqslant \frac{3}{2}$.
б) Верно ли, что при всех $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ справедливо неравенство $\cos^2 k + \cos^2 2k + \cos^2 3k \geqslant 1$?
в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2 - 1} = ax + b$ $(b > 0)$ имеет решение.

3. Про последовательность $\{x_n\}$ известно, что $x_1 = 1$ и если $x_n = \frac{p}{q}$, то $x_{n+1} = \frac{p+2q}{p+q}$.
а) Докажите, что каждая из дробей, появляющихся при определении членов этой последовательности, несократима.
б) Докажите, что последовательность $a_n = |x_n^2 - 2|$ монотонна.
в) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Про последовательность $\{q_n\}$ известно, что $q_1 = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$ и $q_{n+1} \leqslant q_1 + \ldots + q_n + 1$.

а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.
б) Докажите, что если последовательность q_n такова, что всякое натуральное числа представляется в виде суммы некоторых членов последовательности $\{q_n\}$ единственным образом, то
$$(1 + x^{q_1})(1 + x^{q_2})\ldots(1 + x^{q_n}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^N.$$
в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.

Вариант 2

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение

$$ax^{13} + x - 1 = 0\,?$$

б) Пусть $p = b_1 b_2 \ldots b_n$ $(b_i > 0)$. Докажите неравенство

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant n + \ln p.$$

в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что если

$$\sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A) = 0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

г) Пусть $g(x) = \int\limits_0^x \cos^n t\,dt$. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых функция g периодична.

2. а) Решите неравенство $|\log_3 x| + \log_{3x} 3 \leqslant \frac{5}{2}$.

б) Найдите все числа $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, для которых верно неравенство $\sin^2 k + \cos^2 2k + \sin^2 3k \geqslant 1$.

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2 + 1} = ax + b$ $(b < 0)$ имеет решение.

3. Про последовательность $\{c_n\}$ известно, что $c_1 = c > 0$ и $c_{n+1} = 2(\sqrt{c_n^2 + 4} - 2)/c_n$.

а) Докажите, что последовательность $\{c_n\}$ монотонна и вычислите ее предел.

б) Докажите, что если $c = 2$, то $\lim 2^n c_n = \pi$.

в) Сколько рациональных чисел может содержать такая последовательность?

4. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_4$ — вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром O.

а) Докажите, что $\overline{OA_0} + \overline{OA_1} + \ldots + \overline{OA_4} = 0$.

б) Докажите, что $(A_0 A_1 \cdot A_0 A_2)^2 = 5$.

в) Докажите, что многочлен $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ делится на многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

1997

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

   б) Числа $p, q \in [0;1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен x^2+px+q имеет действительные корни.

   в) Докажите, что если не существует треугольника с длинами сторон a, b, c, то нет и треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n (n — натуральное).

   г) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$.

2. а) Решите неравенство $\lg^2(x+1) \geqslant \lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.

   б) Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\cos 4x=\cos 7x$.

   в) Найдите все b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2, \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$

   имеет единственное решение.

3. Пусть $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$.

   а) Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Q}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $a_i \in \mathbb{Q}$ при всех $i=0,1,\ldots,n$.

   б) Докажите, что из того, что $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, не следует, что $a_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i=0,1,\ldots,n$.

   в) Пусть $q_i(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i!}$, $q_0(x)=1$. Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $p(x)=\sum b_iq_i(x)$, где $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i=0,1,\ldots,n$.

4. а) Какое из чисел больше, 2^{300} или 3^{200}?

   б) Представьте число 1997 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых с максимально возможным произведением.

   в) Докажите, что произведение нескольких положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит e^{800}.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение
$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=2.$$
   б) Числа $p, q \in [-1; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен px^2+qx-1 имеет действительные корни.
   в) Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[5]{b}$, $\sqrt[5]{c}$ также можно составить треугольник.
   г) Дан треугольник ABC. Докажите, что если $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.
2. а) Решите неравенство
$$\log_2^2 x+3\log_2 x\log_2(x-2)+2\log_2^2(x-2)\geqslant 0.$$
   б) Решите уравнение $4\sin x\cos 2x\cos 4x=\sin 7x$.
   в) Найдите все b, при которых система неравенств
$$\begin{cases} y+x^2\leqslant b,\\ x+y^2\leqslant b\end{cases}$$
   имеет единственное решение.
3. а) Решите уравнение $1+x^2+\ldots+x^{4k-2}=2kx^{2k-1}$.
   б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны ±1, то все его корни по модулю меньше двух.
   в) Известно, что $a<b<c$, $a+b+c=6$ и $ab+bc+ca=9$. Докажите, что $0<a<1<b<3<c<4$.
4. а) Найдите все пары a, b комплексных чисел, таких что
$$|a|=|b|=1 \text{ и } |a+b|=|a^2+b^2|.$$
   б) Докажите, что если $|a|=|b|=|c|=1$, то
$$|a+b+c|=|ab+bc+ca|.$$

   в) Докажите, что если
$$\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=0,\\ \sin x+\sin y+\sin z=0,\end{cases} \quad \text{то } \sin 3x=\sin 3y=\sin 3z.$$

1998

Вариант 1

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

   б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

   в) Докажите, что если $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то по крайней мере один из квадратных трехчленов $x^2 + p_ix + q_i$, $i = 1, 2$, имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = 2x + |\log_2 x + 2x| - \log_2 x$.

   б) Решите уравнение $\sqrt{2 - \cos 2x} = \sin x - \cos x$.

   в) Решите неравенство $\sqrt{|1 - 2x|} \geqslant 1 + ax$.

   г) Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10,000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет брать только проценты с накопленной за это время суммы? Банк дает 30% годовых, а $\lg 1{,}3 = 0{,}114$.

3. а) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что

$$\angle CAD + \angle EAD + \angle FAD = 90^\circ.$$

   б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = 2 \operatorname{arctg} \frac{x + y}{2}.$$

   в) Вычислите сумму

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \ldots$$

4. а) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица, а два оставшихся равны друг другу.

   б) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица.

   в) Сколько различных (т. е. различимых по внешнему виду) каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?

Вариант 2

1. а) Докажите, что если каждая из средних линий четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

   б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро — двум.

   в) Докажите, что если $a_i > 0$, $a_i c_i \geqslant b_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$, то

$$(a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 + c_3) \geqslant (b_1 + b_2 + b_3)^2.$$

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = \log_3 x - 3x - |\log_3 x + 3x|$.

   б) Решите уравнение $\sqrt{2 + \cos 2x} = \sin x + \cos x$.

   в) Решите неравенство $\sqrt{|x - \frac{1}{4}|} \leqslant \frac{1}{2} + ax$.

   г) Для того, чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 2 000$. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по 20 000$ в год из процентов, не

трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых, а $\lg 1{,}1 = 0{,}0414$.

3. а) Найдите все треугольники, длины сторон и величины углов которых образуют арифметические прогрессии.

   б) Верно ли, что для всякой арифметической прогрессии из четырех положительных чисел существует выпуклый четырехугольник, длинами сторон которого являются эти числа?

   в) Найдите все четырехугольники, длины сторон и углы которых (взятые в циклических порядках) образуют арифметические прогрессии.

4. а) Найдите все целые k, при которых разрешимо уравнение

$$\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} = \sqrt{\frac{k}{10}}.$$

   б) Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$.

   в) Найдите все натуральные решения уравнения

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1998}.$$

1999

Вариант 1

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \cos y = 0, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

   б) Существует ли многочлен $p(x) = x^9 + a_1x^8 + \ldots + a_9$, имеющий девять различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят $0{,}001$?

   в) Докажите неравенство
   $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 2 \ln 3 \ln 5 < \ln 2 \ln 3 + \ln 3 \ln 5 + \ln 5 \ln 2 + 1.$

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 - 24x} \leqslant 8$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + a)$ не имеет решений на отрезке $[0; 1]$.

   в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами $3, 6, 6$ см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

   г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны $1, 2, 3, 2$ см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$

   а) Докажите, что $3x_{n+1} = 7x_n - 2x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 1$.

   б) Известно, что $x_{1999} > 0$. Верно ли, что $x_{2000} > 0$?

   в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

Вариант 2

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \sin y = 0, \\ \cos x \cos y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

   б) Существует ли многочлен $p(x) = x^8 + a_1 x^7 + \ldots + a_8$, имеющий восемь различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят $0,001$?

   в) Докажите неравенство
   $\ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 3 \ln 4 \ln 5 > \ln 3 \ln 4 + \ln 4 \ln 5 + \ln 5 \ln 3 + 1.$

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 48x} \geqslant 9$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + 2)$ имеет решения на отрезке $[0; a]$.

   в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами $4, 2, 4$ см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

   г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 2, 3, 4, 3 см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^{-n} + b \cdot 3^n$, $n = 0, 1, \ldots$

   а) Докажите, что $2x_{n+1} = 7x_n - 3x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 1$.

   б) Известно, что $x_{1999} < 0$. Верно ли, что $x_{1998} < 0$?

   в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

2000

Вариант 1

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3 и 5?

   б) Решите уравнение $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

   в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 2000$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

   г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$ (тем самым с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geqslant 5$.

   б) Решите уравнение $\sqrt{a + 2\cos 2x} = a\cos x$.

   в) Внутри угла величиной 60° с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

   г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [A'D']$, $L \in [B'C']$ и $M \in [BB']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $16:9$, $2:3$ и $1:2$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2, & \text{если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 9, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$$

   а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

   б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический "хвост", т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geqslant N$.

Вариант 2

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 3, 7 и 10?
   б) Решите уравнение $[2\sin 3x] = -2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).
   в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 1944$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

   г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{8}$ (тем самым с вероятностью $\frac{3}{8}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 80 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $\dfrac{4}{(x-1)^2} \geqslant \dfrac{5}{x^2} - 4$.
   б) Решите уравнение $\sqrt{a - 2\cos 2x} = a\sin x$.
   в) На сторонах угла величиной 120° с вершиной в точке A на расстоянии 4 друг от друга лежат точки K и L. Пусть M — точка пересечения восстановленных в точках K и L перпендикуляров к соответствующим сторонам угла. Найдите расстояние от M до A.
   г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [AB]$, $L \in [A'B']$ и $M \in [C'D']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях 1 : 4, 11 : 4 и 8 : 7 (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2, & \text{если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 7, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$$

   а) Найдите все периодические последовательности данного вида.
   б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический “хвост”, т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geqslant N$.