Из книги «Практикум по элементарной математике». МЦНМО, Москва 2001. Олимпиады выпускников. 1990-1995.

Вариант 1: олимпиада выпускников 1993 года

1. а) Постройте эскиз графика функции $y = |\log_{2x} \frac{4}{x}|$.

   б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a, b)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\max_{x\in\mathbb{R}} a^{\sin x} = \max_{x\in\mathbb{R}} b^{\cos x}.$$

   в) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = 1 - ay^2, \\ y = 1 - ax^2 \end{cases}$$

   имеет два решения.

   г) Докажите, что $\int\limits_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+x^2}\,dx \to 0$ при $n \to +\infty$.

2. а) Решите неравенство $x \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + 2^x \geqslant 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^x$.

   б) Решите неравенство $\sin^2 x + \frac{2}{\sin x} \leqslant \sin x + 2$.

   в) Найдите все прямые, касающиеся графика функции $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух различных точках.

3. Пусть $p_k(x) = 1 + x + \ldots + x^k$, $Q_{k,n}(x) = p_k(x^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$.

   а) Докажите, что многочлен $p_{2m}(x)$ не имеет действительных корней.

   б) Найдите все такие n, при которых многочлен $Q_{2,n}(x)$ делится на $p_2(x)$.

   в) При каком условии на k и n $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$?

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове “баобаб”.

   б) Докажите тождество $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

   в) Двое играют в такую игру: монету бросают два раза и первый из двух игроков выигрывает, если оба раза она упала одной и той же стороной. Известно, что монета фальшивая, так что вероятность появления герба при одном бросании равна $p \neq \frac{1}{2}$. При каких p чаще будет выигрывать первый игрок?

Решения задач варианта 1.

1. а) *Ответ*: см. рис. 26. Ясно, что вначале следует строить график функции

$$y = \log_{2x}\frac{4}{x} = \frac{\log_2(4/x)}{\log_2(2x)} = \frac{2-\log_2 x}{1+\log_2 x}.$$

Вместо того чтобы проделать стандартное исследование при помощи производной, поступим по-другому. Поскольку $y = g(\log_2 x)$, где

$$g(t) = \frac{2-t}{1+t} = -1 + \frac{3}{1+t},$$

то, построив (при помощи двух параллельных переносов) график функции g (рис. 27), далее будем рассуждать следующим образом. Функция $t = \log_2 x$ монотонно возрастает, значит, функция $y = g(\log_2 x)$ убывает: от -1 до $-\infty$ на интервале $(0; \frac{1}{2})$ и от $+\infty$ до -1 на луче $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

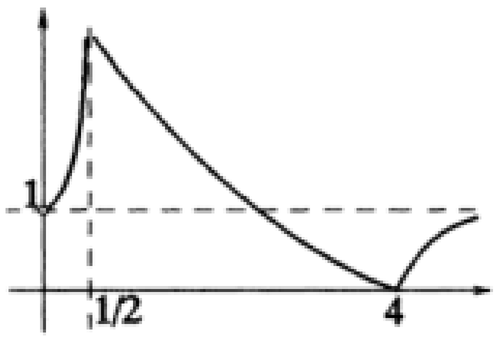

Рис. 26

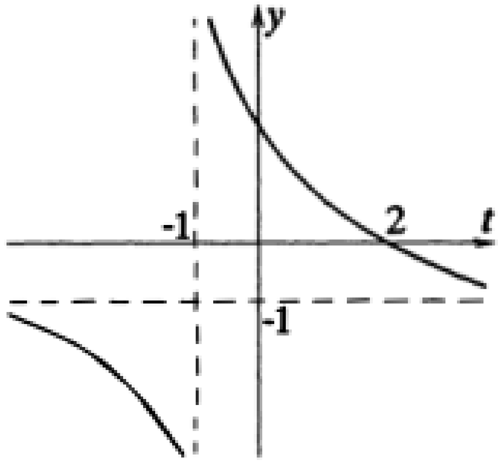

Рис. 27

б) *Ответ*: см. рис. 28. Поскольку отрезок $[-1; 1]$ является областью значений и синуса и косинуса, то

$$\max a^{\sin x} = \max a^t \text{ и } \max b^{\cos x} = \max b^t \text{ при } x \in \mathbb{R},\ t \in [-1; 1].$$

Заметим, что наибольшее значение a^t при $t \in [-1; 1]$ не всегда равно a (типичная ошибка!), поскольку

$$\max a^t = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 1; \\ \dfrac{1}{a}, & \text{если } 0 < a \leqslant 1 \end{cases}$$

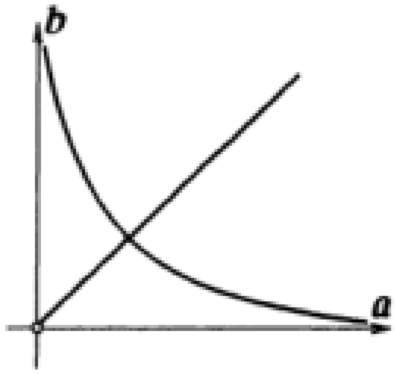

Рис. 28

(кстати, по определению степени с произвольными показателями, $a, b > 0$). Поэтому равенство имеет место при $a = b$ и $a = 1/b$, значит, искомое множество является объединением луча $y = x$, $x > 0$, и ветви гиперболы $y = 1/x$, $x > 0$.

в) *Ответ*: $a \in (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; \frac{3}{4}]$. Эта задача интересна тем, что естественный подход — посмотреть на картинки — может привести к неверному предположению.

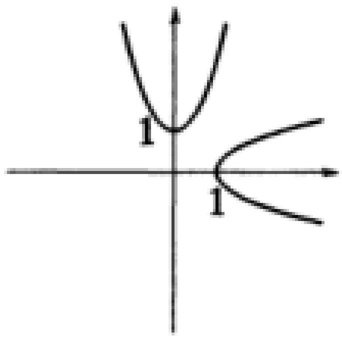

Рис. 29

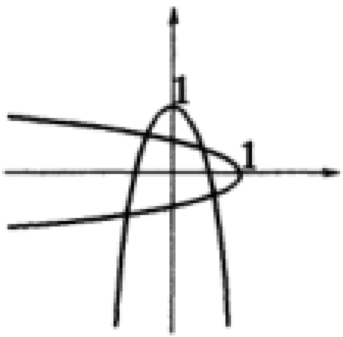

Рис. 30

Если $a \neq 0$, то каждое из уравнений данной системы задает параболу с фиксированной вершиной. На рис. 29, 30 изображены параболы для "очень отрицательного" значения a, когда система решений не имеет (рис. 29), и "очень положительного", когда ясно, что решений четыре (можно использовать непрерывность функций $y = 1 - ax^2, y = \pm\sqrt{(1-x)/a}$ и характер их монотонности, рис. 30). Если $a < 0$, то из симметричности картинки ясно, что возможные точки пересечения лежат на прямой $y = x$, откуда $ax^2 + x - 1 = 0$ и $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$. Таким образом, похоже, что при $a = -\frac{1}{4}$ система имеет одно решение (параболы касаются), а если $-\frac{1}{4} < a < 0$, то два. Случай $a > 0$ несколько более загадочен. Опять-таки ясно, что при $a > 1$ система имеет четыре решения, но что происходит, если $0 < a < 1$? Оказывается, параболы могут пересечься в четырех точках (рис. 31)! Проделаем вычисления. Вычитая первое уравнение системы из второго, получаем $y - x = a(y-x)(x+y)$, откуда $y = x$ (этот случай был разобран), или же $a(x+y) = 1$. В последнем случае приходим к уравнению $1 - ax = a - a^2x^2$, в котором удобно сделать замену $u = ax$. Полученное уравнение $u^2 - u + (1-a) = 0$ имеет решение при $a \geqslant \frac{3}{4}$. Заметим, что если $a = \frac{3}{4}$, то $u = \frac{1}{2}$ и $x = y = \frac{1}{2a}$, т. е. три точки пересечения, расположенные в первом квадранте, "склеиваются" в одну. Наконец, если $a = 0$, то $x = y = 1$, т. е. система имеет одно решение.

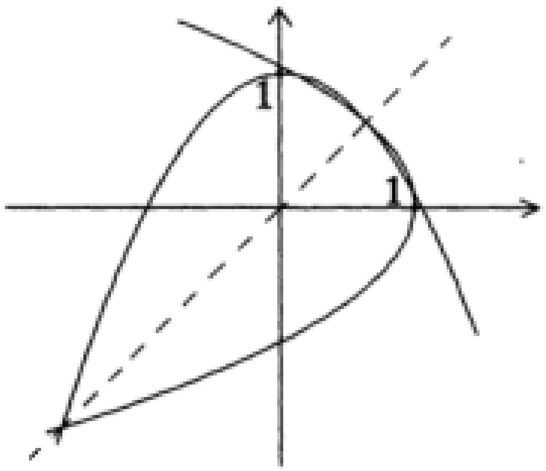

Рис. 31

г) Решение основано на идее оценки подынтегрального выражения:

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } \; n \to \infty,$$

поэтому данный интеграл также стремится к нулю.

2. Два первых пункта этой задачи абсолютно стандартны.

а) *Ответ*: $x \in [1; 2]$. Решите неравенство $(x-1)(2^{\sqrt{x+2}} - 2^x) \geqslant 0$.

б) *Ответ*: $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. После замены $t = \sin x$ и обычных преобразований получаем неравенство $(t^2 - 2)(t-1)/t \leqslant 0$, значит (учитывая, что $|t| \leqslant 1$), $t = 1$ или $t < 0$.

в) Решение задачи этого пункта уже не является стандартным. Целесообразно записать $y = x^2(x-1)^2 + 19x + 93$.

График $y = x^2(x-1)^2$ касается оси абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 32), поэтому график данной функции касается прямой $y = 19x + 93$ в точках с такими же абсциссами. Этот факт очевиден с геометрической точки зрения. Пусть два графика имеют общую касательную. Если добавить к каждой из данных функций одно и то же слагаемое, то новые графики также будут иметь общую касательную. Приведем в нашем случае и формальное доказательство.

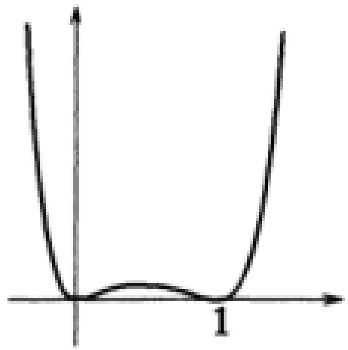

Рис. 32

Пусть $g(x) = x^2(x-1)^2$, $l(x) = 19x + 93$ и $f(x) = g(x) + l(x)$. Имеем: $g'(0) = g'(1) = 1$ и $f'(0) = l'(0) = 19$, $f'(1) = l'(1) = 19$, $g(0) = g(1) = 0$, поэтому $f(0) = l(0)$, $f(1) = l(1)$.

Остается открытым вопрос о единственности такой “двойной” касательной. С геометрической точки зрения все очевидно, достаточно взглянуть на эскиз графика функции g (рис. 32). Для аккуратного доказательства единственности следовало бы использовать выпуклость этого графика, поэтому мы изберем другой, алгебраический, подход.

Поскольку утверждение, которое мы сейчас докажем, имеет общий характер, сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. *Пусть $P(x)$ — многочлен и $P(x_0) = P'(x_0) = 0$. Тогда $P(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.*

Действительно, так как $P(x_0) = 0$, то $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен. Продифференцировав это равенство, получаем $P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x)$, откуда $Q(x_0) = P'(x_0) = 0$, значит $Q(x) = (x - x_0)D(x)$ и $P(x) = (x - x_0)^2 D(x)$.

Следствие. *Если прямая, заданная уравнением $y = l(x)$, касается графика многочлена $P(x)$ в точке $x = x_0$, то разность $P(x) - l(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.*

(Докажите это следствие самостоятельно.)

Докажем теперь, что график многочлена четвертой степени имеет не более одной прямой, касающейся его в двух различных точках.

Если прямая $y = l_1(x)$ (l_1 — линейная функция) касается графика $y = P(x)$ в точках с абсциссами $x = x_0$ и $x = x_1$, то разность $P(x) - l_1(x)$ делится на $(x - x_0)^2(x - x_1)^2$, значит,

$$P(x) = l_1(x) + a_0 p_1^2(x),$$

где $p_1(x)$ — квадратный трехчлен. Пусть $y = l_2(x)$ — еще одна двойная касательная. Тогда $P(x) = l_2(x) + a_0 p_2^2(x)$, откуда

$$l_2(x) - l_1(x) = a_0(p_1(x) + p_2(x))(p_1(x) - p_2(x)).$$

Если $l_1(x) \neq l_2(x)$, то такое равенство невозможно, поскольку в его правой части находится многочлен по крайней мере второй степени.

3. а) Если $1 + x + ... + x^{2m} = 0$, то $x^{2m+1} - 1 = (x - 1)(1 + x + ... + x^{2m}) = 0$, откуда $x = 1$, однако это число не является корнем исходного уравнения. Приведем еще одно рассуждение. Ясно, что положительных корней данное уравнение не имеет. Если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$p_{2m}(x) = (1 + x) + (x^2 + x^3) + ... + (x^{2m-2} + x^{2m-1}) + x^{2m} > 0,$$

если же $x < -1$, то опять-таки

$$p_{2m}(x) = 1 + (x + x^2) + ... + (x^{2m-1} + x^{2m}) > 0.$$

б) *Ответ*: $n \not\equiv 0 \pmod 3$ — ответ очень красивый и неожиданный. Решение несложно, однако связано с рассмотрением комплексных корней многочлена. Корнями трехчлена $x^2 + x + 1$ являются числа $z_{1,2} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$. Многочлен $Q_{2,n}(x) = 1 + x^n + x^{2n}$ делится на $x^2 + x + 1$, если z_1 и z_2 являются и его корнями. Имеем

$$Q_{2,n}(z_i) = 1 + \cos\tfrac{2\pi n}{3} \pm i\sin\tfrac{2\pi n}{3} + \cos\tfrac{4\pi n}{3} \pm i\sin\tfrac{4\pi n}{3}$$

(по формуле Муавра), далее,

$$\sin\tfrac{2\pi n}{3} + \sin\tfrac{4\pi n}{3} = 2\sin\pi n\cos\tfrac{\pi n}{3} = 0,$$

а
$$1+\cos\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{4\pi n}{3}=\cos\frac{2\pi n}{3}\left(1+2\cos\frac{2\pi n}{3}\right)=0,$$
если $n\not\equiv 0 \pmod 3$.

в) *Ответ*: $(n,k+1)=1$, т. е. числа n и $k+1$ не должны иметь общих делителей (такие числа называются взаимно простыми). Данная задача есть прямое обобщение предыдущей, однако прямая замена числа 3 на $k+1$ в условии на число n даст неверное условие. Дело в том, что 3 — простое число, поэтому $n\not\equiv 0($ mod 3) тогда и только тогда, когда $(n,3)=1$. Решение, которое будет сейчас приведено, вообще не использует никакой тригонометрии, за исключением самой первой формулы.

Положим $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{k+1}+i\sin\frac{2\pi}{k+1}$, это так называемый первообразный корень степени $k+1$ из 1. Ясно, что $\varepsilon^l\neq 1$ при $l=1,2,...,k$, и что числа $\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^k$ – корни уравнения $p_k(x)=0$ (см. решение пункта а)). Поскольку все эти числа различны, то многочлен $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$ тогда и только тогда, когда $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=0$ при $l=1,2,...,k$. Имеем $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=p_k(\varepsilon^{ln})$. Предположим, что $d>1$ — общий делитель чисел n и $k+1$. Пусть $l=(k+1)/d$, тогда число ln кратно $k+1$, поэтому $\varepsilon^{ln}=1$ и $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=k+1\neq 0$. Если же $(n,k+1)=1$, то $ln\not\equiv 0 \pmod{k+1}$, поэтому $\varepsilon^{ln}\neq 1$, значит $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=p_k(\varepsilon^{ln})=0$.

4. а) *Ответ*: 60. Конечно, этот ответ следует из общей формулы для числа перестановок с повторениями: $\frac{6!}{3!2!}=60$. Однако для решения задачи знать эту формулу совсем не обязательно, достаточно просто навыка в использовании "правила произведения" и знакомства с определением чисел сочетаний. Действительно: буква "о" может стоять на любом из шести мест, для буквы "а" (когда "о" уже поставлена) имеется $C_5^2=10$ вариантов, на оставшихся трех местах располагаются буквы "б". Кстати говоря, тот, кто проведет подобное рассуждение, может увидеть, что если вначале выбирать три места для букв "б", то всего вариантов $C_6^3\cdot 3$, так что $3C_6^3=6C_5^2$. Полученное равенство является частным случаем доказываемого аналогичным образом тождества $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$, используемого в следующем пункте.

б) Имеем: $\sum_{k=1}^n kC_n^k=n\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}C_n^k=n\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1}=n\cdot 2^{n-1}$. Другое рассуждение основано на идее производящих функций. Пусть $P(x)=\sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, тогда $P'(x)=\sum_{k=1}^n kC_n^{k-1}x^{k-1}$, так что $P'(1)=\sum_{k=1}^n kC_n^{k-1}$. С другой стороны, $P(x)=(1+x)^n$, $P'(x)=$

$n(1+x)^{n-1}$, поэтому $P'(1) = n \cdot 2^{n-1}$!

в) *Ответ*: $p \neq \frac{1}{2}$. В решении используются лишь простейшие понятия теории вероятности. Вероятность того, что оба раза выпал герб, равна p^2, вероятность выпадания двух решек $(1-p)^2$. Значит, вероятность того, что первый игрок выиграет, равна

$$p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1 = 2\left(p - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2},$$

тем самым при *любых* $p \neq \frac{1}{2}$ чаще будет выигрывать он.