О.А. Иванов

ПРАКТИКУМ
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Алгеброаналитические методы

МЦНМО

О.А. Иванов

ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Алгеброаналитические методы

МЦНМО
2001

УДК 514.075
ББК 22.10
И20

Рецензенты: Северо-Западная заочная математическая школа при СПбУ (директор В.М. Гольховский); методист кабинета математики С.-Петерб. ун-та педагогич. Мастерства, учитель гимназии № 30 А.П. Карп.

Иванов О.А.

И20 Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: Учеб. пособие. — М.: МЦНМО, 2001. — 320с.
ISBN 5-900916-95-2

Общеизвестно, что задачи хорошо решать, когда их решать интересно. Если вы не верите, что может быть интересно решать, к примеру, иррациональные неравенство или же тригонометрическое уравнение, то просмотрите задачи раздела “Умеете ли вы решать “почти школьные” задачи?”.

Особенностью этой книги является разнообразие методов, применяемых при решении задач по школьному курсу алгебры и начал анализа, при сохранении единого (логико-алгебро-геометро-аналитического) подхода к их решению. Приводятся условия и решения задач контрольных и экзаменационных работ для учащихся специализированных математических классов и школ С.-Петербурга, в том числе варианты профильно-элитарного выпускного экзамена, а также задачи олимпиад, проводившихся математико-механическим факультетом СПбГУ, в 1990-2000 гг.

Книга предназначена для учителей специализированных школ, учащихся и их родителей, преподавателей и студентов высших, в том числе и педагогических, учебных заведений.

Библиогр. 20 назв. Ил. 239.

ББК 22.10

ISBN 5-900916-95-2

ОТ АВТОРА

В 1998 году издательством С-Петербургского университета было опубликовано пособие [8], в предисловии к которому автор утверждал, “что можно на стандартном школьном материале составлять задачи, обладающие и внутренним математическим содержанием, и красотой. Индукция и дедукция, интерпретации и переформулировки, аналогии и ассоциации — то, что характерно для математического способа мышления (и для мышления вообще), проявляется в процессе решения включенных в эту книгу задач.” Для того, чтобы убедиться в правоте автора, достаточно внимательно изучить первый раздел — «Умеете ли вы решать “почти школьные” задачи?»

В настоящем издании исправлены замеченные опечатки и добавлены два раздела, в первом из которых приведены задачи, предлагавшиеся в С-Петербурге в 1996–2000 гг. О написанном Е. Н. Лысовой и приведенном в качестве дополнения разделе «Уроки обобщающего повторения», следует сказать особо. Автору довольно часто говорят учителя: «Да, нам нравятся задачи, которые вы предлагаете. Не могли бы вы сказать, как же научить(ся) их решать?»Так вот, в этом Дополнении как раз и сделан важный шаг в направлении разработки методик преподавания математики на углубленном уровне, которых так не хватает в нашей школе (ср. [5]).

Кроме тех, кто был упомянут в предисловии к книге [8], автор выражает свою признательность Т. П. Дубовой, любезно предоставившей список замеченных опечаток, и Е. Н. Лысовой, проверившей наличие соответствия между условиями и решениями задач 1996–2000 гг. (все сохранившиеся опечатки — на совести автора). Кроме того, автор вновь не может не отметить роль кандидата педагогических наук, председателя С-Петербургской комиссии по проведению выпускного экзамена по математике А. П. Карпа, чьи критические замечания немало способствовали отшлифовке задач профильно-элитарного экзамена.

УМЕЕТЕ ЛИ ВЫ РЕШАТЬ "ПОЧТИ ШКОЛЬНЫЕ" ЗАДАЧИ?

Задачи, которые обсуждаются далее, явно не олимпиадные, хотя и не обычные школьные. В большинстве из них речь идет об уравнениях и неравенствах, о свойствах и графиках стандартных функций или же о производных и интегралах. Эти задачи достаточно просты — как вы увидите, в решениях нет ни громоздких преобразований, ни, так сказать, "олимпиадных" идей. Дело в том, что обычно в рассуждениях используются либо аналитические методы (исследование функций при помощи производных, построение их графиков и вычисление площадей, ими ограниченных), либо алгебраические — когда даны алгебраические уравнения или уравнения с так называемыми "трансцендентными" (тригонометрическими, логарифмическими и показательными) функциями. Однако то, какие методы естественно применить, решая ту или иную задачу, зависит от нее самой, ее формулировки, лучше сказать — ее, скрытого на первых порах, математического содержания. В приводимых далее решениях вы встретитесь с такими понятиями и методами, как тригонометрические и целочисленные уравнения, делимость многочленов и их корни в комплексной области, производная и кратные корни многочленов, сложные функции, монотонность и периодичность, индукционный метод рассуждения и метод математической индукции.

Во многих случаях наиболее короткое и ясное решение можно получить, применяя синтез алгебраических, аналитических и геометрических методов. Проиллюстрируем эту мысль на примере следующих пяти задач. (Прежде чем читать решения, попробуйте вначале самостоятельно решить эти задачи.)

Задача А. Найдите все такие a, что при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

Задача Б. Нарисуйте множество точек, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на графике функции $y = x^3$.

Задача В. Известно, что функция f возрастает на луче $(-\infty; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функции g, где $g(x) = f(x^2 - 1)$.

Задача Г. Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\cos x \leqslant \cos y$.

Задача Д. Решите уравнение $\sin\dfrac{1992\pi^2}{x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

Наиболее естественный подход к решению задачи А — геометрический: из рис. 1 очевиден и ответ — $|a| > 1$ — и приводящее к нему рассуждение.

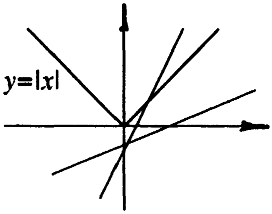

Рис. 1

Для сравнения дадим стандартное решение, основанное на “раскрытии модуля”:

$$ax + b = |x| \iff \begin{cases} ax + b = x, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ax + b = -x, \\ x \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{b}{1-a}, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1, \\ b = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{b}{1+a}, \\ x \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вместо союза “или” вообще-то можно было поставить еще одну квадратную скобку, но, как должно быть понятно каждому, тогда запись выражения станет чересчур громоздкой, а само оно будет трудно читаемым и проверяемым.

Итак, решение данного уравнения существует тогда и только тогда, когда либо $a = \pm 1$ и $b = 0$, либо

$$\frac{b}{1-a} \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{b}{1+a} \geqslant 0.$$

Выясним, при каких условиях на число a это условие выполнено при всех $b \in \mathbb{R}$. Ясно, что $a \neq \pm 1$. Если $b > 0$, то $1 - a > 0$ или $1 + a > 0$, т. е. a — любое число, если же $b < 0$, то $1 - a < 0$ или $1 + a < 0$, т. е. $a \in (-1; \infty) \cup (1; \infty)$. Итак, мы видим что данное уравнение разрешимо при любом b только если $|a| > 1$.

Не правда ли, первое решение прозрачнее?

Кстати, условия на a и b, появившиеся в процессе второго решения, также было бы проще исследовать, воспользовавшись их геометрической интерпретацией. На рис. 2, *а*, *б* изображены множества, заданные, соответственно, неравенствами $\frac{b}{1-a} \geqslant 0$ и $\frac{b}{1+a} \geqslant 0$, а на рис. 2, *в* — их объединение, к которому добавлены точки с координатами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, т. е. множество всех пар (a, b), для которых данное уравнение имеет решение.

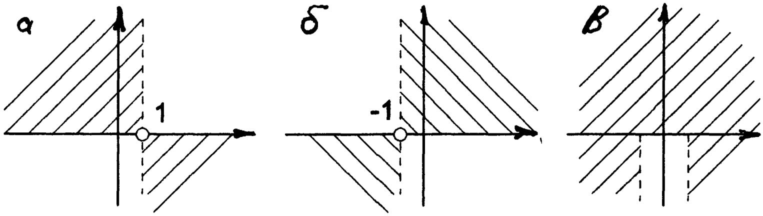

Рис. 2

Найти нужно такие точки на горизонтальной оси, что проходящая через них вертикальная прямая целиком лежит в множестве, изображенном на рис. 2, *в*.

Заметим, что по этой картинке можно решить следующую модификацию задачи А: найдите все такие b, что при любом a уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

Чтобы решить задачу Б, давайте, наоборот, переведем ее на алгебраический язык: точка с координатами (x, y) является серединой отрезка, концы которого находятся на графике данной функции, если существуют такие числа a и b (абсциссы концов отрезка), что $\frac{a+b}{2} = x$ и $\frac{a^3+b^3}{2} = y$ (для простоты допускаем вырожденные отрезки), т. е. если разрешима система

$$\begin{cases} a + b = 2x, \\ a^3 + b^3 = 2y. \end{cases}$$

Пусть $x = 0$. Тогда $a = -b$, значит, $y = 0$. При $x \neq 0$ перейдем к системе

$$\begin{cases} a + b = 2x, \\ a^2 - ab + b^2 = \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

которая имеет решение, если неотрицателен дискриминант уравнения (относительно a!) $3a^2 - 6xa + 4x^2 - \frac{y}{x} = 0$. Произведя вычисления, получим неравенство $\frac{y}{x} \geqslant x^2$, т. е. $\frac{y-x^3}{x} \geqslant 0$. Таким образом, либо $x > 0$ и $y \geqslant x^3$, либо $x < 0$ и $y \leqslant x^3$ (рис. 3).

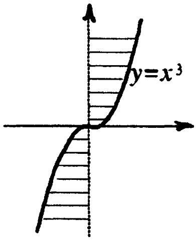

Рис. 3

Теперь о задаче В. Если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant -\sqrt{2}$, то $x_1^2 - 1 \geqslant x_2^2 - 1 \geqslant 1$, значит, $g(x_1) = f(x_1^2 - 1) \leqslant f(x_2^2 - 1) = g(x_2)$, т. е. функция g на луче $(-\infty; -\sqrt{2}]$ возрастает. Случаи $x_1, x_2 \in [-\sqrt{2}; 0], [0; \sqrt{2}]$ и $x_1, x_2 \in [\sqrt{2}; +\infty)$ разбираются аналогично. Мы сравнивали x_1, x_2 с числами 0 и $\sqrt{2}$ ввиду следующего простого и общего соображения: если функция h монотонна и притом ее значения лежат в промежутке, на котором монотонна и функция f, то является монотонной и "сложная" функция $y = f(h(x))$. Другое решение этой задачи приведено на с. 162.

Приведем два способа решения задачи Г.

Первый из них следует обычной схеме. Воспользовавшись известной формулой, запишем данное неравенство в виде

$$\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \geqslant 0$$

и применим аналог так называемого "метода интервалов" (очень популярного среди учащихся). Если $\sin\frac{x-y}{2} = 0$, то $x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, следовательно данное уравнение задает на плоскости набор параллельных прямых $y = x + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ (рис. 4, *а*). Уравнение $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ задает аналогичный набор параллельных прямых, содержащий прямую $y = -x$. Объединение прямых этих двух наборов разбивает плоскость на квадраты (рис. 4, *б*), каждый из которых либо целиком состоит из решений данного неравенства, либо не имеет внутри себя ни одного из них.

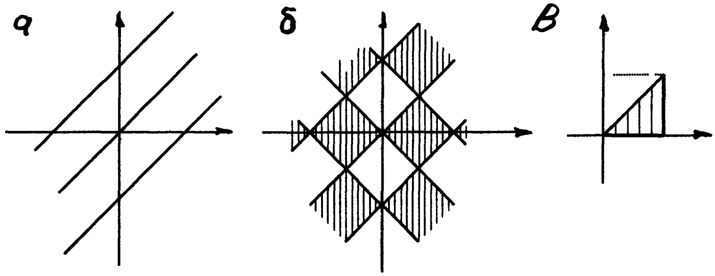

Рис. 4

Ясно, что все заштрихованные на рис. 4, *б* квадраты состоят из искомых решений (почему?). По аналогии с “методом интервалов” можно заключить (или проверить непосредственно), что внутри соседних с ними квадратов нет решений неравенства, поэтому ответ в данной задаче — это “черные поля бесконечной шахматной доски”. Конечно, можно было просто решить системы неравенств, а в данном случае — взять объединение множеств решений следующих систем:

$$\begin{cases} 2\pi k \leqslant x - y \leqslant \pi + 2\pi k, \\ 2\pi l \leqslant x + y \leqslant \pi + 2\pi l \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \pi + 2\pi k \leqslant x - y \leqslant 2\pi + 2\pi k, \\ \pi + 2\pi l \leqslant x + y \leqslant 2\pi + 2\pi l \end{cases}$$

по всем $k, l \in \mathbb{Z}$.

Второй способ основан на использовании неалгебраических свойств функции $\cos x$. Вернемся к исходному неравенству. Поскольку косинус — это 2π-периодическая функция, то достаточно нарисовать ту часть искомого множества, которая лежит в некотором квадрате со стороной 2π, например для $x \in [-\pi; \pi]$, $y \in [-\pi; \pi]$. Далее, так как косинус — четная функция, то достаточно считать, что $x, y \in [0; \pi]$. На отрезке $[0; \pi]$ косинус убывает, поэтому

$$\cos x \leqslant \cos y \iff x \geqslant y.$$

На рис. 4, *в* изображена та часть искомого множества, которая находится в квадрате $x, y \in [0; \pi]$. Чтобы найти часть искомого множества, лежащую во вдвое большем квадрате, нужно отразить полученный треугольник относительно оси абсцисс, а затем отразить объединение двух треугольников относительно оси ординат. Наконец, произведя параллельные переносы на вектора с координатами $(2\pi k, 2\pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$, мы и получим ответ.

Первая идея решения задачи Д традиционна: так как $|\sin X| \leqslant 1$, а $|\frac{1}{\cos Y}| \geqslant 1$, то равенство обеих частей данного уравнения возможно только если $\sin\frac{1992\pi^2}{x} = \pm 1 = \cos x$, т. е. $\frac{1992\pi^2}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $x = 2\pi l$, или $\frac{1992\pi^2}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ и $x = \pi + 2\pi l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$. В отличие от стандартных задач, связанных с тригонометрическими функциями, поставленная в этом месте точка не означает конец решения — оно здесь, собственно говоря, только начинается.

После обычных преобразований мы получаем два уравнения в целых числах: $1992 = l(4k+1)$, $2\cdot 1992 = (2l+1)(4k+1)$. Ясно, что второе из них решений не имеет. Чтобы решить первое, нужно найти все делители числа 1992, имеющие остаток 1 при делении на 4 (отрицательное число тоже может быть делителем!). Ответ: $16\pi, 3984\pi, -48\pi, -1328\pi$.

Теперь — несколько задач, так сказать, “из области высшей математики”.

Задача Е. В последовательности $x_0, x_1, \ldots$ $x_0 = c$, а $x_n = nx_{n-1} - 1$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что если число c рационально, то данная последовательность не имеет конечного предела.

Действительно, если $c = \frac{p}{q}$, то $x_{q-1} = \frac{r}{q}$ $(r, p, q$ целые), значит, $x_q = r - 1$ и при всех $n \geqslant q$ число x_n целое, причем отличное от x_{n-1}. Следовательно, $|x_n - x_{n-1}| \geqslant 1$, поэтому последовательность $\{x_n\}$ не имеет конечного предела.

Попробуйте доказать, что существует только одно значение c, при котором существует $\lim x_n = a \neq \infty$ (кстати, чему он равен?).

Задача Ж. Найдите все прямые, касающиеся графика функции $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух различных точках.

На приводимую далее систему уравнений относительно абсцисс точек касания такой прямой даже не хочется и смотреть (хотя ее можно решить)! Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек касания, тогда

$$f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

таким образом, эта система имеет вид

$$\begin{cases} 4x_1^4 - 6x_1^2 + 2x_1 + 19 = \\ \qquad = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) + 19, \\ 4x_2^4 - 6x_2^2 + 2x_2 + 19 = \\ \qquad = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) + 19. \end{cases}$$

Поэтому мы поступим по-другому. Выражение, определяющее данную функцию, можно преобразовать к виду $y = x^2(x-1)^2 + 19x + 93$. Поскольку график $y = x^2(x-1)^2$ касается оси абсцисс при $x = 0$ и $x = 1$, то прямая $y = 19x + 93$ касается графика данной функции в точках $A(0, 93)$ и $B(1, 112)$ (в чем легко убедиться прямой проверкой). Осталось доказать единственность подобной "двойной" касательной, что очевидно с геометрической точки зрения, правда для аккуратного доказательства нужно будет использовать выпуклость графика на определенных его участках. Попробуйте вместо этого провести формальное рассуждение, доказав вначале, что если график многочлена $p(x)$ касается оси абсцисс в точке $x = x_0$, то $p(x) = (x-x_0)^k q(x)$, где $q(x)$ — многочлен, а $k \geqslant 2$ (аккуратное доказательство приведено далее, с. 46–47).

Задача 3. Рассмотрим тело, ограниченное плоскостями $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и поверхностью, получающейся при вращении графика $y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$ вокруг лежащей в плоскости Oxy прямой $y = m$. При каком m объем этого тела является наименьшим?

Будем решать задачу в общем виде. Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, тогда объем соответствующего тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b (f(x) - m)^2 dx.$$

Проделаем преобразование в интеграле:

$$V = \pi \int_a^b (m^2 - 2mf(x) + f^2(x))dx =$$

$$= \pi\left((b-a)m^2 - 2m\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx\right).$$

Полученное выражение является квадратичной функцией от m, поэтому его наименьшее значение достигается при

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(это так называемое среднее значение функции). В данной задаче $m = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x)dx = \frac{2}{3\pi}$.

Как мог убедиться читатель, решения всех этих достаточно разнообразных, хотя и основанных на обычном школьном материале, задач не сводятся к применению только стандартных формул и методов.

Задача И. Докажите, что многочлен $p_n(x) = x^n \sin\alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ делится на трехчлен $q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ при всех $n \geqslant 2$.

Ясно, что $p_2(x) = \sin\alpha \cdot q(x)$. Ясно также, что если имеет место разложение
$$p_3(x) = (ax + b)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1),$$
то $a = \sin\alpha$, $b = \sin 2\alpha$. Преобразование

$$\begin{aligned}
&(x\sin\alpha + \sin 2\alpha)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) = \\
&= x^3 \sin\alpha - 2x^2 \sin\alpha\cos\alpha + x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha - \\
&\qquad - 2x\sin 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha = \\
&\qquad = x^3\sin\alpha + x\sin\alpha(1 - 4\cos^2\alpha) + \sin 2\alpha = p_3(x)
\end{aligned}$$

показывает, что многочлен $p_3(x)$ действительно делится на $q(x)$, а частное равно $x\sin\alpha + \sin 2\alpha$.

Теперь уже нетрудно догадаться, что

$$p_n(x) = (x^{n-2}\sin\alpha + x^{n-3}\sin 2\alpha + \ldots + \sin(n-1)\alpha)q(x),$$

и затем проверить это тождество, например по индукции.

Приведем вто способ решения этой задачи, предоставив читателю судить, какой из них является более красивым (или естественным).

Трехчлен $q(x)$ имеет комплексные корни $z_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Многочлен $p_n(x)$ делится на $q(x)$, если числа $z_{1,2}$ являются также и его корнями. Преобразование

$$\begin{aligned}
p_n(z_{1,2}) &= (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n \sin\alpha - \\
&\quad - (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha = \\
&= (\sin\alpha\cos n\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha) \pm \\
&\quad \pm i(\sin n\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha) = 0
\end{aligned}$$

показывает, что это действительно так.

ЛОГИКА, ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

1. Задание множеств уравнениями

Уравнение $f(x,y)=0$ (неравенство $f(x,y)\geqslant 0$) задает на координатной плоскости множество, состоящее из всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению (неравенству). Таким образом, уравнение $y=f(x)$, или $y-f(x)=0$, задает график функции f. Чаще всего приходится исследовать комбинации различных уравнений (неравенств). Вся необходимая логика рассуждений содержится в решении следующей задачи.

Задача 1. Изобразите множество, заданное неравенством

$$\frac{1}{2x}\leqslant\frac{1}{x-y}.$$

Прежде всего преобразуем неравенство к виду

$$\frac{x+y}{2x(x-y)}\geqslant 0.$$

Это неравенство будет верно, если одновременно $x+y\geqslant 0$, $x>0$, $x-y>0$, т. е. если числа x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x+y\geqslant 0,\\ x>0,\\ x-y>0.\end{cases}$$

Каждое из входящих в эту систему неравенств задает полуплоскость, ограниченную соответствующей прямой. Поскольку решения системы удовлетворяют каждому из неравенств, то она задает пересечение всех этих полуплоскостей (рис. 5, *а*).

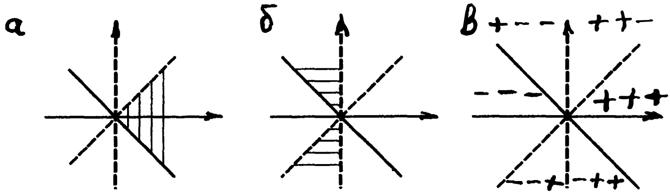

Рис. 5

Кроме того, исследуемое неравенство справедливо, если

$$\begin{cases} x+y \geqslant 0, \\ x<0, \\ x-y<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y \leqslant 0, \\ x>0, \\ x-y<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y \leqslant 0, \\ x<0, \\ x-y>0. \end{cases}$$

Множества, заданные первой и третьей из этих систем, изображены на рис. 5, *б* (вторая система решений не имеет). Чтобы получить окончательный ответ, надо объединить все найденные множества.

Вместо перехода к системам неравенств можно было поступить следующим образом.

Изобразим на плоскости прямые, заданные уравнениями $x+y=0$, $x=0$ и $x-y=0$ (рис. 5, *в*). Плоскость разбилась на шесть секторов, в каждом из которых выражения $x+y$, $x-y$, x, стоящие в числителе и знаменателе исследуемой дроби, сохраняют знак. Поскольку при переходе через каждый из лучей (не в его вершине) в точности один из множителей изменяет свой знак, то определив знак дроби в одном из секторов, мы можем расставить знаки и во всех остальных. В точке $M(1,0)$ дробь положительна, поэтому знаки распределяются так, как показано на рис. 5, *в*.

Заметим, что приведенное рассуждение является точным аналогом популярного "метода интервалов".

Частые ошибки при решении неравенств связаны с такими их преобразованиями, которые можно выполнять только при условии положительности некоторых выражений (например, при умножении на них). В следующей задаче требуется изобразить на плоскости множества, заданные такими неравенствами, которые не особо думающий ученик приведет к виду $x \geqslant y$.

Задача 2. Изобразите множества, заданные неравенствами: $x \geqslant y$; $x^2 \geqslant y^2$; $|x| \geqslant |y|$; $1 \geqslant \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{x}{y} \geqslant 1$; $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{y}$; $x^3 \geqslant y^3$.

В решении следующей задачи полезно использовать одно новое соображение — симметричность множества.

Задача 3. Изобразите множества, заданные следующими уравнениями (неравенствами): $x^2-4y^2=0$; $x^2+y^2=1$; $x^2y+y^3=y$; $xy+1=x+y$; $x^2-x+2=0$; $|x|+|y| \leqslant 1$; $x^2+2x+y^2=0$; $x^2+2xy+y^2=1$; $x^2-2xy+y^2=0$; $|x+y|+|x-y|=2$; $\max\{|x|,|y|\} \geqslant 1$; $xy \geqslant 1$.

Иллюстрацией к задаче является рис. 6, на котором изображены некоторые из искомых множеств (какие?). Разберем два примера.

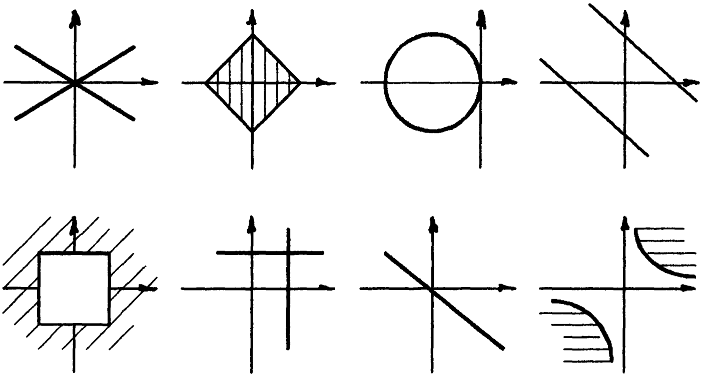

Рис. 6

Неравенству $|x| + |y| \leqslant 1$ удовлетворяют одновременно пары чисел (x, y), $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$, поэтому искомое множество симметрично относительно осей и начала координат. Следовательно, достаточно построить ту его часть, которая лежит в первом координатном угле, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. При этих условиях множество задано неравенством $x + y \leqslant 1$.

Перепишем уравнение $x^2 + 2x + y^2 = 0$ в виде $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ — это уравнение задает окружность радиусом 1 и с центром в точке $A(-1, 0)$.

Упражнения

1. Изобразите и сравните друг с другом множества, заданные следующими неравенствами:

а) $\sqrt{x} \geqslant y$ и $x \geqslant y^2$; б) $\log_2 x \leqslant y$ и $x \leqslant 2^y$.

2. Нарисуйте множество, заданное неравенством (системой неравенств): $\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{x-y}$; $x^3 + xy^2 \geqslant 2x^2y$; $1 \leqslant \sqrt{y} \leqslant x$; $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$.

См. также задачи 5.1а[1]; 6.1а; 7.1б; 16.3а; 17.3а; 18.2б; 19.2б; 28.1б; 29.1б; 36.2а; 37.2а.

---

[1]Здесь и далее в качестве упражнений предлагаются задачи из других разделов книги; к примеру, под задачей 5.1а понимается пункт а) задачи 1 варианта 5.

2. Равносильность

Два уравнения (неравенства), а также их системы и совокупности называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений. Однако как же можно установить равносильность двух неравенств, если изначально их решения неизвестны?

Рассмотрим следующий стандартный пример. Даны уравнение $x = y$ и уравнение $x^2 = y^2$, полученное из первого возведением обеих его частей в квадрат. Поскольку $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, то

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - y = 0 \text{ или } x + y = 0.$$

Поэтому уравнение $x = y$ равносильно системе, состоящей из уравнения $x^2 = y^2$ и дополнительного неравенства, означающего, что обе переменные x и y имеют один и тот же знак,

$$x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = y^2, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим уравнение $\sqrt{x} = y$. По определению квадратного корня, мы можем записать, что оно равносильно системе, состоящей из этого уравнения и двух неравенств $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Введенные условия обеспечивают неотрицательность обеих частей этого уравнения, следовательно, последняя система равносильна системе

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку второе соотношение этой системы следует из первого, то окончательно получаем

$$\sqrt{x} = y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y^2, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Этот результат можно применить к решению стандартных иррациональных уравнений. Именно, имеет место следующая равносильность ("что надо делать, чтобы избавиться от одной иррациональности"):

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

здесь уже $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные выражения (функции).

Задача 4. Докажите, что имеет место следующая равносильность:

$$\log_{f(x)} g(x) = h(x) \iff \begin{cases} g(x) = (f(x))^{h(x)}, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Задача 5. Изобразите на плоскости множество, заданное: а) уравнением $\sqrt{2x+y} = x+1$; б) неравенством $\log_{x+1}(x+y^2) \leqslant 1$.

Ответы: см. рис. 7, *а, б*.

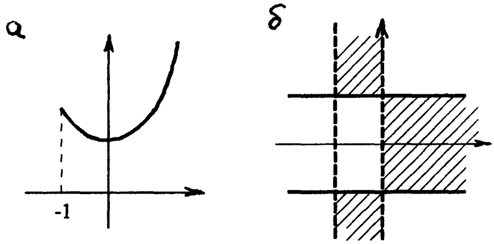

Рис. 7

а) Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x + y = (x+1)^2, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

б) Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 0 < x+1 < 1, \\ x + y^2 \geqslant x + 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 1 > 1, \\ x + y^2 \leqslant x + 1, \end{cases}$$

пребразуя, получаем

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ y^2 \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0, \\ y^2 \leqslant 1, \end{cases}$$

откуда и следует ответ.

Упражнения

1. Изобразите множества, заданные неравенствами:

а) $(x^2 + y^2 - 2)\sqrt{1-x} \geqslant 0$; б) $\log_{x^2}(xy) \geqslant 1$.

2. Докажите, что точка $A(a, b)$ является центром симметрии множества $\mathcal{M}$, заданного уравнением $f(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда для каждой пары чисел (x, y), удовлетворяющей этому уравнению, пара $(2a - x, 2b - y)$ также удовлетворяет данному уравнению.

См. также задачи 22.2а; 22.3б; 23.3б; 26.1б; 27.1б; 40.1в; 41.1в; 42.1г; 50.2в-г; 51.2в-г; 58.1а-б; 59.1а-б.

3. Модуль

Прямо из определения модуля получим, что

1) $|a| = a \iff a \geqslant 0$;

2) $|a| = |b| \iff a = b$ или $a = -b \iff a^2 = b^2$;

3) $|a| = b \iff \begin{cases} a = b, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -b, \\ b \geqslant 0. \end{cases}$

Полезно иметь в виду, что модуль можно определить по-другому:

4) $|a| = b \iff b = \max\{a, -a\}$,

откуда легко вывести, что

5) $|a| \leqslant b \iff \begin{cases} a \leqslant b, \\ a \geqslant -b; \end{cases}$

6) $|a| \geqslant b \iff a \geqslant b$ или $a \leqslant -b$.

Задача 6. Изобразите на плоскости множества, заданные неравенствами: $|2x - y| \leqslant 2$; $|2x - y| \geqslant x$; $x^2 + |y| \leqslant 2$.

Ответы — см. рис. 8, *а–в*.

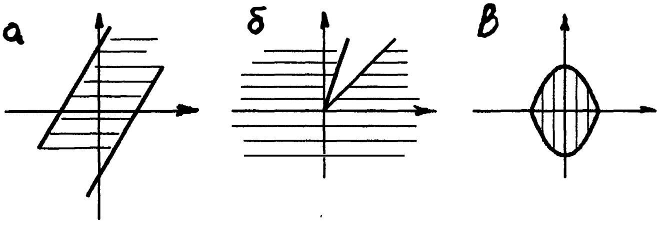

Рис. 8

Еще одно полезное соображение: геометрический смысл модуля $|a - b|$ разности двух чисел — это расстояние между ними на числовой прямой. Примените его к решению следующей задачи.

Задача 7. Докажите, что уравнение $|x| + |x+3| = 3$ имеет бесконечно много решений.

Упражнения

1. Докажите тождества $|a| + |b| = \max\{|a+b|, |a-b|\}$; $|x-y| + |x+y| = 2\max\{|x|, |y|\}$.

2. Нарисуйте множества, заданные следующими уравнениями и неравенствами: $(x-|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 4$; $x+y = |x^2-y^2|$; $x^2+y^2 = 1+2|xy|$; $x \leqslant |x^3+xy^2|$.

См. также задачи 13.1а; 20.1б; 21.1б; 22.4б-в; 23.4б-в; 24.1б; 25.1б.

4. Функции, графики, решения

Графическую интерпретацию исследуемого уравнения (неравенства) часто полезно сделать для того, чтобы: увидеть структуру его решений и предохранить себя от возможных ошибок, связанных с невнимательностью, неверными вычислениями, забывчивостью. Можно сказать так: графики не заменяют формальное алгебраическое (аналитическое) решение, а помогают провести его наиболее естественным образом, ощутив роль входящих в него числовых коэффициентов, что особенно важно при составлении задач (чем часто приходится заниматься учителю).

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 8. а) Решите уравнение $x^2 - x = |2x-1|$. б) Придумайте уравнение с модулями, не имеющее решений.

а) На рис. 9, *а* показаны графики функций $y = x^2 - x$ и $y = |2x-1|$, штриховые линии — это части прямых $y = 2x-1$, $y = 1-2x$, не принадлежащие графику модуля. Ясно видно, что уравнение имеет два решения, причем ими являются, соответственно, меньший корень уравнения $x^2 - x = 1 - 2x$ и больший корень уравнения $x^2 - x = 2x - 1$.

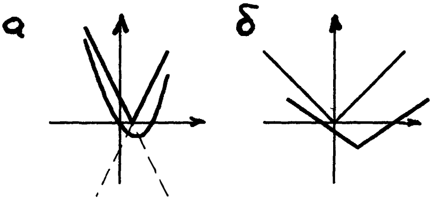

Рис. 9

б) Нарисуем график функции $y = |x|$ и график еще какого-нибудь модуля, не имеющего общих точек с первым графиком; на рис. 9, *б* вторым изображен график $y = \frac{1}{2}|x-1|-1$. Поэтому уравнение $\frac{1}{2}|x-1|-|x| = 1$ решений не имеет, хотя, если убрать модули, то каждое из четырех линейных уравнений будет иметь решение.

Задача 9. а) Решите неравенство $\sqrt{x+1}+x > 1$. б) Придумайте иррациональное неравенство, множеством решений которого является вся его область определения.

а) На рис. 10, *а* изображены графики функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = 1-x$. Их единственная точка пересечения имеет координаты $(0,1)$. Ясно, что решение данного неравенства — луч $(0;+\infty)$.

Какой геометрический смысл имеет "посторонний корень" уравнения $\sqrt{x+1}+x = 1$? Это абсцисса точки пересечения прямой $y = 1-x$ и параболы $y = -\sqrt{x+1}$, изображенной штриховой линией.

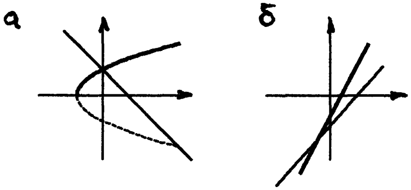

Рис. 10

б) Нарисуем, например, две прямые, единственная точка пересечения которых лежит ниже оси абсцисс; прямые, изображенные на рис. 10, *б*, имеют уравнения $y = 2x-1$ и $y = x-\sqrt{2}$. Поэтому в области, где обе эти функции неотрицательны, $2x-1 > x-\sqrt{2}$, значит, решение неравенства $\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{x-\sqrt{2}}$ — это его область определения, т. е. луч $[\sqrt{2};+\infty)$.

Соображения, связанные с понятием монотонности функций, часто упрощают решения задач.

Задача 10. Решите неравенство $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3} \geqslant 5$.

Обозначим через $f(x)$ левую часть данного неравенства. Из свойств квадратного корня следует, что функция f монотонно возрастает на всей своей области определения, поэтому, если $f(x_*) = 5$, то множество решений неравенства $f(x) \geqslant 5$ — это луч $[x_*;+\infty)$. В данном случае видно, что $x_* = 3$.

Исследование функции на монотонность — стандартное применение производной, однако в школьном курсе математики оно должно появляться раньше, чем дифференцирование.

Задача 11. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$.

Пусть $a > b$. Рассмотрим неравенство $f(a) > f(b)$. Поскольку обе его части положительны, мы вправе возвести их в квадрат, после преобразований получим неравенство $\sqrt{4-a^2} > \sqrt{4-b^2}$, и, далее, $-a^2 > -b^2$. Таким образом, промежутки монотонности данной функции совпадают с промежутками монотонности функции $y = -x^2$, откуда и следует ответ.

Задача 12. Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = a$?

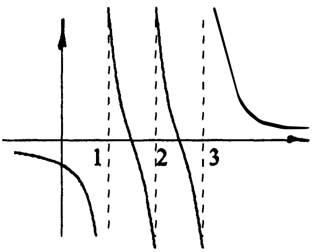

Рис. 11

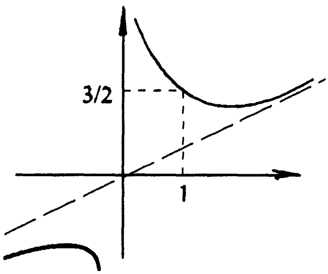

Рис. 12

Функции $y = \dfrac{1}{x-1}$, $y = \dfrac{1}{x-2}$ и $y = \dfrac{1}{x-2}$ определены и возрастают на луче $(-\infty; 1)$. Следовательно, их сумма также возрастает на этом луче, причем она стремится к нулю при $x \to -\infty$ и стремится к $-\infty$ при $x \to 1$, $x < 1$. Аналогичное исследование можно провести на каждом из промежутков $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$. Результатом является эскиз графика, изображенный на рис. 11, из которого видно, что данное уравнение имеет три решения при $a \neq 0$ и два при $a = 0$.

В решении данной задачи мы использовали в неявном виде одно из основных утверждений математического анализа — теорему о промежуточном значении.

Задача 13. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 - 2ax + 2 = 0$ больше единицы?

Перепишем данное уравнение в виде $a = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Построение графика $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ (рис. 12) произведем стандартным способом (вычислив производную).

Нас интересуют те значения a, при которых прямая $y = a$ пересекает этот график в точках с абсциссами, большими единицы, откуда и следует ответ: $\sqrt{2} \leqslant a < \frac{3}{2}$.

Упражнения

1. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = |2x+1| + |x|$.

2. Докажите, что если функция f монотонна на всей оси, то множество, заданное неравенством $f(x) > f(y)$, содержит полуплоскость $x > y$.

См. также задачи 5.2; 8.2; 9.1а; 10.1а; 16.3б; 17.3б; 20.3б; 20.4б; 21.3б; 21.4б; 22.1б; 23.1б; 24.4а; 25.2г; 28.1в; 29.1в; 30.1г; 30.3а; 31.1г; 31.3а; 40.1а; 40.2б; 41.1а; 41.2б.

5. Образы и прообразы

Основное соображение, связанное с существованием решений уравнения, совсем просто: уравнение $f(x) = a$ разрешимо тогда и только тогда, когда число a входит в множество значений функции f. Таким образом, мы можем находить образы не очень сложных функций, используя известные условия разрешимости уравнений. С другой стороны, исследовав соответствующую функцию, мы можем сделать вывод о существовании (числе, расположении) корней уравнения (см. решения задач 12, 13).

Задача 14. Каково множество значений функции f, заданной формулой $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$?

Вместо того чтобы исследовать данную функцию при помощи производной, сведем задачу к исследованию квадратного уравнения. Именно: число a входит в множество значений функции f, если уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение, т. е. если разрешимо уравнение $\frac{x}{x^2+x+1} = a$, или $ax^2 + (a-1)x + a = 0$. Таким образом, или $a = 0$, или $(a-1)^2 - 4a^2 = -3a^2 - 2a + 1 \geqslant 0$, откуда $a \in [-1; \frac{1}{3}]$.

Задача 15. При каких a уравнение $x^3 - ax + 2 = 0$ имеет хотя бы одно положительное решение?

Записав данное уравнение в виде $a = x^2 + \frac{2}{x}$, мы сводим задачу к вопросу о нахождении образа луча $(0; +\infty)$ для функции $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ (см. рис. 13, *а*).

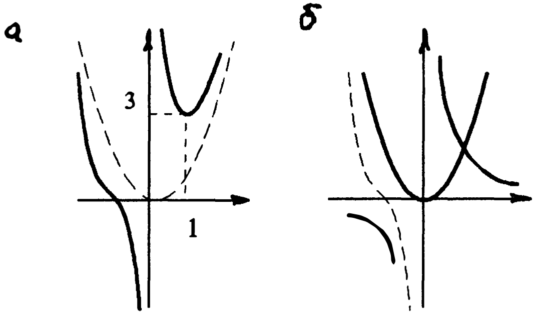

Рис. 13

На рис. 13, *б* показаны графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{2}{x}$. Каждое значение функции f равно сумме значений этих двух функций. На луче $(-\infty; 0)$, где обе они убывают, график суммы лежит ниже графика первой из них и выше второй, причем он приближается к графику первой функции при $x \to -\infty$ и к графику второй при $x \to 0$. Однако, поскольку на луче $(0; +\infty)$ первая из функций возрастает, а вторая — убывает, для построения графика функции f необходимы дополнительные вычисления. Исследовав стандартным образом функцию (при помощи дифференцирования), получим, что $x = 1$ — точка ее минимума. График функции изображен на рис. 13, *а*, образ $f((0; +\infty)) = [3; +\infty)$, поэтому ответ: $a \geqslant 3$.

Понятие прообраза множества в большей степени связано с решениями неравенств. Напомним, что прообразом $f^{-1}(\mathcal{E})$ множества $\mathcal{E}$ называется множество всех чисел x, для которых $f(x) \in \mathcal{E}$. Таким образом, решить неравенство $f(x) < a$ — это значит найти прообраз луча $(-\infty; a)$, т. е. найти $f^{-1}(-\infty; a)$.

Задача 16. Найти прообраз и образ первого координатного угла при отображении f плоскости в себя, определенном формулой $f(x, y) = (2x + y, x + y)$.

По определению, точка с координатами (x, y) принадлежит прообразу первого координатного угла тогда и только тогда, когда ее образ, т. е. точка с координатами $(2x + y, x + y)$, принадлежит этому углу. Значит, (x, y) — точка прообраза тогда и только

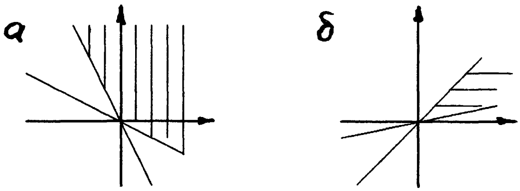

Рис. 14

тогда, когда $2x + y \geqslant 0$ и $x + y \geqslant 0$; таким образом, искомый прообраз задается системой неравенств (рис. 14, *а*)

$$\begin{cases} 2x + y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$$

Для нахождения образа, как это ни покажется на первый взгляд странным, требуется провести дополнительные преобразования. Действительно, точка (x, y) принадлежит образу первого координатного угла тогда и только тогда, когда найдется такая пара (u, v), что $u, v \geqslant 0$ и $2u+v = x$, $u+v = y$. Решив полученную систему двух линейных уравнений, получим, что $u = x - y$, $v = 2y - x$, поэтому образ первого координатного угла задается системой неравенств (рис. 14, *б*)

$$\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ 2y - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача 17. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$ не имеет решений на отрезке $[0; \pi]$.

Давайте прежде всего переформулируем данную задачу. Для удобства (а как будет видно из дальнейших рассуждений, не только для этого) введем обозначение $b = \sin a + \cos a$.

Первый вопрос — при каких b уравнение $\sin x + \cos x = b$ не имеет решений на отрезке $[0; \pi]$ — связан с вычислением образа множества. Это уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда число b не принадлежит образу отрезка $[0; \pi]$ для функции $f(x) = \sin x + \cos x$. Ответ на него может быть получен разными способами, проще всего — записав $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, откуда и следует, что $b \notin [-1; \sqrt{2}]$.

Второй вопрос — при каких a значение $f(a)$ не входит в указанный отрезок, т. е. при каких a верно неравенство $f(a) < -1$ — это вопрос о нахождении прообраза множества, или, более привычно, о решении неравенства $\sin a + \cos a < -1$; ответ: $a \in (\pi + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Упражнения

1. Решите неравенство $|2^x - 2^{-x}| \leqslant 2^a - 2^{-a}$.

2. Найдите все такие значения a, при которых неравенство $\dfrac{x^2+ax+5}{x^2+2x+2} < 3$ выполняется для всех значений x, кроме одного.

См. также задачи 7.3; 12.2б; 13.2б; 15.1г; 16.3в; 17.3в; 18.3б; 19.3б; 27.4а; 32.2в; 33.2в.

6. Композиции («сложные функции»). Обратные функции

Пусть множество значений функции g содержится в области определения функции f. Композицией функций g и f («сложной функцией») называется функция, значения которой вычисляются по правилу $y = f(g(x))$. Для самой композиции функций (в указанном порядке) мы будем использовать обозначение $f[g]$ и называть функцию g внутренней, а f — внешней. Тривиальное замечание: результат зависит от порядка функций, поскольку, вообще говоря, $f(g(x)) \neq g(f(x))$. К примеру, если $f(x) = x^2$, а $g(x) = 2x+1$, то $f(g(x)) = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$, а $g(f(x)) = 2x^2+1$.

Задача 18. Найдите все такие линейные функции f, для которых $f(f(x)) = 4x + 3$.

Если $f(x) = ax + b$, то $f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + b(a+1)$. Решая систему $a^2 = 4$, $b(a+1) = 3$, получаем ответ: $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = -2x - 3$.

Такие свойства функций, как четность и нечетность, периодичность, монотонность, часто «передаются» от функций к их композициям. К примеру, если функция g периодична, то композиция $f[g]$ также будет периодичной (однако ее период может быть меньше периода функции g).

Действительно, так как $g(x+T) = g(x)$, то $f(g(x+T)) = f(g(x))$. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Тогда $f(g(x)) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Период последней функции равен π.

Композиция монотонно возрастающих функций также является монотонно возрастающей функцией: действительно, если $a > b$, то $g(a) > g(b)$, а значит, $f(g(a)) > f(g(b))$.

Данное соображение можно использовать для построения графика функции без использования производной, представив эту функцию в виде некоторой композиции.

Задача 19. Постройте графики функций: а) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$; б) $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$.

а) Запишем функцию f в виде $f(x) = g(x^2)$, где $g(x) = x^2 - 4x - 5$. При $x \in (-\infty; -\sqrt{2}]$ имеем $x^2 \in [2; +\infty)$. Так как функция g возрастает на луче $[2; +\infty)$, а функция $y = x^2$ убывает на $(-\infty; -\sqrt{2}]$, то функция f убывает на $(-\infty; -\sqrt{2}]$. Продолжив рассуждение, получим, что эта функция является убывающей на отрезке $[0; \sqrt{2}]$ и возрастающей — на $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; +\infty)$ (см. рис. 15, *а*).

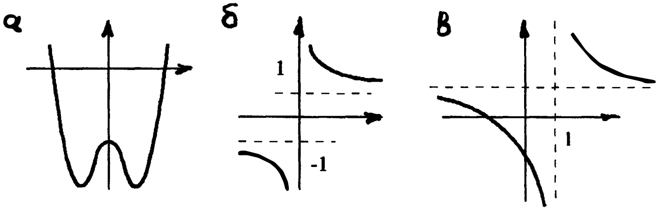

Рис. 15

б) На рис. 15, *в* изображен график функции $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Так как $f(x) = g(2^x)$, функция $y = 2^x$ возрастает на всей своей области определения и переводит ее в луч $(0; +\infty)$, то график f выглядит так, как показано на рис. 15, *б*.

Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнения $f(g(x)) = a$ при $x \in D$. Пусть E — образ множества D для функции g. Данное уравнение разрешимо в D тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = a$ разрешимо в E, т. е. если найдется такое число $t \in E$, что $f(t) = a$.

Теперь исследуем задачу о числе решений уравнения $f(g(x)) = a$ при $x \in D$. Если функция g обратима на множестве D, то число решений данного уравнения совпадает с числом решений уравнения $f(x) = a$ на множестве E. Если функция f является обратимой на E, то искомое число решений совпадает с числом решений уравнения $g(x) = f^{-1}(a)$. Здесь $f^{-1}(a)$ — значение обратной функции, или просто — решение уравнения $f(x) = a$ (в данном случае это уравнение имеет единственное решение).

Использование понятие обратной функции при решении стандартных школьных задач может показаться надуманным. Однако формулы, определяющие функции, обратные к заданным, в действительности появляются очень часто. К примеру, получив формулу $x = \dfrac{a}{1-a}$ для решений уравнения $\dfrac{x}{x+1} = a$, мы тем самым показали, что функция $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ обратима на всей своей области определения и обратная к ней функция g определена при $x \neq 1$ и задана формулой $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

Напомним графическую интерпретацию понятия обратной функции. Формула для функции f задает правило, по которому числу a сопоставляется значение $b = f(a)$: $a \mapsto b = f(a)$. На рис. 16 изображен график функции $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. По указанному выше правилу мы сопоставляем точке оси абсцисс ординату лежащей над ней точки графика. Поскольку обратная функция осуществляет обратное сопоставление, то для получения ее графика нужно просто поменять местами оси Ox и Oy. Таким образом, график обратной функции симметричен графику исходной функции относительно прямой $y = x$.

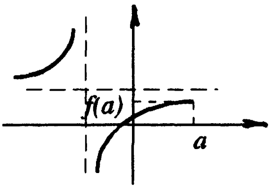

Рис. 16

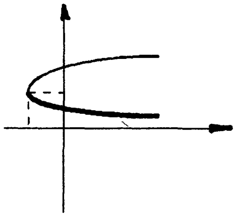

Рис. 17

Задача 20. На каких промежутках обратима функция $f(x) = x^2 - 2x$ и какими формулами задаются функции, обратные к ней на этих промежутках?

Рассмотрим уравнение $x^2 - 2x = a$. По обычной формуле для решений квадратного уравнения запишем, что $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$, откуда $a \geqslant -1$. Далее, $x_1 \geqslant 1$, а $x_2 \leqslant 1$. Формулы для x_1, x_2 и определяют функции g_1, g_2, обратные к f на лучах $[1; +\infty)$ и $(-\infty; 1]$ соответственно (рис. 17).

Необходимость исследования при возведении в квадрат связана с необратимостью функции $y = x^2$. Если же значения некоторых функций f и g лежат в области, на которой некоторая функция h обратима, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $h(f(x)) = h(g(x))$ равносильны. В случае $h(x) = x^2$ для этого достаточно совпадения знаков $f(x)$ и $g(x)$.

Интересные примеры связаны с задачами, в формулировки которых участвуют обратные тригонометрические функции.

Напомним, что арксинусом называется функция, обратная к функции $\sin x$, рассматриваемой на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, поэтому эта функция однозначно определяется условиями

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \arcsin x \in [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}].$$

Арккосинус — функция, обратная к косинусу, рассматриваемому на отрезке $[0; \pi]$, поэтому она определяется условиями

$$\cos(\arccos x) = x, \ \arccos x \in [0; \pi].$$

Областью определения обеих этих функций, конечно, является отрезок $[-1; 1]$. В противоположность указанным двум равенствам, формула $\arcsin(\sin x) = x$ неверна, точнее, она справедлива лишь при $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, что непосредственно следует из определения арксинуса. На рис. 18, *а, б* изображены, соответственно, графики функций $\arcsin(\sin x)$ и $\arccos(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$.

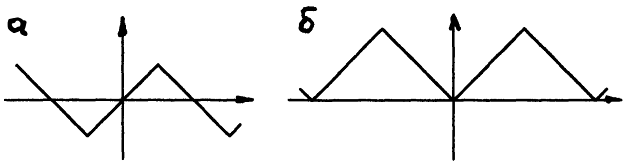

Рис. 18

Установим справедливость тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Прежде всего перепишем его в виде $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Достаточно доказать, что, во-первых, $\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = x$ и, во-вторых, $\frac{\pi}{2} - \arccos x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Оба эти свойства следуют из свойств синуса и определения арксинуса.

Задача 21. Решите уравнение $\arccos(\frac{3}{4} - x) = 2\arcsin x$.

По определению обратных тригонометрических функций имеем $2\arcsin x \in [0; \pi]$, откуда $\arcsin x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, значит, $x \in [0; 1]$. При этом условии обе части уравнения лежат в отрезке $[0; \pi]$, на котором косинус обратим, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $\cos(\arccos(\frac{3}{4} - x)) = \cos(2\arcsin x)$, или $\frac{3}{4} - x = 1 - 2x^2$, откуда $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$. Учтя условие $x \in [0; 1]$, получаем ответ: $x = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

Упражнения

1. Докажите, что: 1) композиция монотонно убывающих функций монотонно возрастает; 2) если функция g четна, то такова же и композиция $f[g]$; 3) композиция двух нечетных функций нечетна; 4) если функция f периодична, то композиция $f[g]$ быть таковой не обязана; 5) не существует такой функции f, что $\sin x \cos 2x = f(\cos x)$; 6) если функция $y = f(x^3)$ монотонна, то и функция f монотонна.

2. а) Найдите формулу для функции, обратной к функциям: 1) $f(x) = \sin x$ на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$; 2) $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1}$; 3) $f(x) = \log_{2x} x$.

б) Верно ли, что функция f обратима, если: 1) $f(x) = x^3 + 3x$; 2) обратима функция $g(x) = f(x^3)$; 3) обратима функция $f[g]$?

3. Решите уравнения:
$\arccos(\cos x) = \arcsin(\sin x)$; $\arccos(x + \frac{1}{2}) = 2\arcsin x$.

См. также задачи 1.1а; 4.2в; 11.1а; 24.2а,в; 25.2в-г; 25.4а; 28.3б-в; 29.3б-в; 30.2в; 30.3б-в; 31.2в; 31.3б-в; 36.1а; 36.2в; 36.3в; 37.1а; 37.2в; 37.3в; 42.2а,в-г; 43.2а,в-г.

7. Неравенства

Рассмотрим следующую стандартную задачу.

Задача 22. Докажите неравенство $x + |x+2| + |2x-1| \geqslant 3$.

График функции $f(x) = x + |x+2| + |2x-1|$ кусочно-линеен, причем эта функция является выпуклой (докажите это), поэтому ее наименьшее значение достигается в одном из углов, т. е. в одной из точек $x = -2$ или $x = \frac{1}{2}$. Поскольку $f(-2) = f(\frac{1}{2}) = 3$, то неравенство верно.

Конечно, в данном случае нетрудно явно выписать выражение для функции f на каждом из соответствующих промежутков; автор хотел в этом простом случае подчеркнуть сам метод рассуждения.

Задача 23. При каких значениях a выражение $x^2 + 2ax + a - 2$ положительно на отрезке $[1; 2]$?

Положим $f(x) = x^2 + 2ax + a - 2$. По условию, $f(1) = 3a - 1 > 0$, т. е. $a > \frac{1}{3}$. При указанных значениях параметра a функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$, поэтому если $f(1) > 0$, то $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [1; 2]$ (рис. 19, a). Таким образом, ответ: $a > \frac{1}{3}$.

Дадим также иное решение данной задачи:

$$x^2 + 2ax + a - 2 > 0 \text{ при } x \in [1; 2] \iff a > g(x) = \frac{2 - x^2}{2x + 1},$$

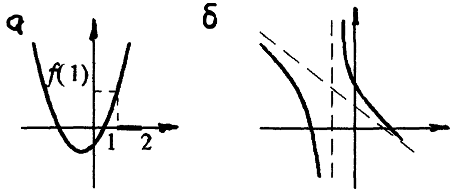

Рис. 19

и это условие будет выполнено, если

$$a > \max_{[1;2]} \frac{2 - x^2}{2x + 1}.$$

Так как $g'(x) = -\dfrac{2(x^2 + x + 2)}{(2x + 1)^2} < 0$, то функция g убывает на любом отрезке, на котором она непрерывна. Поэтому ее наибольшее значение на $[1; 2]$ достигается в точке $x = 1$, так что $a > g(1) = \frac{1}{3}$ (рис. 19, *б*).

Идея приведенного выше рассуждения достаточно проста. Подчеркнем, что для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции имеется такое мощное техническое средство, как дифференциальное исчисление.

Упражнения

При каких значениях a неравенство $a(2 + \sin^2 x)^4 + \cos^2 x > 11$ справедливо для всех вещественных x?

См. также задачи 1.1б; 11.1б; 17.1в; 18.3а; 19.3а; 40.1г; 41.1г; 46.1в; 55.3а; 57.3а; 58.2в; 59.2в.

8. Замены в уравнениях и неравенствах

Замена переменной — естественный подход, применяемый при решении достаточно запутанной задачи, позволяющий разбить ее на цепочку из более простых. С формальной точки зрения, “введение новой переменной” есть представление некоторой функции в виде композиции двух других. Даже такой стандартный прием, как замена $t = x^2$ в процессе решения биквадратного уравнения, к примеру, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, связан с представлением функции $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ в виде $f(x) = g(x^2)$, где $g(x) = x^2 - 5x + 4$. Конечно, в данном случае обозначения f и g совершенно излишни, поскольку никакие свойства этих *функций* в решении не используются. Однако из дальнейшего будет видно, что введение соответствующих функций помогает (особенно при решении неравенств), во-первых, не загромождать вычисления лишними условиями, а во-вторых, проводить логически верные рассуждения.

Задача 24. Решите неравенства:
а) $\sqrt{x+3}+\frac{x}{2}\geqslant 0$; б) $4^x-3\cdot 2^x-4\leqslant 0$; в) $\cos x\geqslant\cos 2x$;
г) $2x^4-3x^3-x^2-3x+2\geqslant 0$.

а) Сделав замену $t=\sqrt{x+3}$, получим уравнение $t^2+2t-3\geqslant 0$, откуда $t\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Обратите внимание, что на этом шаге не обязательно искать область определения исходного уравнения, не обязательно и выписывать условие $t\geqslant 0$.

Однако будет, вообще говоря, ошибкой следующее рассуждение, которое часто встречается в ученических работах: "*Для того чтобы решить квадратное неравенство, решим вначале квадратное уравнение, корнями которого являются числа* -3 *и* 1. *Поскольку первое число не может быть квадратным корнем, то мы его отбрасываем.*" Да, очень часто получается верный ответ, однако можно подобрать такие примеры, в которых он окажется неверным.

Продолжаем решение данного неравенства. Перепишем условие на переменную t в виде: $t\leqslant -3$ или $t\geqslant 1$. Следовательно, нам надо решить неравенства $\sqrt{x+1}\leqslant -3$, $\sqrt{x+3}\geqslant 1$ и объединить полученные ответы. Первое из них действительно не имеет решений. Однако из того, что некоторое число не входит в область значений, отнюдь не следует, что все числа, меньшие его, также этой области не принадлежат! В рассматриваемом случае решение второго неравенства — луч $[-2;+\infty)$ — является ответом.

б) В решении данного неравенства мы с самого начала используем условие $t=2^x>0$. Решив неравенство, получающееся после указанной замены, находим: $-1\leqslant t\leqslant 4$; поскольку $t>0$, то первое неравенство является лишним. Остается решить неравенство $2^x\leqslant 4$, откуда $x\leqslant 2$.

в) При $t=\cos x$ получим, что $t\in[-\frac{1}{2};1]$, или, учитывая область значений косинуса, $\cos x\geqslant -\frac{1}{2}$, откуда $x\in[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k]$, $k\in\mathbb{Z}$.

г) Многочлен, стоящий в левой части данного неравенства, обладает симметрией (такой многочлен называется возвратным).

В этом случае применяется замена $t = x + \frac{1}{x}$, в результате которой мы получаем неравенство $2t^2 - 3t - 5 \geqslant 0$, откуда $t \leqslant -1$ или $t \geqslant \frac{5}{2}$. Обратите внимание, что хотя уравнение $x + \frac{1}{x} = -1$ не имеет решений, множество $(-\infty; -1]$ игнорировать нельзя. Решая неравенства $x + \frac{1}{x} \leqslant -1$ и $x + \frac{1}{x} \geqslant \frac{5}{2}$, получаем: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$. Осталось заметить, что число $x = 0$ является решением исходного неравенства, поэтому окончательный ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$.

Следующий пример, как вы увидите, с технической стороны является несравнимо более сложным, хотя никаких новых идей для его решения не требуется.

Задача 25. При каких значениях a неравенство $4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \geqslant a$ верно при всех $x \geqslant 0$?

Выражение, стоящее в левой части неравенства, можно записать в виде композиции $f(g(2^x))$, где

$$g(x) = 2x + \frac{3}{x} \quad \text{и} \quad f(x) = x^2 - 2x - 12.$$

Более привычная запись:

$$t = 2^x, \quad u = 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x} = 2t + \frac{3}{t},$$
$$4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} = (2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x})^2 - 12 = u^2 - 12,$$

таким образом, данное неравенство приобретает вид

$$u^2 - 2u - 12 \geqslant a, \quad \text{где} \quad u = 2t + \frac{3}{t} \quad \text{и} \quad t = 2^x.$$

Это неравенство верно при всех $x \geqslant 0$, если

$$a \leqslant \min_{x \geqslant 0} f(g(2^x)) = \min_{x \geqslant 1} f(g(x)).$$

Найдем множество значений $g(x)$ при $x \geqslant 1$. График этой функции изображен на рис. 20, *а*, наименьшее значение равно $2\sqrt{6}$, поэтому множество значений — луч $[2\sqrt{6}; +\infty)$. Поскольку функция f возрастает на этом луче (рис. 20, *б*), то ее наименьшее значение достигается на его левом конце и равно $12 - 4\sqrt{6}$. Поэтому ответ: $a \leqslant 12 - 4\sqrt{6}$.

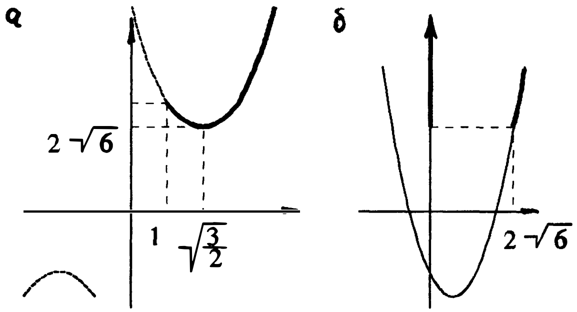

Рис. 20

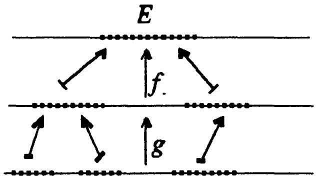

Рис. 21

В заключение приведем две теоретико-множественные формулы, лежащие в основе рассуждений, связанных с методом замены переменной (рис. 21):

$$f[g](D) = f(g(D)) \quad \text{и} \quad (f[g])^{-1}(E) = g^{-1}(f^{-1}(E)).$$

Упражнения

При каких значениях a уравнение $\sin\sqrt{a - x^2} = 1$ имеет ровно семь решений?

См. также задачи 9.2; 10.2; 14.1г; 16.1б; 17.1б; 18.3в; 19.3в; 20.3б; 21.3б; 22.3а-б; 23.3а-б; 30.2а; 31.2а; 32.4а-б; 33.4а-б; 46.1а-б; 46.2а; 47.1а-б; 47.2а; 50.1; 51.1; 53.2а; 53.2в.

9. Существование решений

Задача 26. Докажите, что всякий многочлен нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.

Поскольку речь идет о корнях многочлена, то мы вправе считать, что коэффициент при его старшем члене равен единице. Как доказано в Дополнении, при достаточно больших по модулю значениях x знак этого многочлена совпадает со знаком старшего члена, а так как, по предположению, степень многочлена нечетна, то он совпадает со знаком x. Таким образом, многочлен $p(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, поскольку функция $p(x)$ непрерывна на всей оси, существует такое значение c, что $p(c) = 0$.

Обратите внимание, что хотя исходная задача была чисто алгебраической, метод доказательства использует средства математического анализа.

Задача 27. Найдите условия на коэффициенты приведенного кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$, при которых оно имеет три различных действительных корня.

Обозначим через $f(x)$ левую часть этого уравнения. Имеем: $f'(x) = 3x^2 + p$. Если $p \geqslant 0$, то $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, следовательно, функция f монотонна на всей оси, значит, данное уравнение имеет один корень. Предположим, что $p < 0$. Пусть $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет три действительных корня, если $f(x_1) > 0 > f(x_2)$ (рис. 22).

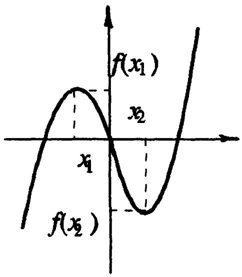

Рис. 22

Так как $f(x_{1,2}) = \pm\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}} + q$, то получаем, что должны выполняться неравенства

$$\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}} < -q < -\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Упражнения

Докажите, что уравнение $\sin x = 2x + 1$ имеет единственное решение.

См. также задачи 12.2в; 13.2в; 28.1а; 29.1а; 46.1г; 47.1г.

10. Множества, зависящие от параметров

Задача 28. Определите (в зависимости от a) число решений уравнения: а) $2|x-a| = x+1$; б) $|x+a| = 2-x^2$.

а) Нарисуем прямую $y = x+1$ и "галочку" $y = 2|x|$, из которой график функции $y = 2|x-a|$ получается при помощи сдвига вдоль оси обсцисс на a единиц (таким образом, его вершина имеет абсциссу a). Посмотрев на картинку (рис. 23, a), нетрудно понять, что данное уравнение имеет два корня при $a > -1$, один — при $a = -1$ и не имеет корней при $a < -1$.

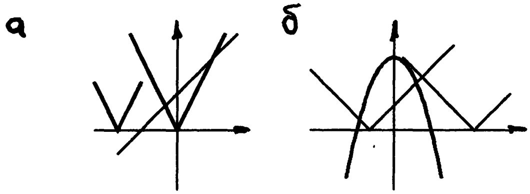

Рис. 23

б) Применим ту же самую идею, что и в решении предыдущей задачи: изобразим на плоскости график функции $y = 2-x^2$ и график $y = |x+a|$ при нескольких значениях параметра a (теперь вершина этого графика имеет абсциссу $-a$, рис. 23, $б$). Найдем значения этого параметра, при которых одна из сторон графика модуля касается данной параболы. Для этого проще всего приравнять нулю дискриминант уравнения $2-x^2 = x+a$, откуда $a = \frac{9}{4}$. Второе значение: $a = -\frac{9}{4}$.

Ясно, что при больших a данное уравнение корней не имеет. Оно будет иметь один корень при $a = \pm\frac{9}{4}$ (касание графика модуля и параболы) и два — при $a \in (-\frac{9}{4}; \frac{9}{4})$.

Заметьте, что эту задачу можно модифицировать, потребовав найти такие a, при которых данное уравнение имеет только положительные корни. Для решения такой задачи нужно просто проследить за точками пересечения "галки" с правой половиной параболы.

Задача 29. Нарисуйте множество, заданное уравнением $\sqrt{2xy+a} = x+y+1$. При каких a оно непусто?

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2xy + a = (x+y+1)^2, \\ x+y+1 \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = a+1, \\ x+y+1 \geqslant 0, \end{cases}$$

таким образом, оно определяет пересечение окружности, имеющей радиус $\sqrt{a+1}$, с полуплоскостью $y \geqslant -x-1$. Ясно, что это пересечение непусто, если радиус окружности не меньше расстояния от точки $A(-1,-1)$ — центра окружности — до прямой $x+y+1=0$ (рис. 24), т. е. если $\sqrt{a+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a \geqslant -\frac{1}{2}$.

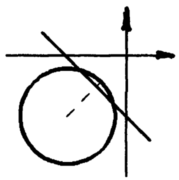

Рис. 24

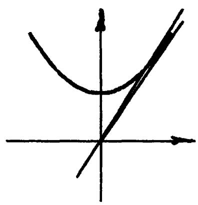

Рис. 25

В заключение приведем еще одно решение задачи 13.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{x^2+2}{2} = ax$, построим параболу $y = \dfrac{x^2+2}{2}$ и будем следить за точками ее пересечения с прямой $y = ax$. Изменение значения a отражается в изменении угла наклона этой прямой к оси абсцисс (a — угловой коэффициент этой прямой). Если прямая $y = ax$ пересекает параболу в точках, абсциссы которых больше единицы, то она должна лежать ниже прямой, проходящей через точку $(1, \frac{3}{2})$, откуда $a < \frac{3}{2}$. Самая "низкая" прямая — это проходящая через начало координат касательная к данной параболе (рис. 25).

Для решения подобных задач полезно помнить геометрический смысл параметров a, A, k, K в выражениях вида $Kf(k(x-a)) + A$.

Упражнения

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \max_{a\in[0;1]}(x-a)^2$.
2. Нарисуйте множество, заданное уравнением

$$\sqrt{b-2xy} = y - x + 2.$$

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $|x+a| < 2 - x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.
4. При каких a следующие уравнения имеют единственное решение: $2\lg(x+1) = \lg ax$; $\lg(x^2+6x+8) = \lg(a-3x)$?
5. При каких a уравнение $\sqrt{x^2+6x+8} = \sqrt{a-3x}$ имеет единственное решение на луче $(-\infty; 0)$?
6. При каких $a > 0$ уравнение $\sin ax = \frac{1}{3}$ имеет единственное решение на отрезке $[\pi; 2\pi]$?
7. При каких a уравнение $ax + \sqrt{10-6x} = 0$ имеет решения на отрезке $[-1; 1]$?
8. При каких a система

$$\begin{cases} y + a \geqslant 2|x-a|, \\ x + |y-a| = a + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

См. также задачи 4.2г; 10.1г; 12.1а; 14.1б; 15.1б; 18.2г; 19.2г; 24.1г; 30.2г; 30.3г; 31.3г; 32.4в; 33.4в; 34.2в; 25.2в; 36.3г; 37.3г; 40.4а; 41.4а.

11. Разные задачи

В этом разделе приведены задачи, для решения которых следует использовать различные методы, изложенные в предыдущих разделах. Автор советует читателю постараться решить каждую из этих задач различными способами (хотя бы для того, чтобы сравнить полученные ответы).

Задача 30. Найдите все такие значения a, при которых каждое решение неравенства $|x-2a| \leqslant 2$ является также решением неравенства $|x-3| \geqslant a$.

Задача 31. Сколько решений на отрезке $[-1; 2]$ в зависимости от a имеет уравнение $x^3 - 2ax + 2 = 0$?

Задача 32. Найти наименьшее (при всех значениях a) положительное решение уравнения $\sin x + \cos x = \sin ax$.

Задача 33. Решить систему $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0, \\ \cos x + \cos y = a. \end{cases}$

Задача 34. Найти все такие значения a, при которых каждое решение неравенства $8\log_a x + \log_x a \leqslant 6$ является решением неравенства $\cos(\pi\frac{x^2}{a^2}) \geqslant \frac{1}{2}$.

Задача 35. Решить уравнение $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{a}$.

Задача 36. При каких a уравнение $\sqrt{\sin x + a} = a + 1$ имеет решение?

Задача 37. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin(x^2) - \sin y = 1, \\ x^2 + |y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$.

Задача 38. Решите уравнение $\sqrt{\frac{4}{\sin x} + \sin x} = \frac{a}{4} - \frac{1}{a}$.

Задача 39. Докажите, что не существует такого многочлена $P(x)$, что при всех действительных x верно равенство $P(\sin x) = 0$.

См. также задачи 4.4в; 16.1г; 17.1г; 28.2в; 29.2в; 38.2; 39.2; 53.1; 55.1; 55.2; 56.1; 56.2.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ

О содержании экзаменационных вариантов

В данной главе приводятся образцы экзаменационных и олимпиадных заданий, состоящих из специально сконструированных (по определенным принципам) наборов не совсем традиционных, хотя и школьных задач[1].

Главной работой, результаты которой показывают (по мнению автора) уровень полученного учащимися математического образования, является профильно-элитарный выпускной экзамен по математике (см. вариант 2), составленный по так называемому сюжетно-блочному принципу: каждое из предлагаемых заданий является серией, состоящей из четырех пунктов-подзадач, объединенных общей формулировкой — сюжетом. Работа оценивается по результатам решения двух обязательных заданий и одного из трех заданий по выбору. Так что если экзаменующийся решил, к примеру, по две задачи каждого из пяти заданий, то ему будут засчитаны решения всего 6 задач; обычно такой результат заслуживает оценки "три".

Как будет видно из приводимых далее решений, в обязательных заданиях профильно-элитарного экзамена имеются: стандартные задачи на решение логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств, в которых нужно провести обычное исследование области определения; задачи на исследование функций при помощи производной и построение ее графика; задачи, в решении которых график функции используется для исследования данного уравнения. Существенно то, что при правильных подходах к этим задачам их решения не содержат громоздких вычислений, однако требуют наличия хотя бы некоторой математической культуры. Подчеркну, что целью профильно-элитарного экзамена является не только оценка знаний, умений и навыков, но и оценка уровня полученного учащимися математического образования и их математической культуры. В такой

[1]Кроме того, разбираются задачи общероссийского выпускного экзамена для физико-математических школ — см. вариант 3.

работе необходимо должны присутствовать задачи на проверку:

– навыков использования стандартных методов решения,

– умения логически рассуждать, используя определения математических понятий.

Хотя в ней не должно быть места задачам "олимпиадного типа", решение которых основано на неожиданной идее, в экзаменационном варианте должны быть задачи, которые, кроме более или менее стандартного, могут быть решены и другим методом, приводящим к цели быстрее и проще. Отметим, что сюжетное построение позволяет учесть последнее соображение; тот кто понял сюжет "в целом", скорее найдет решения отдельных задач. Кроме того, желательно, чтобы сформулированные в задаче утверждения не исчерпывали до конца ее математическое содержание, оставляя поле для творческой работы как для учителей, так и их будущих учеников.

Конечно, трудно рассчитывать на то, что в условиях экзамена многие выпускники смогут найти наиболее короткие (и естественные с математической точки зрения) решения предложенных задач. Профильно-элитарный экзамен является экзаменом высшей категории сложности по существующей в Санкт-Петербурге системе разноуровневых выпускных экзаменов, подводящим итог всему процессу обучения математике в средней школе[2]. Учащимся специализированных классов предлагаются также промежуточные экзаменационные работы, результаты которых помогают их учителям оценить достижения своих учеников в соответствии с высшими критериями.

Около пятнадцати лет назад, когда начались изменения, связанные с перестройкой, в Ленинграде появилась программа "школа–вуз", идея которой состояла в том, чтобы образовать более тесную связь между средними и высшими учебными заведениями нашего города. Во многих школах стали появляться специализированные классы, программа обучения в которых строилась в соответствии с запросами вузов при согласовании с органами народного образования. По мнению автора, этот этап был необходим, поскольку без него невозможно было бы перейти к разветвленной сети специализированных средних учебных заведений. Надо сказать, что господствующая на математико-механическом факультете точка зрения на обучение в специали-

[2]Оценку "отлично" на этом экзамене получают ежегодно от 20 до 40 учащихся.

зированных классах состояла в том, что необходимо не расширение, а углубление программы, правильная расстановка акцентов и установление бо́льших взаимосвязей между различными понятиями.

К примеру, в программу первого полугодия 10 класса (то есть в первые полгода специализированного обучения) входит изучение следующих разделов:

Числа рациональные и иррациональные. Свойства числовых неравенств. Координаты на прямой и плоскости, задание множеств уравнениями и неравенствами. Решение рациональных уравнений и неравенств. Многочлены, корни многочленов. Метод математической индукции. Общие свойства функций, графики функций. График квадратичной функции.

Что касается взаимосвязей, то центральная идея первого полугодия — геометрическое изображение решений уравнений и их систем.

В программу второго полугодия входит изучение свойств элементарных функций и решение соответствующих уравнений, опять-таки с использованием геометрического и функционального подходов. Экзаменационные варианты требуют от учащихся владения техникой решения задач и навыками логических рассуждений.

Вариант 4 — это экзаменационная (переводная) работа для 10-х специализированных классов. Содержащиеся в ней задачи являются существенно более стандартными, чем задания профильно-элитарного экзамена, хотя некоторые из них могут поставить в тупик неподготовленного школьника. Это явно не работа для обычной школы! Бо́льшая (по сравнению с вариантом 2) традиционность задач связана с тем, что почти все математические понятия, используемые в их формулировках, были введены как раз в десятом классе, так что было бы неверно требовать от учащихся глубокого их понимания.

С 1990 года математико-механический факультет СПбГУ проводит свою олимпиаду по математике для учащихся выпускных классов. В первый раз она была своего рода репетицией перед экспериментальным выпускным экзаменом, проводившимся Ленинградским математическим обществом и послужившим прообразом существующего в настоящее время профильно-элитарного выпускного экзамена. В какой-то степени эта олимпиада является профориентационным мероприятием, а с 1995 года победители олимпиады зачисляются на математико-механический факультет без экзаменов. Но у олимпиады выпускников были и есть другие цели.

Дело в том, что с конца 70-х годов традиционная городская олимпиада стала по сути спортивным соревнованием, для успешного выступления на котором необходима специальная тренировка. Кроме того, тематика предлагаемых на ней задач слабо связана даже с тем материалом, который изучают в специализированных школах. В противоположность этому, олимпиада математико-механического факультета — "олимпиада выпускников" — является таким состязанием, в котором имеет смысл участвовать тем учащимся, которые просто знают и понимают школьную математику. К примеру, для решения задачи 4а варианта 1 совсем не обязательно знакомство с определением и свойствами перестановок с повторениями; ее в состоянии решить тот, кто умеет рассуждать. Конечно, задачи олимпиады выпускников все же не совсем школьные, а "почти школьные". Однако задачи 1а и 2а, 2б являются стандартными, а задачи 4а, 4б должны быть таковыми для учащихся специализированных классов и школ. Самой содержательной с математической точки зрения является задача 2в, разбору решений которой можно посвятить одно-два занятия школьного кружка (факультатива). Подчеркнем, что олимпиада традиционно длится всего три часа, так что решить хотя бы половину предложенных на ней задач — это, по мнению автора, вполне достойный результат.

По сравнению с экзаменационными, олимпиадные задачи более разнообразны как по формулировкам предлагаемых в них заданий (см. задачи 1а–г), так и по принципам, по которым они составлены[3]. Наиболее близкими к школьным являются задачи из задания 2 варианта 1. Хотя они различны по своему внешнему виду, однако их объединяет общий подход к решению: в каждой из них нужно произвести некоторое разложение на множители, в том числе и в задаче 2в. Задачи 4а–в посвящены одной теме — комбинаторике. В задачах 3а–в имеется не только общий сюжет; ключом к наиболее короткому решению двух последних задач является понятие корня многочлена в комплексной области.

В заключение этого введения заметим, что задачи должны быть такими, чтобы их было интересно решать!

[3] В связи с этим обратите внимание на решения задач 2а–в варианта 10.

Вариант 1: олимпиада выпускников 1993 года

1. а) Постройте эскиз графика функции $y = \left|\log_{2x} \dfrac{4}{x}\right|$.

б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a,b)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\max_{x\in\mathbb{R}} a^{\sin x} = \max_{x\in\mathbb{R}} b^{\cos x}.$$

в) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = 1 - ay^2, \\ y = 1 - ax^2 \end{cases}$$

имеет два решения.

г) Докажите, что $\int\limits_0^1 \dfrac{x^n \sin x}{1+x^2}\,dx \to 0$ при $n \to +\infty$.

2. а) Решите неравенство $x \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + 2^x \geqslant 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^x$.

б) Решите неравенство $\sin^2 x + \dfrac{2}{\sin x} \leqslant \sin x + 2$.

в) Найдите все прямые, касающиеся графика функции $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух различных точках.

3. Пусть $p_k(x) = 1 + x + \ldots + x^k$, $Q_{k,n}(x) = p_k(x^n)$, $k,n \in \mathbb{N}$.

а) Докажите, что многочлен $p_{2m}(x)$ не имеет действительных корней.

б) Найдите все такие n, при которых многочлен $Q_{2,n}(x)$ делится на $p_2(x)$.

в) При каком условии на k и n $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$?

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове “баобаб”.

б) Докажите тождество $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

в) Двое играют в такую игру: монету бросают два раза и первый из двух игроков выигрывает, если оба раза она упала одной и той же стороной. Известно, что монета фальшивая, так что вероятность появления герба при одном бросании равна $p \neq \frac{1}{2}$. При каких p чаще будет выигрывать первый игрок?

Решения задач варианта 1.

1. а) *Ответ*: см. рис. 26. Ясно, что вначале следует строить график функции

$$y = \log_{2x}\frac{4}{x} = \frac{\log_2(4/x)}{\log_2(2x)} = \frac{2-\log_2 x}{1+\log_2 x}.$$

Вместо того чтобы проделать стандартное исследование при помощи производной, поступим по-другому. Поскольку $y = g(\log_2 x)$, где

$$g(t) = \frac{2-t}{1+t} = -1 + \frac{3}{1+t},$$

то, построив (при помощи двух параллельных переносов) график функции g (рис. 27), далее будем рассуждать следующим образом. Функция $t = \log_2 x$ монотонно возрастает, значит, функция $y = g(\log_2 x)$ убывает: от -1 до $-\infty$ на интервале $(0; \frac{1}{2})$ и от $+\infty$ до -1 на луче $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

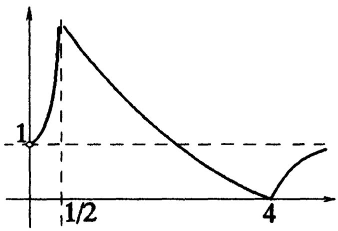

Рис. 26

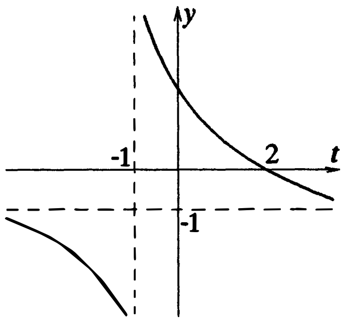

Рис. 27

б) *Ответ*: см. рис. 28. Поскольку отрезок $[-1; 1]$ является областью значений и синуса и косинуса, то

$$\max a^{\sin x} = \max a^t \text{ и } \max b^{\cos x} = \max b^t \text{ при } x \in \mathbb{R},\ t \in [-1; 1].$$

Заметим, что наибольшее значение a^t при $t \in [-1; 1]$ не всегда равно a (типичная ошибка!), поскольку

$$\max a^t = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 1; \\ \dfrac{1}{a}, & \text{если } 0 < a \leqslant 1 \end{cases}$$

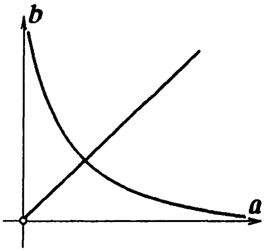

Рис. 28

(кстати, по определению степени с произвольными показателями, $a, b > 0$). Поэтому равенство имеет место при $a = b$ и $a = 1/b$, значит, искомое множество является объединением луча $y = x$, $x > 0$, и ветви гиперболы $y = 1/x$, $x > 0$.

в) *Ответ*: $a \in (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; \frac{3}{4}]$. Эта задача интересна тем, что естественный подход — посмотреть на картинки — может привести к неверному предположению.

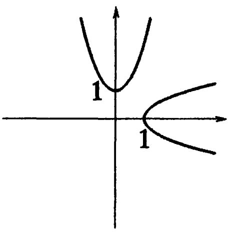

Рис. 29

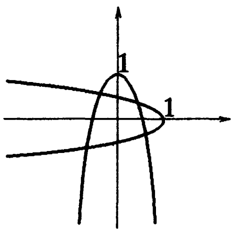

Рис. 30

Если $a \neq 0$, то каждое из уравнений данной системы задает параболу с фиксированной вершиной. На рис. 29, 30 изображены параболы для "очень отрицательного" значения a, когда система решений не имеет (рис. 29), и "очень положительного", когда ясно, что решений четыре (можно использовать непрерывность функций $y = 1 - ax^2, y = \pm\sqrt{(1-x)/a}$ и характер их монотонности, рис. 30). Если $a < 0$, то из симметричности картинки ясно, что возможные точки пересечения лежат на прямой $y = x$, откуда $ax^2 + x - 1 = 0$ и $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$. Таким образом, похоже, что при $a = -\frac{1}{4}$ система имеет одно решение (параболы касаются), а если $-\frac{1}{4} < a < 0$, то два. Случай $a > 0$ несколько более загадочен. Опять-таки ясно, что при $a > 1$ система имеет четыре решения, но что происходит, если $0 < a < 1$? Оказывается, параболы могут пересечься в четырех точках (рис. 31)! Проделаем вычисления. Вычитая первое уравнение системы из второго, получаем $y - x = a(y - x)(x + y)$, откуда $y = x$ (этот случай был разобран), или же $a(x + y) = 1$. В последнем случае приходим к уравнению $1 - ax = a - a^2x^2$, в котором удобно сделать замену $u = ax$. Полученное уравнение $u^2 - u + (1 - a) = 0$ имеет решение при $a \geqslant \frac{3}{4}$. Заметим, что если $a = \frac{3}{4}$, то $u = \frac{1}{2}$ и $x = y = \frac{1}{2a}$, т. е. три точки пересечения, расположенные в первом квадранте, "склеиваются" в одну. Наконец, если $a = 0$, то $x = y = 1$, т. е. система имеет одно решение.

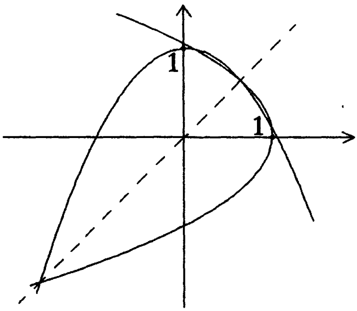

Рис. 31

г) Решение основано на идее оценки подынтегрального выражения:

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } \ n \to \infty,$$

поэтому данный интеграл также стремится к нулю.

2. Два первых пункта этой задачи абсолютно стандартны.

а) *Ответ*: $x \in [1; 2]$. Решите неравенство $(x-1)(2^{\sqrt{x+2}} - 2^x) \geqslant 0$.

б) *Ответ*: $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. После замены $t = \sin x$ и обычных преобразований получаем неравенство $(t^2 - 2)(t - 1)/t \leqslant 0$, значит (учитывая, что $|t| \leqslant 1$), $t = 1$ или $t < 0$.

в) Решение задачи этого пункта уже не является стандартным. Целесообразно записать $y = x^2(x - 1)^2 + 19x + 93$.

График $y = x^2(x-1)^2$ касается оси абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 32), поэтому график данной функции касается прямой $y = 19x + 93$ в точках с такими же абсциссами. Этот факт очевиден с геометрической точки зрения. Пусть два графика имеют общую касательную. Если добавить к каждой из данных функций одно и то же слагаемое, то новые графики также будут иметь общую касательную. Приведем в нашем случае и формальное доказательство.

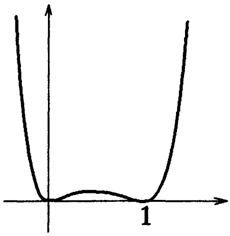

Рис. 32

Пусть $g(x) = x^2(x-1)^2$, $l(x) = 19x + 93$ и $f(x) = g(x) + l(x)$. Имеем: $g'(0) = g'(1) = 1$ и $f'(0) = l'(0) = 19$, $f'(1) = l'(1) = 19$, $g(0) = g(1) = 0$, поэтому $f(0) = l(0)$, $f(1) = l(1)$.

Остается открытым вопрос о единственности такой “двойной” касательной. С геометрической точки зрения все очевидно, достаточно взглянуть на эскиз графика функции g (рис. 32). Для аккуратного доказательства единственности следовало бы использовать выпуклость этого графика, поэтому мы изберем другой, алгебраический, подход.

Поскольку утверждение, которое мы сейчас докажем, имеет общий характер, сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. *Пусть $P(x)$ — многочлен и $P(x_0) = P'(x_0) = 0$. Тогда $P(x)$ делится на $(x-x_0)^2$.*

Действительно, так как $P(x_0) = 0$, то $P(x) = (x-x_0)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен. Продифференцировав это равенство, получаем $P'(x) = Q(x) + (x-x_0)Q'(x)$, откуда $Q(x_0) = P'(x_0) = 0$, значит $Q(x) = (x-x_0)D(x)$ и $P(x) = (x-x_0)^2D(x)$.

Следствие. *Если прямая, заданная уравнением $y = l(x)$, касается графика многочлена $P(x)$ в точке $x = x_0$, то разность $P(x) - l(x)$ делится на $(x-x_0)^2$.*

(Докажите это следствие самостоятельно.)

Докажем теперь, что график многочлена четвертой степени имеет не более одной прямой, касающейся его в двух различных точках.

Если прямая $y = l_1(x)$ (l_1 — линейная функция) касается графика $y = P(x)$ в точках с абсциссами $x = x_0$ и $x = x_1$, то разность $P(x) - l_1(x)$ делится на $(x - x_0)^2(x - x_1)^2$, значит,

$$P(x) = l_1(x) + a_0 p_1^2(x),$$

где $p_1(x)$ — квадратный трехчлен. Пусть $y = l_2(x)$ — еще одна двойная касательная. Тогда $P(x) = l_2(x) + a_0 p_2^2(x)$, откуда

$$l_2(x) - l_1(x) = a_0(p_1(x) + p_2(x))(p_1(x) - p_2(x)).$$

Если $l_1(x) \neq l_2(x)$, то такое равенство невозможно, поскольку в его правой части находится многочлен по крайней мере второй степени.

3. а) Если $1 + x + \ldots + x^{2m} = 0$, то $x^{2m+1} - 1 = (x-1)(1 + x + \ldots + x^{2m}) = 0$, откуда $x = 1$, однако это число не является корнем исходного уравнения. Приведем еще одно рассуждение. Ясно, что положительных корней данное уравнение не имеет. Если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$p_{2m}(x) = (1 + x) + (x^2 + x^3) + \ldots + (x^{2m-2} + x^{2m-1}) + x^{2m} > 0,$$

если же $x < -1$, то опять-таки

$$p_{2m}(x) = 1 + (x + x^2) + \ldots + (x^{2m-1} + x^{2m}) > 0.$$

б) *Ответ*: $n \not\equiv 0 \pmod 3$ — ответ очень красивый и неожиданный. Решение несложно, однако связано с рассмотрением комплексных корней многочлена. Корнями трехчлена $x^2 + x + 1$ являются числа $z_{1,2} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i \sin\frac{2\pi}{3}$. Многочлен $Q_{2,n}(x) = 1 + x^n + x^{2n}$ делится на $x^2 + x + 1$, если z_1 и z_2 являются и его корнями. Имеем

$$Q_{2,n}(z_i) = 1 + \cos\tfrac{2\pi n}{3} \pm i \sin\tfrac{2\pi n}{3} + \cos\tfrac{4\pi n}{3} \pm i \sin\tfrac{4\pi n}{3}$$

(по формуле Муавра), далее,

$$\sin\tfrac{2\pi n}{3} + \sin\tfrac{4\pi n}{3} = 2 \sin \pi n \cos\tfrac{\pi n}{3} = 0,$$

а

$$1+\cos\tfrac{2\pi n}{3}+\cos\tfrac{4\pi n}{3}=\cos\tfrac{2\pi n}{3}\left(1+2\cos\tfrac{2\pi n}{3}\right)=0,$$

если $n\not\equiv 0 \pmod 3$.

в) *Ответ*: $(n,k+1)=1$, т. е. числа n и $k+1$ не должны иметь общих делителей (такие числа называются взаимно простыми). Данная задача есть прямое обобщение предыдущей, однако прямая замена числа 3 на $k+1$ в условии на число n даст неверное условие. Дело в том, что 3 — простое число, поэтому $n\not\equiv 0($ mod $3)$ тогда и только тогда, когда $(n,3)=1$. Решение, которое будет сейчас приведено, вообще не использует никакой тригонометрии, за исключением самой первой формулы.

Положим $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{k+1}+i\sin\frac{2\pi}{k+1}$, это так называемый первообразный корень степени $k+1$ из 1. Ясно, что $\varepsilon^l\neq 1$ при $l=1,2,\dots,k$, и что числа $\varepsilon,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^k$ – корни уравнения $p_k(x)=0$ (см. решение пункта а)). Поскольку все эти числа различны, то многочлен $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$ тогда и только тогда, когда $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=0$ при $l=1,2,\dots,k$. Имеем $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=p_k(\varepsilon^{ln})$. Предположим, что $d>1$ — общий делитель чисел n и $k+1$. Пусть $l=(k+1)/d$, тогда число ln кратно $k+1$, поэтому $\varepsilon^{ln}=1$ и $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=k+1\neq 0$. Если же $(n,k+1)=1$, то $ln\not\equiv 0 \pmod{k+1}$, поэтому $\varepsilon^{ln}\neq 1$, значит $Q_{k,n}(\varepsilon^l)=p_k(\varepsilon^{ln})=0$.

4. а) *Ответ*: 60. Конечно, этот ответ следует из общей формулы для числа перестановок с повторениями: $\frac{6!}{3!2!}=60$. Однако для решения задачи знать эту формулу совсем не обязательно, достаточно просто навыка в использовании “правила произведения” и знакомства с определением чисел сочетаний. Действительно: буква “о” может стоять на любом из шести мест, для буквы “а” (когда “о” уже поставлена) имеется $C_5^2=10$ вариантов, на оставшихся трех местах располагаются буквы “б”. Кстати говоря, тот, кто проведет подобное рассуждение, может увидеть, что если вначале выбирать три места для букв “б”, то всего вариантов $C_6^3\cdot 3$, так что $3C_6^3=6C_5^2$. Полученное равенство является частным случаем доказываемого аналогичным образом тождества $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$, используемого в следующем пункте.

б) Имеем: $\sum_{k=1}^n kC_n^k=n\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}C_n^k=n\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1}=n\cdot 2^{n-1}$. Другое рассуждение основано на идее производящих функций. Пусть $P(x)=\sum_{k=0}^n C_n^kx^k$, тогда $P'(x)=\sum_{k=1}^n kC_n^{k-1}x^{k-1}$, так что $P'(1)=\sum_{k=1}^n kC_n^{k-1}$. С другой стороны, $P(x)=(1+x)^n$, $P'(x)=$

$n(1+x)^{n-1}$, поэтому $P'(1) = n \cdot 2^{n-1}$!

в) *Ответ*: $p \neq \frac{1}{2}$. В решении используются лишь простейшие понятия теории вероятности. Вероятность того, что оба раза выпал герб, равна p^2, вероятность выпадания двух решек $(1-p)^2$. Значит, вероятность того, что первый игрок выиграет, равна

$$p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1 = 2\left(p - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2},$$

тем самым при любых $p \neq \frac{1}{2}$ чаще будет выигрывать он.

Вариант 2: профильно-элитарный экзамен 1993 года

Обязательные задачи:

1. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2-1)$.
   а) Пусть $a = 0$. Решите уравнение $f(x) = 1$.
   б) Пусть $a = -1$. Решите неравенство $f(x) \geqslant -1$.
   в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, a), что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?
   г) Найдите все такие положительные a, при которых для любого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.

2. Дана функция $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$, $x \in [0; \frac{3\pi}{2}]$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -\frac{1}{2}$.
   б) Найдите наибольшую длину промежутка монотонности функции f.
   в) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = a$?
   г) Дано тело, ограниченное плоскостями $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и поверхностью, получаемой при вращении графика функции f вокруг прямой $y = m$, лежащей в плоскости Oxy. При каком m объем этого тела наименьший?

Дополнительные задачи (выбирается один из трех сюжетов):

3. Дана функция $f(x) = x^3 + 3x^2$.
   а) Докажите, что фигуры, ограниченные отрезками горизонтальных касательных к графику функции f и дугами этого графика между точками его пересечения с касательными, имеют равные площади.
   б) Докажите, что график функции f симметричен относительно точки $A(-1, 2)$.

в) Докажите, что прямая, касающаяся графика функции f в точке с абсциссой x_0, не равной -1, пересечет этот график еще в одной точке, абсцисса которой равна $-2x_0 - 3$.

г) Докажите, что прямая, пересекающая график функции f в трех точках, одна из которых является серединой отрезка между двумя другими, проходит через точку $A(-1, 2)$.

4. Пусть S — множество комплексных чисел, модуль которых равен единице.

а) Докажите, что все решения уравнения $z^6 + z^3 + 1 = 0$ принадлежат множеству S.

б) Найдите все решения уравнения $2z^3 + iz^2 + 2iz = 1$, которые лежат в S.

в) Найдите все действительные a, при которых уравнение $z^6 + z^2 = a$ имеет решения, лежащие в S.

г) Найдите все значения $c \in S$, при которых уравнение $z^6+z^2 = c$ имеет решения, лежащие в S.

5. Числа E_n^k, где n, k — целые неотрицательные, определены равенствами $E_n^k = (k+1)E_{n-1}^k + (n-k)E_{n-1}^{k-1}$, $E_n^0 = 1$ и $E_n^k = 0$ при $k \geqslant n$.

а) Докажите, что $E_n^k = E_n^{n-k-1}$.

б) Найдите отношение E_{11}^5 / E_{10}^5.

в) Докажите, что для любых натуральных чисел p и n верно тождество $p^n = E_n^0 C_p^n + E_n^1 C_{p+1}^n + \ldots + E_n^{n-1} C_{p+n-1}^n$ (здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты).

г) Докажите, что E_n^k совпадает с числом таких перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которых неравенство $a_i > a_{i+1}$ выполняется ровно для k значений $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Решения задач варианта 2.

1. а) *Ответ*: $x = 1 + \sqrt{2}$. б) *Ответ*: $x \in [\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty]$. Задачи обоих этих пунктов совершенно стандартны. Сделаем лишь одно замечание. Так как область определения неравенства 1б — это луч $x > 1$, то $2x - 1 > 1$, следовательно, это неравенство равносильно тому, что $x^2 - 1 \geqslant (2x-1)^{-1}$, $x > 1$.

в) *Ответ*: см. рис. 33; $a \in (-2; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 - 2\sqrt{2}; +\infty)$. Уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1)=1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-1=a+2x, \\ |x|>1, \\ a+2x>0, \\ a+2x\neq 1. \end{cases}$$

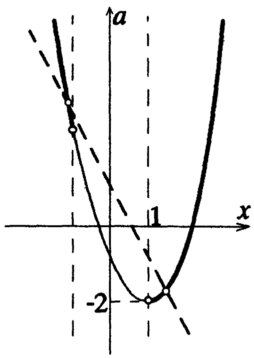

Рис. 33

Заметим, что в силу первого уравнения, одно из двух следующих за ним неравенств можно отбросить. Уравнение $a=x^2-2x-1$ задает параболу, на которой нам следует взять лишь те ее точки, которые лежат вне полосы $|x|\leqslant 1$ и не совпадают с точками пересечения этой параболы и прямой $a=1-2x$, т. е. с точками $(-\sqrt{2},1+2\sqrt{2}),(\sqrt{2},1-2\sqrt{2})$.

Теперь ничего не стоит получить ответ на второй вопрос, имеющий такую геометрическую переформулировку: при каких a на изображенном множестве существует точка с равной a второй координатой? Более того, ясна и зависимость от a числа корней уравнения $f(x)=a$.

Конечно, уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1)=1$ можно решать чисто алгебраически. В этом случае придется исследовать, в каком случае корни уравнения $x^2-2x-(a+1)=0$ входят в область определения исходного уравнения, т. е. потребуется решить иррациональные неравенства $|1\pm\sqrt{2+a}|>1$ и уравнения $a+2(1\pm\sqrt{2+a})=1$. Если же еще не обратить внимание на то, что неравенства $|x|>1$ и $2a+x>0$ для корней квадратного уравнения имеют место одновременно, то придется также решать неравенства $2a + 1 \pm \sqrt{2+a} > 0$.

Таким образом, первый вопрос в данной задаче указывает подход, при помощи которого проще найти ответ и на второй.

Заметим, наконец, что задачу можно усложнить, предложив решить неравенство $f(x) \geqslant 1$ (что достаточно сложно сделать, если не пользоваться графической интерпретацией).

г) *Ответ*: $a \in (2; 1+2\sqrt{2}) \cup (1+2\sqrt{2}; +\infty)$. Можно, конечно, нарисовать график функции $y = \log_{a+2x}(x^2-1)$, исследовав ее поведение при различных a. Однако проще перейти к уравнению $x^2 - 1 = (a+2x)^n$. На рис. 34, 35 изображены графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = (a+2x)^n$, $x \geqslant -a/2$, при $0 < a \leqslant 2$ и $a > 2$. Ясно, что в первом случае при достаточно больших n (именно, $n \geqslant 2$) эти графики не пересекаются, а во втором они имеют одну (и только одну — почему?) общую точку. Осталось исключить тот случай, когда их общая точка совпадает с $(-\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$, т. е. при $a = 1+2\sqrt{2}$.

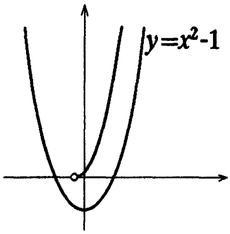

Рис. 34

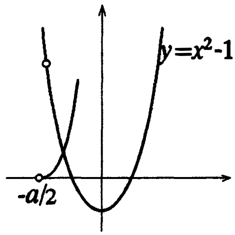

Рис. 35

2. а) *Ответ*: $\pi - \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Единственное затруднение состоит в том, чтобы понять, какое (какие) из чисел $(-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in Z$, лежат в отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$, что опять-таки проще сделать геометрически (рис. 36). Заметим также, что в этой задаче не обойтись без знания определения арксинуса.

б) *Ответ*: $\frac{2\pi}{3}$. Стандартная задача на применение производной. Требуется найти отрезок наибольшей длины, на котором $f'(x)$ сохраняла бы знак:

$$f'(x) = \cos x - \sin 2x = \cos x(1 - 2\sin x),$$

и знаки производной распределяются так, как показано на рис. 37. Так что наибольший отрезок монотонности — это $[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$.

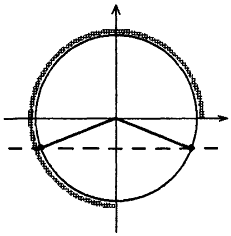

Рис. 36

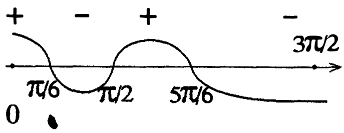

Рис. 37

в) *Ответ*: одно решение при $-\frac{3}{2} \leqslant a < \frac{1}{2}$, два — при $a = \frac{3}{4}$, три — при $a = \frac{1}{2}$ и четыре решения, если $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. При остальных значениях a уравнение решений не имеет. Ответ очевиден из графика (рис. 38).

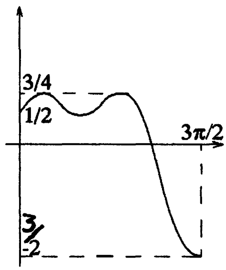

Рис. 38

Для его построения в дополнение к проведенному в предыдущем пункте вычислению нужно лишь найти значения функции f в точках $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Заметим, что решение этого уравнения при помощи замены $t = \sin x$ требует дополнительного исследования, поскольку неотрицательным значениям t (отличным от единицы) соответствуют два значения x из промежутка $[0; \frac{3\pi}{2}]$, а отрицательным — лишь одно.

г) *Ответ*: $m = \frac{2}{3\pi}$. Чрезвычайно простая задача, которая тем не менее вызвала затруднения непривычностью своей формулировки. Объем тела, полученного при вращении графика $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вокруг указанной прямой, есть $\pi \int_a^b (m - f(x))^2 dx = \pi \left((b-a)m^2 - 2m \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \right)$. Это выражение является квадратичной функцией от m, следовательно, оно наименьшее при $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. В данном случае $m = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x)dx = \frac{2}{3\pi}$.

3. Рассмотрим вначале стандартные решения.

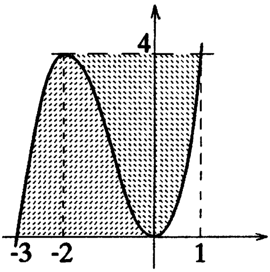

Рис. 39

а) Нетрудно построить график данной функции (рис. 39), найти ее горизонтальные касательные — $y = 0$ и $y = 4$ — и точки их пересечения с графиком — $(-3, 0)$ и $(1, 4)$. Площади, о которых идет речь, равны, соответственно, интегралам $\int_{-3}^{0}(x^3 + 3x^2)dx$ и $\int_{-2}^{1}(4 - x^3 - 3x^2)dx$. Вычислив их, получим одно и то же значение, а именно $\frac{27}{4}$.

б) Пусть $M(x, x^3 + 3x^2)$ — некоторая точка графика. Точка, симметричная ей относительно $A(-1, 2)$, имеет координаты $(-2 - x, 4 - x^3 - 3x^2)$ и лежит на графике данной функции, если $(-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 = 4 - x^3 - 3x^2$, что проверяется непосредственно.

в) Скажем сразу, что формулировка данного пункта несколько неудачна, поскольку учащиеся могли сделать прямую проверку. Пусть $l(x)$ — линейная функция, график которой — данная касательная к графику функции f. Стандартные вычисления показывают, что

$$l(x) = (3x_0^2 + 6x_0)x - 2x_0^3 - 3x_0^2,$$

осталось проверить, что $f(-2x_0 - 3) = l(-2x_0 - 3)$, это можно сделать непосредственно.

Более интересна формулировка, в которой предлагается найти вторую точку пересечения касательной и графика данной кубической функции. Приведем решение, представляющееся автору стандартным.

Уравнение $f(x) - l(x) = 0$ имеет своим корнем x_0, далее, разделив на $x - x_0$, получим квадратное уравнение

$$x^2 + (x_0 + 3)x - 2x_0^2 - 3x_0 = 0,$$

корнями которого являются x_0 и $-2x_0 - 3$.

г) Заметим прежде всего, что требуемое утверждение не вытекает только из симметричности графика относительно некоторой его точки, что видно из рис. 40. Поэтому строгое рассуждение должно использовать и другие свойства функции f.

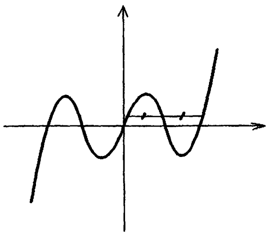

Рис. 40

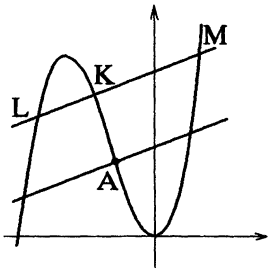

Рис. 41

Итак, пусть некоторая прямая пересекает график f в точках L, K, M, абсциссы которых равны, соответственно, x_1, x_0 и x_2. Считаем для определенности $x_1 < x_0 < x_2$ и предположим, что $x_0 \neq -1$, т. е. $K \neq A$. Проведем через точку A прямую, параллельную LM (рис. 41), пусть $b, -1$ и c — абсциссы точек ее пересечения с графиком, $b < -1 < c$. Предположим для определенности, что прямая LM лежит выше AB. Кажется очевидным (и попробуйте это аккуратно доказать), что $b < x_1 < x_0 < -1$, $x_2 > c$, следовательно, $LK < AB = AC < KM$. Попробуйте выяснить, достаточно ли потребовать непрерывности функции f и того, что всякая прямая пересекает ее график не более чем в трех точках.

Приведем также рассуждения, которые, по мнению автора, являются более изящными.

Ясно, что утверждение 3а следует из 3б, для доказательства которого осуществим параллельный перенос графика функции f на вектор $\bar{h}(1, -2)$. Получим график функции

$$y = f(x-1) - 2 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2 = x^3 - 3x.$$

Поскольку эта функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат, а значит, график исходной функции симметричен относительно A.

Для решения задач 3в и 3г используем формулы Виета. Если прямая $y = ax + b$ пересекает график f в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, то поскольку эти числа являются корнями уравнения $x^3+3x^2-ax-b=0$, то $x_1+x_2+x_3 = -3$. Если точка с абсциссой x_2 — середина отрезка, соединяющего две другие, то $x_1 + x_3 = 2x_2$, значит, $3x_2 = -3$ и $x_2 = -1$. Утверждение 3г доказано. Далее, если прямая $y = kx + d$ касается графика в точке с абсциссой x_0, то $x^3 + 3x^2 - kx - d = (x - x_0)^2(x - x_1)$ (см. решение задачи 2в варианта 1). Приравняв коэффициенты в обеих частях этого равенства, получим, что $x_1 = -2x_0 - 3$.

Конечно, проще было бы сказать, что корнями являются числа x_0, x_0 и x_1, так что $2x_0 + x_1 = -3$ по формулам Виета, однако в этом случае требуется дополнительный разговор, связанный с понятием кратного корня.

Кстати, докажите, что график всякой кубической функции центрально симметричен относительно точки перегиба этого графика.

4. а) Сделав замену $w = z^3$, получим уравнение $w^2 + w + 1 = 0$, следовательно, $w_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, так что $|w_{1,2}| = 1, |z_{1,\ldots,6}|^3 = 1$, поэтому и $|z_{1,..,6}| = 1$. Можно, конечно, извлечь кубический корень из $w_{1,2}$, к примеру, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$, значит $|z_1| = 1$, но это несколько глуповато.

Более элегантное решение: если $z^6 + z^3 + 1 = 0$, то $z^9 - 1 = (z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1) = 0$, значит $|z|^9 = |z^9| = 1$, откуда $|z| = 1$.

б) *Ответ*: $z_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. Данное уравнение решается при помощи разложения на множители, нужно только сообразить использовать тождество $i^2 = -1$:

$$2z^3 + iz^2 + 2iz - 1 = z^2(2z + i) + i(2z + i) = (z^2 + i)(2z + i).$$

в) *Ответ*: $a = 0, \pm 2$. г) *Ответ*: $c = \pm\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

Как и раньше, дадим несколько решений, начав со стандартных.

Если $z \in S$, то $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и

$$z^6 + z^2 = \cos 6\varphi + \cos 2\varphi + i(\sin 6\varphi + \sin 2\varphi),$$

поэтому система

$$\begin{cases} z \in S, \\ z^6 + z^2 = a, \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = a, \\ \sin 6\varphi + \sin 2\varphi = 0. \end{cases}$$

Так как $\sin 6\varphi + \sin 2\varphi = 2\sin 4\varphi \cos 2\varphi$, то из второго уравнения системы получаем, что $\varphi = \frac{\pi k}{4}$, теперь из первого уравнения следует, что $a = 0, \pm 2$.

Система

$$\begin{cases} z \in S, \\ z^6 + z^2 \in S \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = \cos\psi, \\ \sin 6\varphi + \sin 2\varphi = \sin\psi, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\cos 4\varphi \cos 2\varphi = \cos\psi, \\ 2\sin 4\varphi \cos 2\varphi = \sin\psi, \end{cases}$$

откуда $\cos 2\varphi = \pm\frac{1}{2}$, т. е. $\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. Значит, при $\varphi = \frac{\pi}{6}$: $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 6\varphi = -1$, $\sin 6\varphi = 0$, $\cos\psi = -\frac{1}{2}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $c_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Рассматривая оставшиеся значения, получаем ответ.

Теперь решения, использующие векторы.

в) Если $a = z^6 + z^2 \in \mathbb{R}$ и $|z| = 1$, то векторы z^6 и z^2 либо противоположны, т. е. $a = 0$, либо симметричны относительно вещественной оси (рис. 42, 43), значит $6\arg z + 2\arg z = 2\pi k$, т. е. $\arg z = \frac{\pi k}{4}$ и $a = 0, \pm 2$.

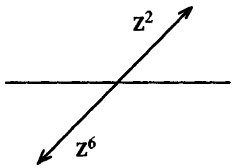

Рис. 42

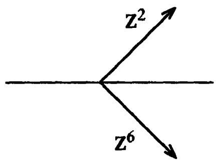

Рис. 43

г) Если $|z| = 1$, $|z^6 + z^2| = 1$, то угол между z^2 и z^6 равен $\frac{2\pi}{3}$ (рис. 44), значит, $6\arg z - 2\arg z = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, т. е. $\arg z = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

Еще одно, более геометричное, решение последнего пункта. Если $|z| = 1$, $|z^6 + z^2| = 1$, то $w = z^4$ лежит на пересечении двух окружностей (рис. 45): $|w| = 1$ и $|w + 1| = 1$, откуда $z^4 = \frac{1}{2}(\pm i\sqrt{3} - 1)$.

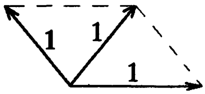

Рис. 44

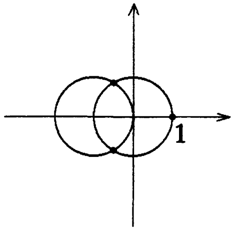

Рис. 45

С математической точки зрения, в пунктах в) и г) идет речь об одном и том же — о пересечении образа единичной окружности S при отображении $z \mapsto z^6 + z^2$ с, соответственно, вещественной осью и самой окружностью S. Поскольку это отображение есть композиция следующих двух: $z \mapsto z^2$ и $z \mapsto z^3 + z$, первое из которых переводит окружность S на себя, то достаточно найти ее образ при втором отображении. Итак, нужно найти (описать, нарисовать) множество

$$\{(\cos 3t + \cos t, \sin 3t + \sin t) \mid t \in [0; 2\pi]\} =$$
$$= \{(2\cos 2t \cos t, 2\sin 2t \cos t) \mid t \in [0; 2\pi]\},$$

т. е. множество, состоящее из точек с координатами $(x(t), y(t))$, где $x(t) = 2\cos 2t \cos t$, $y(t) = 2\sin 2t \cos t$, $t \in [0; 2\pi]$. Поскольку $x(t+\pi) = -x(t)$ и $y(t+\pi) = -y(t)$, то образы отрезков $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$ симметричны относительно начала координат. Далее, $x(\pi - t) = -x(t)$ и $y(\pi - t) = y(t)$, следовательно, образы отрезков $[0; \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ симметричны относительно оси ординат.

Таким образом, достаточно нарисовать множество

$$\{(x(t), y(t)) | t \in [0; \tfrac{\pi}{2}]\},$$

которое в полярной системе координат задано парой функций $r(t) = 2\cos t$, $\varphi(t) = 2t$ и выглядит так, как изображено на рис. 46.

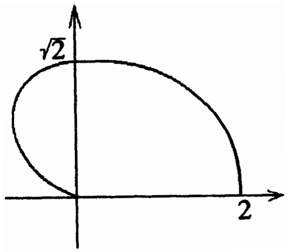

Рис. 46

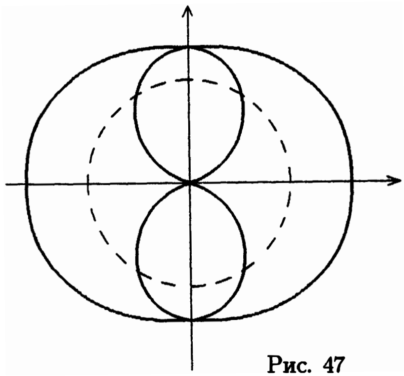

Рис. 47

Произведя две симметрии относительно осей координат, получим кривую, изображенную на рис. 47 (штриховой линией отмечена единичная окружность).

5. В этой задаче требуется доказать некоторые свойства чисел E_n^k, называемых числами Эйлера и определенных при помощи рекуррентного соотношения, напоминающего соотношение между биномиальными коэффициентами.

а) Приведем рассуждение по индукции. База индукции очевидна. Индукционный переход:

$$E_{n+1}^{n-k} = (n-k+1)E_n^{n-k} + (k+1)E_n^{n-k-1} =$$
$$= (n-k+1)E_n^{k-1} + (k+1)E_n^k = E_{n+1}^k.$$

б) *Ответ*: 12, так как $E_{11}^5 = 6E_{10}^5 + 6E_{10}^4 = 12E_{10}^5$ в силу соотношения симметрии предыдущего пункта.

в) Поскольку доказательство сформулированного в этом пункте тождества требует некоторой техники, то мы формализуем его и вначале докажем вспомогательное тождество для биномиальных коэффициентов.

Лемма. Имеем: $(k+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)C_{k+p+1}^{n+1} = pC_{k+p}^n$.

Действительно,

$$(k+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)C_{k+p+1}^{n+1} =$$
$$= (k+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)(C_{k+p}^{n+1} + C_{k+p}^n) =$$
$$= (n+1)C_{k+p}^{n+1} + (n-k)C_{k+p}^n =$$
$$= (k+p-n)C_{k+p}^n + (n-k)C_{k+p}^n = pC_{k+p}^n.$$

Итак, докажем тождество 5в по индукции:

$$\sum_{k=0}^{n} E_{n+1}^{k} C_{k+p}^{n+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left((k+1) E_n^k C_{k+p}^{n+1} + (n+1-k) E_n^{k-1} C_{k+p}^{n-1} \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} E_n^k \left((k+1) C_{k+p}^{n+1} + (n-k) C_{k+p+1}^{n+1} \right) = p \sum_{k=0}^{n-1} E_n^k C_{k+p}^{n},$$

откуда и следует индукционный переход.

г) Формулировка этого пункта дает другое, комбинаторное, описание чисел Эйлера. Идея доказательства знакома, поскольку аналогичные рассуждения часто используются при рассмотрении чисел сочетаний. Именно, мы покажем, что для количества $\tilde{E}_n^k$ перестановок указанного вида выполняются те же соотношения, которыми определялись числа Эйлера, поэтому $\tilde{E}_n^k = E_n^k$.

Ясно, что если при всех $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ верно неравенство $a_i < a_{i+1}$, то $a_i = i$, т. е. имеется одна такая перестановка, поэтому $\tilde{E}_n^0 = 1 = E_n^0$.

Пусть теперь $a_1, a_2, ..., a_n$ — перестановка с k инверсиями, под которыми мы понимаем такие пары $(i, i+1)$, что $a_i > a_{i+1}$. Предположим, что $w = a_l$.

Рассмотрим перестановку $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$, получающуюся из исходной вычеркиванием элемента a_l, так что $b_j = a_j$ при $j < l$ и $b_j = a_{j+1}$ при $j \geqslant l$. Ясно, что число инверсий в полученной таким образом перестановке (b_i) равно либо $k-1$, либо k. Предположим вначале, что это число есть $k-1$. Следовательно, для некоторых $n-k-1$ значений $j \in \{j_1, \dots, j_{n-k-1}\}$ верно неравенство $b_j < b_{j+1}$. Поэтому исходная перестановка (a_i) может иметь k инверсий, если $l = 1, j_1+1, ..., j_{n-k-1}+1$, следовательно, число таких перестановок, получающихся добавлением числа n в $(n-1)$-перестановку с $k-1$ инверсией, равно $(n-k)\widetilde{E}_{n-1}^{k-1}$. Рассуждая аналогично, получаем, что число n-перестановок с k инверсиями, получающихся из $(n-1)$-перестановок с k инверсиями, равно $(k+1)\widetilde{E}_{n-1}^k$, таким образом, $\widetilde{E}_n^k = (n-k)\widetilde{E}_{n-1}^{k-1} + (k+1)\widetilde{E}_{n-1}^k$.

Сравнение экзаменационных вариантов. Вариант 3: выпускная работа для физико-математических школ

По мнению автора, сами по себе задачи варианта, приводимого в этом разделе, да и их набор в целом, неплохи, однако хороший выпускник физико-математической школы должен решать задачи этого варианта за 1–2 часа. Этот вариант, скорее, подходит для текущей контрольной работы (на два урока), чем для заключительного экзамена высшей категории сложности по программе средней школы. Он существенно проигрывает варианту профильно-элитарного экзамена и в математической содержательности.

1. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из таких чисел.
2. Решите уравнение $\sqrt{\cos 2t - 3\sin 2t} = \cos t$.
3. Решите неравенство $2^x \cdot 5^{1/x} > 10$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 4x + 4$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.
5. Найдите все числа a, для каждого из которых существует только одно число b, такое, что $b^2(b + a) = 1$.
6. Какие значения может принимать сумма чисел x и y, если $|y| = (x-2)(4-x)$?

1. *Ответ*: 0; к примеру, $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{24} - i\sin\frac{\pi}{24})$.
Поскольку

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

то указанное уравнение имеет четыре решения

$$z_{0,1,2,3} = \sqrt[4]{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{\pi k}{2}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{\pi k}{2})), \ k = 0, 1, 2, 3,$$

сумма которых равна нулю в силу формул приведения.

Иначе: $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$ в силу формул Виета.

2. *Ответ*: $x = 2\pi k$, $-\operatorname{arctg} 6 + 2\pi k$, $k \in Z$. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2t - 3\sin 2t = \cos^2 t, \\ \cos t \geqslant 0, \end{cases}$$

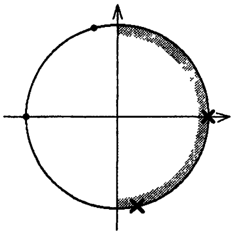

Рис. 48

из первого уравнения которой $\sin t = 0$ или $\operatorname{tg} t = -6$, в силу второго неравенства и получаем ответ (см. рис. 48).

3. *Ответ*: $(0;1) \cup (\log_2 5; +\infty)$. Единственная тонкость данного неравенства состоит в том, что прологарифмировав его по основанию 2 и преобразовав затем к виду

$$\frac{x^2 - x\log_2 10 + \log_2 5}{x} > 0,$$

полезно увидеть, что корнями числителя полученной дроби являются 1 и $\log_2 5$.

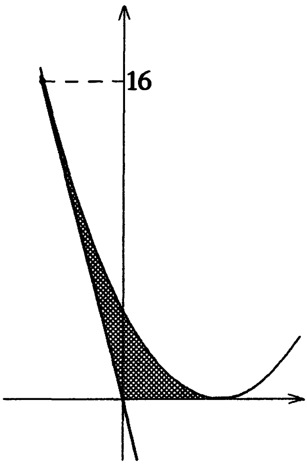

Рис. 49

4. Уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y - (x_0 - 2)^2 = 2(x_0 - 2)(x - x_0)$. По условию эта касательная проходит через точку $(0,0)$, значит $-(x_0 - 2)^2 =$

$-2x_0(x_0-2)$, откуда $x_0 = \pm 2$ и уравнения касательных: $y = -8x$, $y = 0$. То, что одна из касательных совпадает с осью абсцисс, очевидно. Искомая площадь равна сумме интегралов (рис. 49)

$$\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx + \int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx.$$

5. *Ответ*: $a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Прежде всего стоит переформулировать задачу на привычный лад. Требуется найти все такие a, при которых уравнение $x^3 + ax^2 = 1$ имеет единственное решение. Самый естественный подход — исследовать кубическую кривую $y = x^3 + ax^2$. При $a = 0$ ясно, что решение одно, решение также всего одно, если $a < 0$ (рис. 50, *а*). Если же $a > 0$, то локальный максимум рассматриваемой функции равен

$$\frac{4a^2}{9}\left(-\frac{2a}{3}+a\right) = \frac{4a^3}{27},$$

поэтому данное уравнение имеет только одно решение при $\frac{4a^3}{27} < 1$ (рис. 50, *б*).

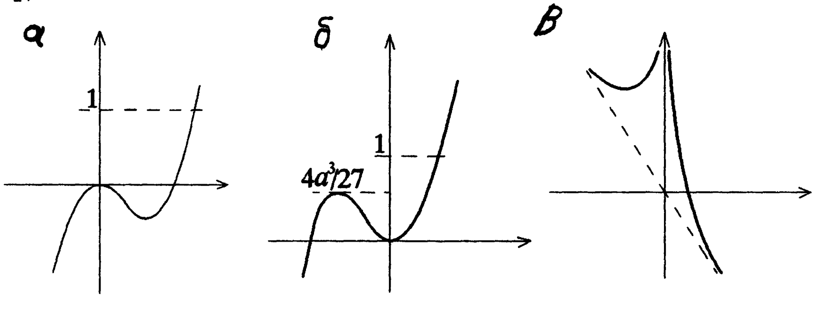

Рис. 50

Может быть, даже проще было бы исследовать уравнение $a = \frac{1}{x^2} - x$, график соответствующей функции изображен на рис. 50, *в*.

6. *Ответ*: $[\frac{7}{4}; \frac{17}{4}]$. Уравнение $|y| = (x-2)(4-x)$ задает объединение лежащих в полосе $2 \leqslant x \leqslant 4$ дуг парабол $y = \pm(x^2-6x+8)$ (рис. 51, *а*). Если положить $z = x + y$, то $z = x^2 - 5x + 8$ или $z = -x^2 + 7x - 8$. Графики этих квадратичных функций изображены на рис. 51, *б*, из которого и виден ответ (числа $\frac{7}{4}$ и $\frac{17}{4}$ являются ординатами вершин соответствующих парабол).

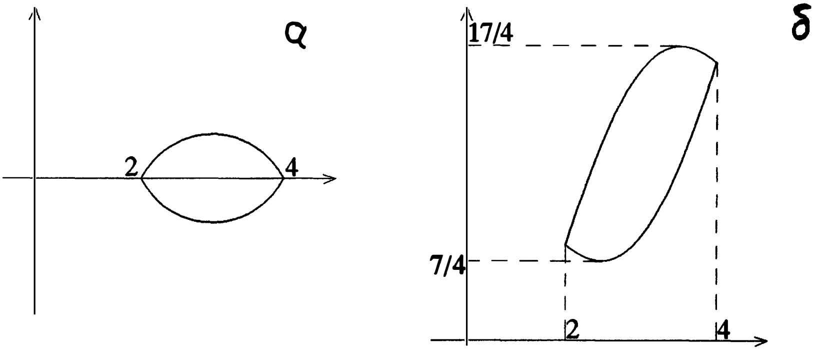

Рис. 51

Вариант 4: экзаменационная работа 1993 года для 10-х специализированных классов

1. Числа s_n (n — натуральное число) определены равенствами $s_1 = \dfrac{1}{2}$, $s_n = s_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   а) Докажите, что $s_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   б) При каких n верно неравенство $s_n < \dfrac{6}{n}$?
   в) Может ли быть, что $\sin s_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$?
   г) Верно ли, что для всякого $a < 1$ неравенство $s_n > a$ справедливо для всех натуральных n кроме конечного их числа?
2. Дана функция $f(x) = -2x^2 + 2ax - 1$.
   Пусть $a = 2$.
   а) Постройте графики $y = f(x)$, $y = f(-2x)$, $y = |f(x)|$.
   б) Докажите, что числа $2\sin^2\frac{\pi}{8}$ и $2\cos^2\frac{\pi}{8}$ являются корнями функции f.
   в) Найдите формулу для функции, обратной к рассматриваемой на луче $[2; +\infty)$ функции f.
   г) Решите неравенство $f(x) > |2x - a|$ (при всех a).
3. Треугольник ABC — равнобедренный прямоугольный с гипотенузой $AB = 1$. Точка M лежит на катете AC, угол BMC равен α (рис. 52). Положим $k(\alpha) = MB/MA$.
   а) Докажите, что $k(\alpha) = 1/(\sin\alpha - \cos\alpha)$.
   б) При каком α справедливо соотношение $MB = 2MA$?
   в) Найдите множество значений $k(\alpha)$.

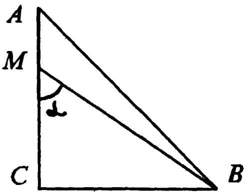

Рис. 52

4. Дана функция $g(x) = 2 \cdot 8^x - 4 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^{x+1}$.
   а) Решите неравенство $g(x) < 0$.
   б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $g(xy) < 0$.
   в) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $g(x) = a \cdot 2^x$?
5. Дана функция $h(x) = \log_2 \frac{x(x+1)}{x+2}$.
   а) Решите неравенство $\sqrt{h(x)} > 0$.
   б) Решите уравнение $h(\frac{1}{x}) + h(x) = 0$.
   в) При каких m уравнение $h(x) = \log_2(x+m)$ имеет решение?

Поскольку многие вопросы данного варианта стандартны, мы ограничимся тем, что приведем ответы, дадим указания и отметим тонкости некоторых решений.

1. а) Стандартное упражнение на метод математической индукции.

б) *Ответ*: $n = 1, 2, ..., 6$.

в) *Ответ*: нет, не может. Конечно, число π, а значит, и $\frac{\pi}{3}$, иррационально, поэтому $s_n \neq \frac{\pi}{3}$, однако иррациональность π — факт тонкий. В данном случае гораздо проще использовать неравенство $s_n = \frac{n}{n+1} < 1 < \frac{\pi}{3}$. (Кстати, как доказать, что $\pi > 3$?)

г) *Ответ*: верно. Неравенство $\frac{n}{n+1} \leqslant a$ равносильно неравенству $n \leqslant \frac{a}{1-a}$, которому удовлетворяют лишь конечное число натуральных чисел.

2. а) График функции $y = f(x)$ при $a = 2$ — на рис. 53, остальные два получаются при помощи стандартных преобразований.

б) Так как $2\cos^2 \frac{\pi}{8} + 2\sin^2 \frac{\pi}{8} = 2$, $2\cos^2 \frac{\pi}{8} \cdot 2\sin^2 \frac{\pi}{8} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, то в силу обратной теоремы Виета эти числа являются корнями уравнения.

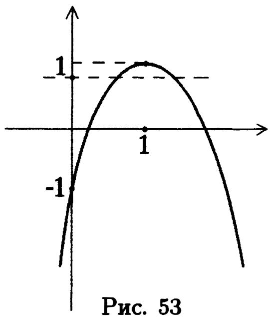

Рис. 53

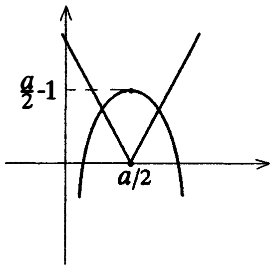

Рис. 54

в) *Ответ*: $y = 1 + \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ — из двух корней уравнения выбрали наибольший.

г) *Ответ*: $\left(\frac{1}{2}(a+1-\sqrt{a^2-1}); \frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2-1})\right)$ при $|a| > \sqrt{2}$, при остальных a решений нет. Геометрическая идея: вершина параболы имеет координаты $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} - 1\right)$, поэтому решение неравенства существует при $a^2 > 2$ (рис. 54).

Формально: сделав в неравенстве $-2x^2 + 2ax - 1 > |2x - a|$ замену $t = |x - \frac{a}{2}|$, получим неравенство $2t^2 + 2t + 1 - \frac{a^2}{2} < 0$, у которого следует рассматривать лишь положительные решения.

3. а) Стандартное упражнение в "решении треугольников" (см. рис. 52). б) *Ответ*: $\alpha = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

в) *Ответ*: $[1; +\infty)$. Имеем $k(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

4. а) *Ответ*: $(-\infty; 2)$. б) *Ответ* — на рис. 55. В силу предыдущего пункта $g(xy) < 0$ при $xy < 2$.

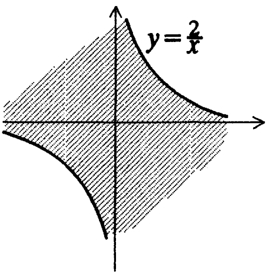

Рис. 55

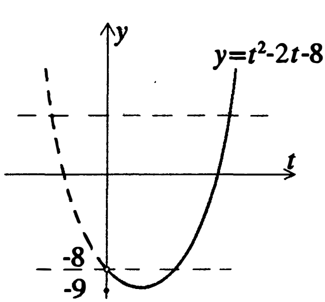

Рис. 56

в) *Ответ*: одно решение при $a = -18$ и $a \geqslant -16$, два — при $-18 < a < -16$, при $a < -18$ решений нет. После замены $t = 2^x$

получим уравнение $2t^2-4t-16=a$, положительным решениям которого и соответствуют решения исходного уравнения (рис. 56).

5. а) *Ответ*: $(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

б) *Ответ*: решений нет. Одно вычисление:

$$h\left(\frac{1}{x}\right)=\log_2\frac{\frac{1}{x}(\frac{1}{x}+1)}{\frac{1}{x}+2}=\log_2\frac{x+1}{x(2x+1)}.$$

в) *Ответ*: $m\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$. Алгебраическое решение. Уравнение $\log_2\frac{x(x+1)}{x+2}=\log_2(x+m)$ равносильно системе

$$\begin{cases} x(x+1)=(x+2)(x+m),\\ x+m>0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x=-\frac{2m}{m+1}$ и $m-\frac{2m}{m+1}>0$ при указанном в ответе множестве.

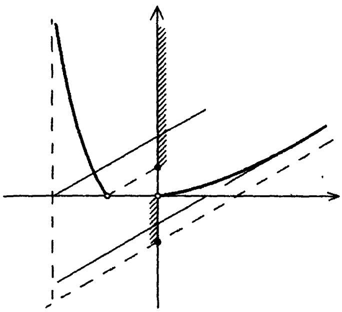

Рис. 57

Геометрически: на рис. 57 показана часть графика $y=\frac{x(x+1)}{x+2}=x-1+\frac{2}{x+2}$, расположенная выше оси абсцисс. Ясно, при каких m она пересекается с прямой $y=x+m$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Олимпиады выпускников

Вариант 5 (1990 год)

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

$$x^2y + xy^2 \leqslant 2xy.$$

б) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \cos x$.

в) Покажите, не прибегая к помощи микрокалькулятора, что

$$2{,}25 < \log_2 5 < 2{,}5.$$

г) В трапеции $ABCD$ известны длины двух сторон: $AB = 15$ см, $AD = 5$ см. Найдите длины двух других сторон этой трапеции, если одна из диагоналей делит ее на два треугольника равной площади.

2. Дана функция $f(x) = \sqrt{4|x| - x^2}$.

а) Решите уравнение $f(x) = -x - 2$.

б) Решите неравенство $f(x) > x - 5$.

в) Исследуйте, сколько корней, в зависимости от действительного параметра a, имеет уравнение $f(x) = a$.

3. Равнобедренный треугольник с углом φ при вершине вписан в равносторонний треугольник со стороной 2 так, что эта вершина совпадает с серединой стороны равностороннего треугольника.

а) Найдите выражение для площади $S(\varphi)$ этого треугольника.

б) Покажите, что $S(\varphi) = 3\sin\varphi/(8\sin^2(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}))$.

в) Докажите, что $S(\varphi) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. а) Найдите площадь подграфика функции

$$f(x) = \min\{\sqrt{x}, 2 - x\}, x \in [0; 2].$$

б) Покажите, что $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

в) Докажите, что для любых четырех чисел $a, b, p, q > 0$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, верно неравенство $\int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b x^{q-1}dx \geqslant ab$. В каком случае имеет место равенство?

Вариант 6 (1990 год)

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sin(x+y)\sin(x-y) > 0.$$

б) Решите уравнение $\log_2^2(-x) - 1 - \log_2(-\frac{1}{2}x) = 0$.

в) На рис. 58 изображен график функции. Нарисуйте график производной этой функции и дайте необходимые пояснения.

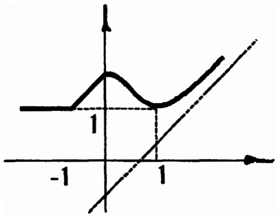

Рис. 58

г) Две вершины квадрата, расположенного в первом координатном угле, имеют координаты $(a, 0)$ и $(0, b)$. Найдите координаты двух других вершин и покажите, что центр квадрата лежит на биссектрисе этого координатного угла.

2. Дана функция $f(x) = \cos 2x + \sin x$.

а) Решите уравнение $f(x) = 1$.

б) Найдите число решений уравнения $f(x) = a$, лежащих на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$, в зависимости от действительного параметра a.

в) Найдите множество значений функции f.

3. а) Покажите, что $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2(x+y)}$ при $x, y \geqslant 0$.

б) Единичный квадрат разделен двумя прямыми на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей двух несмежных прямоугольников не превосходит $\frac{1}{16}$.

в) Найдите наибольшее значение произведения xy, если известно, что $x^2 + xy + y^2 \leqslant 1$.

4. Дана функция $f(x) = x^2$. Пусть $t \in [0; 1]$. Обозначим через $S(t)$ сумму площадей двух криволинейных треугольников, ограниченных графиком функции f, вертикальными прямыми $x = 0$,

$x = 1$ и горизонтальной прямой, проходящей через точку графика с абсциссой $x = t$.

а) Получите явную формулу для функции $S(t)$.

б) Найдите точку минимума функции S.

в) Выполните пункт б) в случае, если $f(x) = \ln(x + 1)$.

Вариант 7 (1991 год)

1. а) Решите уравнение $2^{2\lg x} + 2^3 = 6x^{\lg 2}$.

   б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $x + 1/y \geqslant 0$.

   в) Докажите, что функция $f(x) = \cos(x^2)$ непериодична.

   г) Найдите все такие a, что при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x) = \sin\frac{3x}{2} + \sin x$.

   а) Решите уравнение $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

   б) Найдите множество значений отношения $f(x)/\sin\frac{x}{2}$.

   в) Определите число решений уравнения $f(x) = a\sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[0; \pi]$.

3. Отображение f плоскости сопоставляет точке с координатами (u, v) точку $(u + v, 2uv)$.

   а) Найдите число элементов в прообразах точек $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(3, 2)$.

   б) Найдите множество значений отображения f.

   в) Докажите, что при всех действительных c образы прямых $u = c$ и $v = c$ совпадают и являются касательными фиксированной параболы.

4. Многочлены Чебышева первого рода определены формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x); \quad x \in [-1; 1], \quad n \geqslant 0.$$

   а) Докажите, что $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

   б) Докажите, что $2^{1-n}T_n(x)$ — многочлен степени n с коэффициентом 1 при x^n.

   в) Найдите $T_2(x)$ и докажите, что для любого квадратного трехчлена $P(x) = x^2 + ax + b$ выполняется неравенство

$$\max_{[-1;1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2} \max_{[-1;1]} |T_2(x)|.$$

Вариант 8 (1991 год)

1. а) Решите уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cos x = -1$.
   б) Найдите множество всех точек плоскости, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на кривой $y = x^3$.
   в) Найдите все такие a, при которых функция $y = \lg(x + \sqrt{a^2+x^2})$ нечетная.
   г) Найдите все такие b, что при любом a уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.
2. Пусть $f(x) = \sqrt{x+1} - x$.
   а) Решите неравенство $f(x) > -1$.
   б) Найдите множество значений функции f.
   в) Найдите число положительных решений уравнения $|f(x)| = a$.
3. Дан равнобедренный треугольник с углом α при вершине.
   а) Докажите, что $\frac{r}{R} = \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.
   б) При каком α отношение r/R принимает наибольшее значение?
   в) Докажите, что в общем случае отношение r/R принимает наибольшее значение для равносторонних треугольников.
4. а) Пусть $a \leqslant b$, $x \leqslant y$. Докажите, что $(a+b)(x+y) \leqslant 2(ax+by)$.
   б) Докажите неравенство Чебышева: если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то $\sum_1^n a_i \sum_1^n b_i \leqslant n\sum_1^n a_i b_i$.
   в) Пусть функция f монотонно возрастает на $[0;1]$. Докажите, что $\int_0^1 f(x)dx \leqslant 2\int_0^1 xf(x)dx$.

Вариант 9 (1992 год)

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a+b+c) < 0$. Верно ли обратное утверждение?
   б) Решите уравнение $\sin^{19}(\pi x) + \cos^{92}(\pi x) = 1$.
   в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (a, b) действительных чисел, что функция $y = a\sin x - bx$ монотонна на всей числовой прямой.
   г) Абсциссы двух точек пересечения некоторой прямой с графиком функции $y = x^3 - 19x + 92$ равны x_1, x_2. Найдите абсциссы остальных точек пересечения.

2. Решите неравенства: а) $\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}-3} \leqslant 1$, б) $\dfrac{\log_2 x - \log_x 4}{\log_x(x^2/8)} \leqslant 2$.

   в) Докажите, что уравнение $2\cos 2x = k(4\cos x - 3)$ имеет решения при любых целых k.

3. а) Упростите произведение $p_n = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{4}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$.

   б) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

   в) Докажите формулу Виета

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac12}\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12}}\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12}}}\;\cdots}.$$

4. Положим $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

   а) Найдите такие числа A и B, что для всех линейных функций f верно, что $I(f) = (b-a)(Af(a) + Bf(b))$.

   б) Существуют ли такие числа A, B, C, что для всех квадратичных функций f верно равенство

$$I(f) = (b-a)(Af(a) + Cf(\tfrac{a+b}{2}) + Bf(b))\,?$$

   в) Найдите формулу, выражающую обьем шарового сегмента через его высоту h и радиус R шара.

Вариант 10 (1992 год)

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a-b+c) < 0$. Верно ли обратное утверждение?

   б) Решите уравнение $\sin\dfrac{1992\pi^2}{x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

   в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (a, b) действительных чисел, что неравенство $|x-a| + |x-b| \leqslant 2$ верно при всех $x \in [0;1]$.

   г) Существует ли прямая, пересекающая кривую $x^3 + y^3 = 1$ в трех различных точках?

2. Решите неравенства: а) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1} \geqslant 2\sqrt{x}$, б) $\dfrac{\log_2 x + \log_x 8}{\log_x(2x)} \leqslant 3$.

   в) Найдите все такие целые k, что уравнение $5 - 2\cos 2x = k(2\sin x + 1)$ не имеет решений.

3. Даны многочлены $p_n(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ и $q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.
   а) Докажите, что многочлен $p_4(x)$ делится на $q(x)$.
   б) Найдите все α, отличные от πk, $k \in \mathbb{Z}$, при которых многочлен $p(x)$ имеет действительные корни.
   в) Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 2$ многочлен $p_n(x)$ делится на $q(x)$.

4. Функция f задана, непрерывна и $f(x+1) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.
   а) Докажите, что интеграл $\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ не зависит от t.
   Предположим дополнительно, что функция f положительна. Пусть $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\,dx$.
   б) Докажите, что $F\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 1$.
   в) Найдите все действительные α, при которых $F(\alpha) \geqslant 1$.

Вариант 11 (1993 год)

1. а) Постройте эскиз графика функции $y = \left|\log_{4/x}(4x^2)\right|$.
   б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a, b)$, для которых при всех x верно неравенство $\sin(x+a) \geqslant \sin x + b$.
   в) Найдите наибольший радиус круга, лежащего в верхней полуплоскости, касающегося оси абсцисс в начале координат и не имеющего других общих точек с параболой $y = x^2$.
   г) Докажите, что $\int\limits_0^n \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx > 0$ при всех натуральных n.

2. а) Решите неравенство $2x \cdot 2^{\sqrt{3-x}} + 3 \cdot 2^{x-1} > x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{\sqrt{3-x}}$.
   б) Решите неравенство $\cos^2 x - \dfrac{2}{\cos x} \leqslant 2 - \cos x$.
   в) Докажите, что не существует прямых, касающихся графика функции $y = x^3 + 19x^2 + 9x + 3$ в двух разных точках.

3. В условии этой задачи все числа — комплексные.
   а) Нарисуйте образ полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}$ при отображении, сопоставляющем числу z число z^{-1}.
   б) Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то треугольник с вершинами в точках a, b, c содержит начало координат.
   в) Докажите, что всякий корень уравнения

$$\frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \frac{1}{z-c_3} = 0$$

   лежит в треугольнике с вершинами в точках c_1, c_2, c_3.

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове “аллах”.
   б) Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} C_n^{k-1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

   в) Имеются две монеты, одна из которых фальшивая: на обеих ее сторонах изображен герб. Случайным образом выбрали одну монету. Какова вероятность того, что монета фальшивая, если она лежит гербом вверх?

Вариант 12 (1994 год)

1. а) Найдите все такие значения a и b, что система неравенств

$$\begin{cases} x + |y - a| \leqslant b, \\ y \geqslant 2|x - b| \end{cases}$$

   имеет единственное решение.
   б) Докажите, что кривая $x^4 + 1994x^3y - 6x^2y^2 - 1994xy^3 + y^4 = 0$ делит единичную окружность на восемь равных дуг.
   в) Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2-y^2 = k^{1993}$ разрешимо в целых числах.
2. а) Решите неравенство $x + \sqrt[3]{|3x+1|-1} \geqslant 0$.
   б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = a(\cos x - \sin x)$, лежащие в отрезке $[0; \pi]$.
   в) Решите уравнение $3^{2x} = 2^{2x} + 3^x + 2^x$.
3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = \ln x$, которые проходят через начало координат.
   б) При каких a уравнение $\ln x = a\,x$ имеет решения?
   в) Сколько решений имеет уравнение $6^x = x^6$?
   г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?
4. а) Докажите, что число различных способов замощения полоски размером $2 \times n$ “доминошками” равно n-му числу Фибоначчи.
   б) Найдите формулу для суммы квадратов коэффициентов в разложении бинома $(x+1)^n$.
   в) Шестеро учеников готовятся к ответу, сидя в один ряд на скамье за общим столом. Учитель может вызвать их в любом порядке. Какова вероятность того, что, выходя к доске, хотя бы один из них потревожит другого?

Вариант 13 (1994 год)

1. а) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение
$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-1994|=a?$$
   б) Докажите, что при любом натуральном n число $n^{1994} - 1994n + 1993$ делится на $(n-1)^2$.
   в) Докажите неравенство $\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} > \dfrac{1}{4}$, где в числителе дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе — 1993.
2. а) Решите неравенство $x \leqslant \sqrt[3]{|3x-1|-1}$.
   б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x + b(\cos x + \sin x) = 0$, лежащие в отрезке $[0;\pi]$.
   в) Решите уравнение $5^{2x} = 3^{2x} + 2\cdot 5^x + 2\cdot 3^x$.
3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = e^x$, которые проходят через начало координат.
   б) При каких a уравнение $e^x = a\,x$ имеет решения?
   в) Сколько решений имеет уравнение $10^x = x^{10}$?
   г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?
4. а) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске квадрат из целого числа ее клеток?
   б) Сколько существует n-позиционных двоичных чисел, в которых нулей не меньше, чем единиц?
   в) Вася и Оля договорились о встрече между 17 и 18 часами. Вася будет ждать Олю в течение 30 минут после своего прихода, а Оля Васю — 10 минут. Какова вероятность их встречи, если каждый из них может подойти к назначенному месту в любой момент времени между 17 и 18 часами?

Вариант 14 (1995 год)

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^2 x = 10$.
   б) Найдите число решений уравнения $1 + ax = \sqrt{x+3}$.
   в) Докажите, что уравнение $8^x + 4^x + 2^x = 2x + 3$ имеет ровно два решения.
   г) Найдите наибольшее по абсолютной величине значение выражения $(x-8)(x-14)(x-16)(x-22)$ при $x \in [8;22]$.

2. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{c_n + a_n}{2}$ и $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
   а) Найдите пределы этих последовательностей, если $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $c_1 = 2$.
   б) Пусть $\xi = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$. Докажите, что число ξ является общим пределом данных последовательностей.
   в) Дан треугольник ABC с углами $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{4}{7}\pi$; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения биссектрис его углов с описанной около него окружностью; A_2, B_2, C_2 — точки пересечения биссектрис углов треугольника $A_1B_1C_1$ с этой же окружностью, и т. д. Вычислите углы треугольника $A_{40}B_{40}C_{40}$ с точностью до 0,01.

3. а) Докажите, что если число $x + x^{-1}$ целое, то при всех $n \in \mathbb{Z}$ число $x^n + x^{-n}$ также целое.
   б) Докажите, что число $[(3 + \sqrt{5})^n] + 1$ делится на 2^n ($[\ .\ ]$ — целая часть числа).
   в) Докажите, что если многочлен $x^n + 1$ делится на многочлен $x^k + 1$, то многочлен $x^{4n} + 1$ делится на $x^{4k} + 1$.

4. а) У Танъ-Янны имеются чашечные весы и набор разновесок в 1, 3, ..., 3^{1995} амма (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.
   б) Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi} \cos x \cos 3x \ldots \cos 3^{1995}x\, dx$.
   в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что длина каждого из кусков не превосходит половины ее длины.

Вариант 15 (1995 год)

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 10$.
   б) Найдите число решений уравнения $2 + ax = \sqrt{5 - x}$.
   в) Докажите, что уравнение $1 + 9^{9x} + 5^x = 4x + 3$ имеет ровно два решения.
   г) Докажите, что выражение $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ принимает любое действительное значение тогда и только тогда, когда только одно из чисел a, b лежит между c и d.

2. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1} = \frac{b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}$.

   а) Пусть $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Положим $\Delta_n = \sqrt{(a_n - \frac{1}{3})^2 + (b_n - \frac{2}{3})^2}$. Докажите, что числа Δ_n образуют геометрическую прогрессию.

   б) Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не зависят от выбора a_1, b_1.

   в) Лучи ℓ_1 и m_1 лежат в первом координатном угле, причем луч ℓ_1 образует угол $\frac{\pi}{5}$ с осью абсцисс, а m_1 — угол $\frac{\pi}{7}$ с осью ординат. Луч ℓ_n является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом m_{n-1}, а m_n — биссектрисой угла между осью ординат и ℓ_{n-1}. Вычислите с точностью до 0,01 угол между лучом ℓ_{40} и осью абсцисс.

3. а) Известно, что $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 5$. Найдите $x^5 + y^5$.

   б) Докажите, что если многочлен $x^n - 1$ делится на многочлен $x^k - 1$, то многочлен $x^{4n} - 1$ делится на $x^{4k} - 1$.

   в) Докажите, что многочлен $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)\ldots(x^{n+k-1} - 1)$ делится на многочлен $(x - 1)(x^2 - 1)\ldots(x^k - 1)$.

4. а) У Янатты имеются чашечные весы и набор разновесок в $1, 5, \ldots, 5^{1995}$ аппа (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

   б) Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi} \sin x \sin 5x \ldots \sin 5^{1995}x\, dx$.

   в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что из образовавшихся кусков можно составить треугольник.

Контрольные работы для 10-х специализированных классов

Вариант 16 (1990 год)

1. а) Решите неравенство $\dfrac{(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)(x - 2)}{-x^2 + 2x - 5} > 0$.

   б) Решите неравенство $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geqslant 5$.

   в) Определите, при каких значениях параметра a функция $y = x^2 + 2ax + a - 2$ положительна на интервале $(1; 2)$.

   г) Решите неравенство $\dfrac{ax - a - 1}{ax - 2} > 0$ при всех действительных значениях параметра a.

2. а) Покажите, что число $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$ является целым, и найдите его.
   б) Известно, что число $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $x^3-(a+2)x^2+bx-2a$, где a и b — целые числа. Найдите a, b и остальные корни этого многочлена.
   в) Известно, что остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-2$ и $x+1$ равны 3 и 1 соответственно. Найдите остаток от деления этого многочлена на x^2-x-2.
   г) Решите уравнение $x^3-[x]-8=0$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x).

3. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют неравенству
$$(x^2+y^2-4)\sqrt{|x|-1}\leqslant 0.$$
   б) Функция f задана равенствами
$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\in[-1;0];\\ -\dfrac{1}{2}x+1, & \text{если } x\in[0;2].\end{cases}$$
   Постройте графики функций
$$y=f(-x),\ y=f(2x),\ y=2f(2x-2).$$
   в) Найдите множество значений функций
$$y=\sqrt[4]{4x-x^2} \quad \text{и} \quad y=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$
   г) Изобразите на координатной плоскости множество всех пар (p,q), что сумма квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$ равна единице.

Вариант 17 (1990 год)

1. а) Решите неравенство $\dfrac{(x^3-4x^2+x+6)(x+1)}{-x^2+2x-4}>0$.
   б) Решите неравенство $(-x^2+2x+2)(x^2-2x+4)\geqslant 5$.
   в) Определите, при каких значениях параметра b функция $y=x^2+bx-b+2$ положительна на интервале $(-2;-1)$.
   г) Решите неравенство $\dfrac{bx-b+2}{bx-1}>0$ при всех действительных значениях параметра b.

2. а) Покажите, что $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)$ — целое число, и найдите его.
   б) Известно, что число $-\sqrt{3}$ является корнем многочлена $x^3-(2a-1)x^2+3bx-2b+a=0$, где a и b — целые числа. Найдите a, b и остальные корни этого многочлена.
   в) Известно, что остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-1$ и $x+2$ равны 2 и -1 соответственно. Найдите остаток от деления этого многочлена на x^2+x-2.
   г) Решите уравнение $x^3-[x]-11=0$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x).
3. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству
$$(x^2+y^2-4)\sqrt{\sqrt{2}-|y|}\geqslant 0.$$
   б) Функция f задана равенствами
$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x-1, & \text{если } x\in[-2;0];\\ x-1, & \text{если } x\in[0;1].\end{cases}$$
   Постройте графики функций
$$y=-f(x),\ y=f(-2x),\ y=2f(2-2x).$$
   в) Найдите множество значений функций
$$y=\sqrt[4]{-x^2-8x} \quad \text{и} \quad y=\frac{1-x^2}{x^2+2}.$$
   г) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких пар (a, b), что сумма чисел, обратных корням уравнения $ax^2-bx+1=0$, равна двум.

Вариант 18 (1992 год)

1. а) Упростите числовое выражение $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.
   б) Решите неравенство $\dfrac{x-\sqrt{12}+\sqrt{11}}{x-\sqrt{11}+\sqrt{10}}>0$.
   в) Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, а также остальные его корни.
   г) Докажите, что на прямой, параллельной $y=x\sqrt{3}$, не может лежать более одной точки с рациональными координатами.

2. а) Найдите область определения выражения $\sqrt{\dfrac{\{x\}-1}{x^3-25x}}+\dfrac{1}{[x]-2}$ (здесь $\{x\}$ — дробная, $[x]$ — целая часть числа x).

   б) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\max\{|x|, \sqrt{x-y}\} \leqslant 1$.

   в) Решите неравенство $\left|\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right| < |x|+\dfrac{1}{|x-1|}$.

   г) Найдите все такие значения a, что любое решение неравенства $|x-a| > x+2$ является также решением неравенства $|x-a| > |x-2|$.

3. а) Определите все значения k, при которых образ графика $y = \dfrac{1}{x+2}$, сдвинутого на k единиц вдоль оси ординат, не пересекается с графиком $y = \dfrac{1}{x}$.

   б) Найдите множество значений функции $y = \dfrac{1}{x(x+2)}$ и нарисуйте эскиз ее графика.

   в) Решите уравнение $(x^2+x-4)^2+3x(x^2+x-4)+2x^2 = 0$.

   г) Решите уравнение $x^4+x(x+2)+1 = 0$.

Вариант 19 (1992 год)

1. а) Докажите, что следующее число целое:

$$\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{29})(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{29})(\sqrt{10}+\sqrt{29}-\sqrt{5})(\sqrt{29}+\sqrt{5}-\sqrt{10})}.$$

   б) Решите неравенство $\dfrac{x+\sqrt{14}-\sqrt{13}}{x+\sqrt{15}-\sqrt{14}} < 0$.

   в) Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, а также остальные корни этого многочлена.

   г) Докажите, что на прямой, параллельной $x = y\sqrt{5}$, не может лежать более одной точки с рациональными координатами.

2. а) Найдите область определения выражения $\sqrt{\dfrac{1-\{x\}}{x^3-36x}}+\dfrac{1}{[x]+3}$ (здесь $\{x\}$ — дробная, $[x]$ — целая часть числа x).

   б) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\max\{\sqrt{x+y}, |y|\} \leqslant 1$.

в) Решите неравенство $\left|\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}\right| \geqslant |x| + \dfrac{2}{|x+2|}$.

г) Найдите все такие значения a, что любое решение неравенства $|x+a| > 2 - x$ является также решением неравенства $|x+a| > |x+2|$.

3. а) Определите все значения k, при которых образ графика $y = \dfrac{1}{x+4}$, сдвинутого на k единиц вдоль оси ординат, не пересекается с графиком $y = \dfrac{1}{x+2}$.

б) Найдите множество значений функции $y = \dfrac{1}{(x+2)(x+4)}$ и нарисуйте эскиз её графика.

в) Решите уравнение $(x^2+x-2)^2 + x(x^2+x-2) - 2x^2 = 0$.

г) Решите уравнение $x^4 + (x+2)(x+4) + 1 = 0$.

Вариант 20 (1993 год)

1. а) Какое из чисел ближе к единице — $2{,}5 \cdot \sqrt[7]{0{,}4}$ или $0{,}4 \cdot \sqrt[7]{2{,}5}$?

б) Найдите все такие натуральные n, что число $4^n - 3^n$ делится на 7.

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $|x-y| \geqslant x - 2y$.

г) Пусть $f(x) = x(x^2-5)$. Решите уравнение $f(x) = f(\frac{1}{x})$.

2. Дана функция $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 3$.

а) Докажите, что число $\frac{1}{\sqrt{2}}(f(3+\sqrt{2}) - f(3-\sqrt{2}))$ целое.

б) Является ли число $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$ рациональным?

в) Существует ли такое иррациональное число z, что $f(z)$ — рациональное число?

3. Дана функция $f(x) = 2 + ax - x^2$.

а) Пусть $a = 1$. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{f(x)}$ и постройте эскиз ее графика.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = 2 + x - x^2 - 4\sqrt{2+x-x^2}$.

в) При каких значениях a график $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс в таких точках x_1 и x_2, что $x_1 < 1 < x_2$?

4. Даны точки $A(-1,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,1)$ и $D(5,-1)$.

а) Вычислите площадь четырехугольника $ABCD$.

Для всякого действительного числа c через $S(c)$ обозначим площадь той части четырехугольника $ABCD$, которая лежит правее вертикальной прямой $x = c$.

б) Докажите, что функция S является монотонной.

в) Найдите формулу для $S(x)$ и постройте график функции S.

Вариант 21 (1993 год)

1. а) Какое из чисел ближе к единице — $0{,}625\cdot\sqrt[5]{1{,}6}$ или $1{,}6\cdot\sqrt[5]{0{,}625}$?

   б) Найдите все такие натуральные n, что число $5^n + 2^n$ делится на 7.

   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $|x - 2y| \geqslant x - y$.

   г) Пусть $f(x) = x(4 - x^2)$. Решите уравнение $f(x) = f(\frac{1}{x})$.

2. Дана функция $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 3x + 2$.

   а) Докажите, что число $\frac{1}{\sqrt{3}}(f(2+\sqrt{3}) - f(2-\sqrt{3}))$ целое.

   б) Является ли число $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$ рациональным?

   в) Существует ли такое иррациональное число z, что $f(z)$ — рациональное число?

3. Дана функция $f(x) = 2 + ax - x^2$.

   а) Пусть $a = -1$. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{f(x)}$ и постройте эскиз ее графика.

   б) Найдите наименьшее значение функции $y = 2 - x - x^2 - 2\sqrt{2 - x - x^2}$.

   в) При каких значениях a график $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс в таких точках x_1 и x_2, что $x_1 < -1 < x_2$?

4. Даны точки $A(-1,-1)$, $B(-1,5)$, $C(1,1)$ и $D(1,-1)$.

   а) Вычислите площадь четырехугольника $ABCD$.

   Для всякого действительного числа c через $S(c)$ обозначим площадь той части четырехугольника $ABCD$, которая лежит ниже горизонтальной прямой $y = c$.

   б) Докажите, что функция S монотонная.

   в) Найдите формулу для $S(x)$ и постройте график функции S.

Вариант 22 (1994 год)

1. а) Докажите, что следующее число рациональное:
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$
   б) Пусть $f(x) = x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})x + 1$. Верно ли, что при всех $a \geqslant b \geqslant \frac{3}{2}$ справедливо неравенство $f(a) \geqslant f(b)$?
   в) Найдите все рациональные решения уравнения $x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$. Ответ обоснуйте.
   г) Пусть $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{k+1} = \dfrac{a_k+1}{2a_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $a \neq a_k$ ни при каком натуральном k, то формула $x_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n - 1}$, где $x_1 = a$, имеет смысл при всех натуральных n.
2. Дана функция $f(x) = x^3 - 6x$.
   а) Решите уравнение $|f(x)| = 2x$.
   б) Решите неравенство $\dfrac{f(x)-40}{f(x-1)} \leqslant 0$.
   в) Докажите, что $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = 4$.
3. Найдите все такие значения параметров a (и b), при которых:
   а) уравнение $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2+2} = a$ имеет решение;
   б) уравнение $(3x^2 - a + 2b)^2 + (2a - 3b - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$ имеет решение;
   в) уравнение $x^4 + (a-1)x^3 + x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.
4. а) Постройте график функции $y = |x^2 + x| - x$.
   б) При всех значениях a решите неравенство $|x^2 + a| \leqslant a + 1$.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $|x^2 + y| = y + 1$.

Вариант 23 (1994 год)

1. а) Докажите, что следующее число иррациональное:
$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$
   б) Пусть $f(x) = x^2 - 2(\sqrt{5}-\sqrt{3})x + 1$. Верно ли, что при всех $a \geqslant b \geqslant \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $f(a) \geqslant f(b)$?
   в) Найдите все рациональные решения уравнения $x^2 + 3xy - 5y^2 = 0$. Ответ обоснуйте.

г) Пусть $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{k+1} = \frac{1-a_k}{2a_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $a \neq a_k$ ни при каком натуральном k, то формула $x_{n+1} = \frac{1}{2x_n+1}$, где $x_1 = a$, имеет смысл при всех натуральных n.

2. Дана функция $f(x) = x^3 - 9x$.
   а) Решите уравнение $|f(x)| + 7x = 0$.
   б) Решите неравенство $\frac{f(x) - 80}{f(x+2)} \geqslant 0$.
   в) Докажите, что $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1573}} = 5$.
3. Найдите все такие значения параметров a (и b), при которых:
   а) уравнение $\sqrt{x} + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}+3} = a$ имеет решение;
   б) уравнение $(x - a + 2b)^2 + (2x^2 - a - 2b)^2 + 4 = -x^2 - 4x$ имеет решение;
   в) уравнение $x^4 - (a+1)x^3 + x^2 - (a+1)x + 1 = 0$ имеет не менее двух различных положительных корней.
4. а) Постройте график функции $y = |x^2 - x| - x$.
   б) При всех значениях a решите неравенство $|x^2 - a| \leqslant a - 1$.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $|x^2 - y| = y - 1$.

Экзаменационные работы для 10-х специализированных классов

Вариант 24 (1990 год)

1. а) Решите неравенство $\log_{1/3}(x^2 - 2x) + 1 \geqslant 0$.
   б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, являющихся решениями системы неравенств $|x| \leqslant y^2 \leqslant 1$.
   в) Покажите, что неравенство $\frac{n+1}{n^3 - n + 1} \leqslant \frac{2}{n^2}$ верно при всех натуральных n.
   г) Определите, при каких значениях действительного параметра k неравенство $\sqrt{x^2+3} \geqslant kx$ верно для всех действительных x.
2. Дана функция $f(x) = \cos 3x \cos x$.
   а) Найдите такую функцию g, что $f(x) = g(\cos 2x)$ при всех действительных x.
   б) Решите уравнение $f(x) = -1/2$.

в) Сколько решений уравнения $f(x) = -1/2$ лежит на отрезке $[3; 4]$?

г) Найдите период функции f. Ответ обоснуйте.

3. Дана функция $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + a$.

а) Определите значение параметра a, при котором $x = 2$ является решением уравнения $f(x) = 0$.

Далее, при найденном в пункте а) значении параметра a:

б) Решите уравнение $f(x) = 0$.

в) Решите неравенство $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+4}} \leqslant 0$.

г) Определите, при каких значениях параметра k уравнение $f(x) = (x+3)(x+k)$ имеет единственное решение.

4. Дана функция $f(x) = 14^x - 1$.

а) Определите число решений уравнения $|f(x)| = a$ в зависимости от значения параметра a.

б) Найдите наименьшее значение функции $F(x) = f(x) + 14^{-x}$.

в) Докажите, что при всех натуральных n число $f(n)$ делится на 13.

г) Докажите, что неравенство $f(n) > 20n + 7$ верно при всех натуральных $n > 1$.

Вариант 25 (1990 год)

1. а) Решите неравенство $\log_{1/2}(x^2 - 5x + 4) + 2 \geqslant 0$.

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых являются решениями системы неравенств $|y| \leqslant \log_2(|x| + 1) \leqslant 1$.

в) Покажите, что неравенство $\sqrt[3]{x^2+2} - \sqrt[3]{x^2+1} \leqslant 1$ верно при всех действительных x.

г) Определите, при каких значениях действительного параметра k неравенство $n^2 + 2\sqrt{2n} \geqslant kn$ верно для всех натуральных n.

2. Дана функция $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$.

а) Найдите период функции f. Ответ обоснуйте.

б) Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.

в) Сколько решений уравнения $f(x) = \frac{1}{2}$ лежит на отрезке $[4; 5]$?

г) Покажите, что не существует такой функции g, для которой $f(x) = g(\cos 2x)$ при всех действительных x.

3. Дана функция $f(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$.
   а) Определите значение параметра k, при котором $x = 4$ является решением уравнения $f(x) = 0$.

   Далее, при найденном в пункте а) значении параметра k:
   б) Решите уравнение $f(x) = 0$.
   в) Найдите область определения функции $y = \sqrt{f(x)\sqrt{x-1}}$.
   г) Определите, при каких значениях параметра a решением неравенства $f(x) < (x-4)(x-a)$ является луч $(-\infty; 4)$.
4. Дана функция $f(x) = 3^x$.
   а) Определите число решений уравнения $f(|x-2|) = a$ в зависимости от значения параметра a.
   б) Покажите, что при всех действительных x верно неравенство $f(x) + 3^{-x} \geqslant 2$.
   в) Найдите все такие натуральные n, при которых число $f(n) - 1$ делится на 4.
   г) Докажите, что неравенство $f(n) < 4^n - 6$ верно при всех натуральных $n > 1$.

Вариант 26 (1991 год)

1. а) Решите неравенство $\log_{2x-1}(x^2 - 6x + 9) < 0$.
   б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению
   $$\sin(\pi(x^2 + y^2))\sqrt{x-y} = 0.$$
   в) При каких значениях параметра m прямая, проходящая через точки $A(-1, -3)$ и $B(2, m)$, касается параболы $y = x^2$?
   г) Функция f имеет период $T = 1$ и $f(x) = x^2 - x$ при $x \in [0; 1]$. Найдите $f(2)$, $f(\frac{3}{2})$ и $f(-25\frac{1}{7})$.
2. Дана функция $f(x) = \cos x + \sin x$.
   а) Решите уравнение $11f(x) = 5\sin 2x + 7$.
   б) Постройте график функции $y = \sqrt{f(x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.
   в) Найдите наименьший положительный корень уравнения $f(3x) + 5\cos 4x = 6 + \cos 3x$.
3. Дана функция $f(x) = \log_{1/2}(x-1) - \log_2(x+1) - \log_{1/\sqrt{2}}|7-x|$.
   а) Решите уравнение $f(x) = 1$.
   б) Найдите область определения функции $y = \log_{0,2}(1 - f(x))$.
   в) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.

4. Дана функция $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$.
   а) При каких значениях a уравнение $f(x) = ax$ имеет решение?
   б) Докажите, что последовательность $x_n = f(-n)$, $n = 1, 2, \ldots$, является убывающей.
   в) Решите уравнение $\dfrac{2x}{3x^2 - x + 2} - \dfrac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

Вариант 27 (1991 год)

1. а) Решите неравенство $\log_{x+1}\left(4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 9\right) < 0$.
   б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему уравнению: $\cos(\pi(x+y))\sqrt{x^2 + y^2 - 4} = 0$.
   в) При каких значениях параметра m парабола, проходящая через точки $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$ и $C(0, m)$, касается прямой $y = 6 - 2x$?
   г) Функция f имеет период $T = 2$ и $f(x) = x^2 + 2x$ при $x \in [-2; 0]$. Найдите $f(2)$, $f(\frac{5}{2})$ и $f(-106{,}25)$.

2. Дана функция $f(x) = \sin x - \cos x$.
   а) Решите уравнение $4f(x) = 4 - \sin 2x$.
   б) Постройте график функции $y = \sqrt{f(x) \cos \dfrac{x}{2} \sec \dfrac{x}{2}}$.
   в) Найдите наименьший положительный корень уравнения $f(4x) + 4 \sin 3x = -5 + \sin 4x$.

3. Дана функция $f(x) = \log_{1/3}(x - 1) + \log_{1/3}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}} |5 - x|$.
   а) Решите уравнение $f(x) = 1$.
   б) Найдите область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - f(x)}}$.
   в) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.

4. Дана функция $f(x) = x + \dfrac{15}{x}$.
   а) При каких значениях параметра a уравнение $af(x) + x = 0$ имеет решение?
   б) Докажите, что последовательность $x_n = f(\frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \ldots$, является возрастающей.
   в) Решите уравнение $\dfrac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{4x}{x^2 - 12x + 15}$.

Вариант 28 (1992 год)

1. а) Докажите, что уравнение $3^{x-\frac{1}{2}} = 0{,}25^{x-1} + 2{,}5$ имеет единственное решение, и найдите его.
   б) Изобразите на координатной плоскости множество, заданное неравенством $x^2 + 4xy - 5y^2 \geqslant 0$.
   в) Докажите, что функция $g(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ обратима на луче $(-\infty; 0]$.
   г) Постройте график функции $g(x) = \max\limits_{t \in [x; x+\pi/2]} \sin t$.
2. Решите неравенства:
   а) $8^x - 3 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+3} < 0$; б) $\dfrac{5 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} \geqslant 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$;
   в) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ при всех действительных a.
3. Функция f задана формулой $f(x) = \sin 2x - 2(\cos x - \sin x - 1)$.
   а) Решите уравнение $f(x) = 0$.
   б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции f.
   в) Найдите такую функцию g, что при всех x справедливо равенство $g(\cos x - \sin x) + g(\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})) = 1$.
4. Функция f задана формулой $f(x) = \log_a(x+3) + \log_a(x-1)$, где a — действительное число.
   а) Пусть $a = 4$. Решите неравенство $f(x) \leqslant 2 - \log_4 8$.
   б) При том же a решите неравенство
   $$\frac{f(x) - 2 + \log_4 8}{\log_{0,19} 92 - \lg^2(5 - x)} \leqslant 0.$$
   в) Найдите множество значений a, для которых при всех $x \in (1; 2)$ верно неравенство $f(x) < 2$.

Вариант 29 (1992 год)

1. а) Докажите, что уравнение $5^{x+\frac{3}{2}} = 2{,}25^{-x} + 3{,}5$ имеет единственное решение, и найдите его.
   б) Изобразите на координатной плоскости множество, заданное неравенством $x^2 + xy - 6y^2 \leqslant 0$.
   в) Докажите, что функция $g(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 3$ обратима на луче $(-\infty; 0]$.
   г) Постройте график функции $g(x) = \min\limits_{t \in [x; x+\pi/2]} \cos t$.

2. Решите неравенства:

   а) $27^x - 9^{x+1} + 3^{x+2} > 3^x$; б) $\dfrac{16 \cdot 5^{x-2}}{5^x - 3^x} \leqslant 1 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$;

   в) $a^2 - 3 \cdot 9^{x+1} + 2a \cdot 3^{x+1} > 0$ при всех действительных значениях параметра a.

3. Функция f задана формулой $f(x) = \sin 2x + 2(\cos x + \sin x + 1)$.

   а) Решите уравнение $f(x) = 0$.

   б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции f.

   в) Найдите такую функцию g, что при всех x справедливо равенство $g(\cos x + \sin x) + g(\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})) = -3$.

4. Функция f задана формулой $f(x) = \log_a(x-2) + \log_a(x+4)$, где a — действительное число.

   а) Пусть $a = 3$. Решите неравенство $f(x) < \log_3 1{,}8 + \log_3 15$.

   б) При том же a решите неравенство

$$\frac{f(x) - \log_3 1{,}8 - \log_3 15}{\log_{92} 19 + \lg^2(7-x)} > 0.$$

   в) Найдите множество чисел a, для которых при всех $x > 3$ верно неравенство $f(x) > 2$.

Вариант 30 (1994 год)

1. Дана функция $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$.

   а) Докажите, что $f(x) = \dfrac{4\sin 2x}{1 + 2\cos 2x}$.

   б) Решите уравнение $f(x) = 3\operatorname{tg} x$.

   в) Решите неравенство $f(x) > 0$.

   г) Найдите наибольшее значение функции f на отрезке $[0; \frac{\pi}{6}]$.

2. Дана функция $f(x) = \log_2 \dfrac{x - 1/x}{3}$.

   а) Решите неравенство $f(x) < -1$.

   б) Решите уравнение $\sqrt{3 - f(x)} = 1 - f(x)$.

   в) Докажите, что функция f монотонна на $(-1; 0)$, и найдите формулу для функции g, обратной к ней на этом интервале.

   г) Сколько решенией (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = \log_2(a - x)$?

3. Дана функция $f(x) = 2x - x^2 - 3$.
   а) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, y), что $f(x) > f(y)$.
   б) Докажите, что $\cos(f(x)) < 0$ при всех $x \in [0; 1]$.
   в) Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{f(x)} + 2^{-f(x)}$.
   г) Найдите все значения, которые могут принимать корни уравнения $f(x) + m^2 = 0$, если $m \in [\frac{3}{2}; 2]$.

Вариант 31 (1994 год)

1. Дана функция $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) + \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$.
   а) Докажите, что $f(x) = \dfrac{4\sin 2x}{2\cos 2x - 1}$.
   б) Решите уравнение $f(x) + 3\operatorname{ctg} x = 0$.
   в) Решите неравенство $f(x) < 0$.
   г) Найдите наибольшее значение функции f на отрезке $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
2. Дана функция $f(x) = \log_3 \dfrac{1/x - x}{8}$.
   а) Решите неравенство $f(x) < -1$.
   б) Решите уравнение $\sqrt{2 - 2f(x)} = f(x) + 3$.
   в) Докажите, что функция f монотонна на $(0; 1)$, и найдите формулу для функции g, обратной к ней на этом интервале.
   г) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = \log_3(a + 2x)$?
3. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x + 5$.
   а) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, y), что $f(x) > f(y)$.
   б) Докажите, что $\sin(f(x)) < 0$ при всех $x \in [-1; 0]$.
   в) Найдите наименьшее значение функции $3^{f(x)/2} + 3^{-f(x)/2}$.
   г) Найдите все значения, которые могут принимать корни уравнения $f(x) = p$, если $p \in [\frac{17}{4}; 6]$.

Вариант 32 (1995 год)

1. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$:
   а) верно неравенство $2^n |\sin(2^{-n}x)| \geqslant \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
   б) число $\log_{n+2}(n^2 + 1)$ иррационально;
   в) число $(n-1)n(n+1)(n+2) + 1$ является точным квадратом.

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + m}$.
   а) Пусть $m = -4$. Найдите абсциссы точек пересечения графика данной функции и прямой $y = \frac{4}{3}x$.
   б) При том же значении m постройте график этой функции.
   в) Существует ли такое значение m, при котором любое число $a \neq 1$ входит в множество значений функции f?
3. Дана функция $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.
   а) Докажите, что $f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} + 1$.
   б) Решите неравенство $f(x) \geqslant 2 \operatorname{tg} 2x$.
   в) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение, лежащее на отрезке $[0; \frac{\pi}{3}]$.
4. Дана функция $f(x) = \log_2 x$.
   а) Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{2 - f(x)}{f(x)}} \leqslant 2$.
   б) Решите уравнение $f^2(\frac{x}{4}) = f^2(\sqrt{x+2})$.
   в) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x+1) = f(x^2 - a)$ имеет только одно решение.

Вариант 33 (1995 год)

1. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$:
   а) верно неравенство $\sin(2^n x) \leqslant 2^n |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$;
   б) число $\log_{n^2+2}(n+3)$ иррационально;
   в) число $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$ является точным квадратом.
2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 - m}{x^2 - 4}$.
   а) Пусть $m = 3$. Найдите абсциссы точек пересечения графика данной функции и прямой $y = -\frac{2}{3}x$.
   б) При том же значении m постройте график этой функции.
   в) Существует ли такое значение m, при котором любое число $a \neq 1$ входит в множество значений функции f?
3. Дана функция $f(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$.
   а) Докажите, что $f(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   б) Решите неравенство $f(x) + 2 \operatorname{tg} 2x \leqslant 0$.
   в) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение, лежащее на отрезке $[\frac{2}{3}\pi; \pi]$.

4. Дана функция $f(x) = \log_3 x$.

   а) Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{f(x)}{3 - f(x)}} \leqslant 1$.

   б) Решите уравнение $f^2(\frac{x}{2}) = f^2(\sqrt{x+3})$.

   в) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x+2) = f(a - x^2)$ имеет только одно решение.

Контрольные работы для 11-х специализированных классов

Вариант 34 (1990 год)

1. а) Найдите уравнение касательной к графику сложной функции $y = f(g(x))$, где $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-2}{x+5}$, в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

   б) Найдите множество точек действительной оси, над которыми касательная к графику функции $y = (x^2 - 3x + 2)^3$ образует с этой осью острый угол, образует с этой осью тупой угол, параллельна оси.

   в) Найдите уравнения касательных к графику функции $y = -\sqrt{2-x}$, проходящих через точку $A(3, 0)$.

   г) К каждой ветви графика функции $y = \dfrac{2}{x}$ проведено по касательной. Пусть A, B, C и D — точки их пересечения с осями координат (рис. 59). Докажите, что треугольники AOD и BOC подобны.

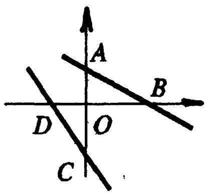

Рис. 59

2. а) Решите уравнение $\sqrt{x-2} = 8 - x$.

   б) Решите неравенство $\dfrac{4 - \sqrt{x-2}}{x-4} \leqslant 1$.

   в) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x} = x^2 + a$?

г) Найдите такое натуральное n, что при всех целых $k \geqslant n$ верно неравенство $\sqrt{4k+1} - 2\sqrt{k} < 0{,}1$.

3. В треугольнике ABC угол C прямой и $AB = 1$. Пусть p — его периметр, а φ — один из его острых углов.

а) Докажите, что $p = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)$.

б) При каком значении угла φ периметр ΔABC равен $\frac{9}{5}$?

в) Найдите множество значений функции $p(\varphi)$.

г) Запишите значение функции p при $\varphi = \frac{\pi}{64}$, не используя тригонометрических функций.

Вариант 35 (1990 год)

1. а) Найдите уравнение касательной к графику сложной функции $y = f(g(x))$, где $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$, в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

б) Найдите множества точек действительной оси, над которыми касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{5 + 4x - x^2}$ образует с этой осью острый угол, образует с этой осью тупой угол, параллельна оси.

в) Найдите уравнение касательных к графику функции $y = x^2 - 3x - 4$, проходящих через точку $A(0, -13)$.

г) К каждой ветви графика функции $y = -\dfrac{2}{x}$ проведено по касательной. Пусть A, B, C и D — точки их пересечения с осями координат (рис. 60). Докажите, что треугольники AOD и BOC равновелики.

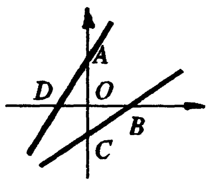

Рис. 60

2. а) Решите уравнение $\sqrt{8-x} = x - 2$.

б) Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{8-x} - 4}{x - 6} \leqslant 1$.

в) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $\sqrt{x^2-4} = a - x^2$?

г) Найдите такое натуральное число k, что неравенство $n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2+n} < 0{,}04$ верно при всех целых $n \geqslant k$.

3. Диагонали в прямоугольнике $ABCD$ равны единице, а φ — угол между ними. Пусть p — полупериметр $ABCD$.

а) Докажите, что $p - 1 = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\varphi}{4}\sin\dfrac{\pi-\varphi}{4}$.

б) При каком φ полупериметр $p = \frac{4}{5}$?

в) Найдите множество значений функции $p(\varphi)$.

г) Запишите значение функции p при $\varphi = \frac{\pi}{32}$, не используя тригонометрических функций.

Вариант 36 (1992 год)

1. а) Известно, что функция f возрастает на луче $(-\infty; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функции $g(x) = f(x^2 - 1)$.

Дана функция $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

б) Найдите уравнение касательных к графику функции h, параллельных прямой, проходящей через точки с абсциссами 1 и 4 на этом графике.

в) Найдите множество значений углов наклона касательных к графику функции h.

г) Найдите уравнение тех касательных к графику данной функции, которые вместе с осями координат образуют треугольник площадью 2/3.

2. а) Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{\sin y}{x} \geqslant 1$.

Дана функция $f(x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 2x$.

б) Решите уравнение $f(x) = 1$.

в) Найдите множество значений функции f.

г) Найдите наибольшую длину промежутка монотонности данной функции.

3. а) Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}$.

б) Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{|x-2|}$.

в) Докажите, что уравнение

$$\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}$$

имеет единственное решение, и найдите его.

г) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (a, b), что уравнение $\sqrt{a^2-x^2}=b+x^2$ имеет решение.

Вариант 37 (1992 год)

1. а) Известно, что функция f убывает на луче $(-\infty; -1]$ и возрастает на луче $[-1; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функции $g(x)=f(1-x^2)$.

Дана функция $h(x)=\dfrac{x^2-2}{x}$.

б) Найдите уравнение касательных к графику функции h, параллельных прямой, проходящей через точки с абсциссами 1 и 4 на этом графике.

в) Найдите множество значений углов наклона касательных к графику функции h.

г) Найдите уравнение тех касательных к графику данной функции, которые вместе с осями координат образуют треугольник площадью $8/3$.

2. а) Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{x}{\sin y}\leqslant 1$.

Дана функция $f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos^2 2x$.

б) Решите уравнение $f(x)=1$.

в) Найдите множество значений функции f.

г) Найдите наибольшую длину промежутка монотонности данной функции.

3. а) Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{x+2}>0$.

б) Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}>\dfrac{1}{|x+2|}$.

в) Докажите, что уравнение

$$\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{3x^2+2x+5}=\sqrt{x^2-3}+\sqrt{3x^2-x-1}$$

имеет единственное решение, и найдите его.

г) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (a, b), что уравнение $\sqrt{a^2-x^2}=x+b^2$ имеет решение.

Вариант 38 (1993 год)

1. а) Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$, параллельной прямой $y - x - 1 = 0$ и проходящей через точку $M(\frac{\pi}{2}, -3\pi)$.
   б) Найдите все общие точки графика $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ и касательной к нему, проходящей через точку $M(0, 18)$.
   в) Не проводя дифференцирования, найдите значение производной функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.
   г) Найдите все такие точки, в которых график функции $y = \arcsin(\sin x)$ не имеет касательной. Ответ обоснуйте.
2. Найдите все такие m, что при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения в указанной области:
   а) $f(x) = \cos mx$, $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$;
   б) $f(x) = x^2 + mx - m^2$, $x \geqslant 1$;
   в) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + (m^2 + 2)x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Дана функция $f(x) = 6 + 4x - x^2$.
   а) Решите уравнение $\sqrt{f(x)} = 4 - x$.
   б) Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)} - 4 + x}{x^2 - 2x} \geqslant 0$.
   в) Решите уравнение $\sqrt{f(\sin x) - 5} = -\cos x$.
4. Дана система уравнений $\begin{cases} x + y = 2\sin\alpha, \\ xy - 1 = \cos\alpha. \end{cases}$
   а) Найдите все α, при которых эта система имеет решение.
   б) При каких α сумма квадратов решений этой системы равна единице?
   в) Найдите множество значений, которые может принимать сумма квадратов решений данной системы.

Вариант 39 (1993 год)

1. а) Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$, параллельной прямой $y + x - 1 = 0$ и проходящей через точку $M(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$.
   б) Найдите все общие точки графика $y = x^3 + 2x$ и касательной к нему, проходящей через точку $M(1, 7)$.
   в) Не проводя дифференцирования, найдите значение производной функции $y = -\sqrt{1 - x^2}$ в точке $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   г) Найдите все такие точки, в которых график функции $y = \arccos(\cos x)$ не имеет касательной. Ответ обоснуйте.

2. Найти все такие m, что при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения в указанной области:
   а) $f(x) = \sin mx$, $x \in [-\frac{\pi}{4}; 0]$;
   б) $f(x) = m^2 + mx - x^2$, $x \leqslant -2$;
   в) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + (2 - m^2)x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Дана функция $f(x) = 9 - 2x - x^2$.
   а) Решите уравнение $\sqrt{f(x)} = x + 3$.
   б) Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)} - x - 3}{1 - x^2} \leqslant 0$.
   в) Решите уравнение $\sqrt{f(\cos x) - 8} = -\sin x$.
4. Дана система уравнений $\begin{cases} x + y = 2\cos\alpha, \\ xy - 1 = -\sin\alpha. \end{cases}$
   а) Найдите все α, при которых эта система имеет решение.
   б) При каких α сумма квадратов решений этой системы равна единице?
   в) Найдите множество значений, которые может принимать сумма квадратов решений данной системы.

Вариант 40 (1994 год)

1. Даны функции $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ и $g(x) = \sqrt{x - 3}$.
   а) Решите уравнение $f(x) + g(x) = 4$.
   б) Решите неравенство $\dfrac{f(x) + g(x) - 4}{2 - g(x)} \geqslant 0$.
   в) При всех m решите неравенство $mf(x) + g(x) \leqslant f(x) + mg(x)$.
   г) Найдите все такие a, для которых неравенство $f(x) \geqslant ag(x)$ верно при всех x из его области определения.
2. Дана функция $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x$.
   а) Докажите, что прямая $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ является касательной к графику функции f.
   б) Докажите, что $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0$ при всех $a, b \geqslant 1$, $a \neq b$.
   в) Для всякого натурального n обозначим через $\mathrm{num}(n)$ число всех целых k, для которых верно неравенство $f(k) \leqslant n$. Докажите, что $\dfrac{\mathrm{num}(n)}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.
3. Дана функция $f(x) = \cos(\pi x)$.
   а) Докажите, что множество рациональных решений уравнения $f(x) = f(x^2)$ совпадает с $\mathbb{Z}$.

б) Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $f^2(x) + f^2(y) = 1$.

в) Сколько решений имеет система $\begin{cases} f(x) = f(y), \\ x^2 + y^2 = 3? \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a:

а) уравнение $x^2 - 2x = |x + a| - 1$ имеет ровно два корня?

б) наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 3\sqrt{a}x^2 - 19a^2 + 94$ на отрезке $[1; 2]$ достигается на его левом конце?

в) существуют ровно две точки на графике функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$, касательные в которых к этому графику параллельны прямой $y = ax$?

Вариант 41 (1994 год)

1. Даны функции $f(x) = \sqrt{x - 3}$ и $g(x) = \sqrt{2x + 2}$.

а) Решите уравнение $f(x) + g(x) = 6$.

б) Решите неравенство $\dfrac{f(x) + g(x) - 6}{4 - f(x)} \geqslant 0$.

в) При всех m решите неравенство $mf(x) + g(x) \geqslant f(x) + mg(x)$.

г) Найдите все такие a, для которых неравенство $f(x) \leqslant ag(x)$ верно при всех x из его области определения.

2. Дана функция $f(x) = x^4 + x$.

а) Докажите, что прямая $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$ является касательной к графику функции f.

б) Докажите, что $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$ при всех $a, b \leqslant -1$, $a \neq b$.

в) Для всякого натурального n обозначим через $\mathrm{num}(n)$ число всех целых k, для которых верно неравенство $f(k) \leqslant n$. Докажите, что $\dfrac{\mathrm{num}(n)}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

3. Дана функция $f(x) = \sin(\pi x)$.

а) Докажите, что множество рациональных решений уравнения $f(x) = f(x^2)$ совпадает с $\mathbb{Z}$.

б) Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $f^2(x) + f^2(y) = 1$.

в) Сколько решений имеет система $\begin{cases} f(x) = f(y), \\ x^2 + y^2 = 3? \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a:
   а) уравнение $x^2 + 2x + |x - a| = 0$ имеет ровно два корня?
   б) наибольшее значение функции $y = 2x^3 + 6\sqrt{a}x^2 + a^2 + 94$ на отрезке $[-3; -2]$ достигается на его правом конце?
   в) существуют ровно две точки на графике функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5$, касательные в которых к этому графику параллельны прямой $y = ax$?

Выпускные экзаменационные работы

Вариант 42 (1990 год)

1. Дана функция $y = 8^x - 3 \cdot 2^x$.
   а) Решите уравнение $y = -2$.
   б) Найдите наименьшее значение функции y.
   в) Решите неравенство $y \leqslant 4^{x+\frac{1}{2}}$.
   г) Сколько на графике функции y пар точек, симметричных друг другу относительно начала координат?
2. Дана функция $y = \cos 2x + \cos x - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$.
   а) Выразите y как функцию от $\cos x$.
   б) Решите уравнение $y = -3$.
   в) Докажите, что при всех значениях x выполняется неравенство $y \leqslant 0$.
   г) Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $y = a$ на отрезке $[0; \pi]$?
3. Множество C точек комплексной плоскости задано уравнением $|iz + 2 + 2i| = 1$.
   а) Нарисуйте множество C.
   б) Найдите такие точки $z \in C$, расстояние от которых до мнимой оси равно $13/5$.
   в) Найдите множество значений $|z|$ при $z \in C$.
   г) Найдите множество значений $\arg z$ в $[0; 2\pi)$ при $z \in C$.
4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна единице. Обозначим: k_1, k_2 — отношения длин двух его ребер к третьему; $S(k_1, k_2)$ — площадь поверхности этого параллелепипеда.
   а) Вычислите $S(k_1, k_2)$.
   б) Докажите, что $S(k_1, k_2) \leqslant 2$ при $k_1 = k_2$.
   в) Пусть $k_1 = 2$. Найдите наибольшее значение S.

г) Пусть $k_1 = ak_2$, a — действительный параметр. При каком значении k_2 площадь S наибольшая?

5. Дана функция $y = x^2$ и точка $B(3, 5)$.
   а) Найдите координаты точек касания с графиком данной функции тех касательных, которые проходят через точку B.
   б) Пусть A — точка касания, у которой меньшая абсцисса, а C — точка на графике с абсциссой $x = 3$. Найдите площадь S треугольника ABC.
   в) Обозначим через s площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезками BC, AB и дугой AC графика данной функции. Покажите, что $s = \frac{2}{3}S$.
   г) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произвольной точки B подграфика данной функции.

Вариант 43 (1990 год)

1. Дана функция $y = 27^x - 4 \cdot 3^{x+1}$.
   а) Решите уравнение $y = -9$.
   б) Найдите наименьшее значение функции y.
   в) Решите неравенство $y \leqslant 0$.
   г) Сколько на графике функции y пар точек, симметричных друг другу относительно начала координат?
2. Дана функция $y = 4\sin^2 x + \cos 4x$.
   а) Выразите y как функцию от $\cos 2x$.
   б) Решите уравнение $y = 1$.
   в) Найдите область значений функции y.
   г) Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $y = a$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$?

Задачи 3, 4, 5 — см. вариант 42.

Вариант 44 (1990 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 42.

3. Дана функция $y = \frac{1}{2}x^2$.
   а) Найдите точки пересечения графика этой функции и прямой, проходящей через точку $M_0(0, \frac{3}{2})$ параллельно биссектрисе первого координатного угла.
   б) Найдите площадь сегмента, ограниченного отрезком этой прямой и дугой графика между точками ее пересечения с этим графиком.

Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку M, и обозначим x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ абсциссы точек ее пересечения с графиком данной функции.

в) Покажите, что площадь S соответствующего сегмента может быть найдена по формуле $S = \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3$.

г) Найдите наименьшее значение площади S.

4. Множество C точек комплексной плоскости задано уравнением $|1 - (i+1)z| = |i(z-1)+3|$.

а) Нарисуйте множество C.

б) Найдите такие точки $z \in C$, расстояние от которых до вещественной оси равно трем.

в) Найдите множество значений $|z|$ при $z \in C$.

г) Найдите множество значений $\arg z$ в $[0; 2\pi)$ при $z \in C$.

Вариант 45 (1990 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 43.

3. Дана функция $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}$.

а) Найдите уравнение той касательной к графику данной функции, которая проходит через точку его пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

б) Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от первого координатного угла.

в) Пусть точка $M(x_0, y_0)$, где $x_0, y_0 > 0$, лежит на графике данной функции. Найдите площадь S треугольника, который отсекается от первого координатного угла касательной к этому графику, проходящей через точку M, и покажите, что $S = \dfrac{9}{x_0 y_0}$.

г) Найдите наименьшее возможное значение площади S.

Задача 4 — см. задачу 3 варианта 42.

Вариант 46 (1991 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_2^3 x - 3\log_2^2 x$.

а) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.

б) Решите уравнение $f(x) = -4$.

в) Выясните, при каких значениях a неравенство $f(x) < a\log_2 x$ выполняется при всех x из отрезка $[2; 4\sqrt{2}]$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a.

2. Дана функция $f(x) = \sin x \sin 3x$.
   а) Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.
   б) Найдите наименьшее положительное решение системы

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ \cos 5x = 1. \end{cases}$$

   в) Найдите область значений функции f.
   г) Пусть $g(t)$ — наименьшее значение f на отрезке $[t; t + \frac{\pi}{2}]$. Найдите наибольшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

3. Даны три комплексных числа: $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3i)$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.
   а) Найдите расстояние от точки z_1 до фигуры, задаваемой уравнением $|z - z_3| = 1$.
   б) Изобразите множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z_2 z - z_1 z_2| = |z_3 z - z_2 z_3|$.
   в) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_2, z_3, а U и V — множества точек, которые пробегают при этом $u = z_2 z$ и $v = z_3 z$. Изобразите пересечение множеств U и V.
   г) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_1, z_3. Изобразите множество всех точек, которое пробегает при этом $w = z^2$.

4. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Точки пересечения прямой $x = m$ с графиком функции f и осью абсцисс обозначаются соответственно $A(m)$ и $B(m)$, касательная к графику в точке $A(m)$ обозначается $l(m)$.
   а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямой $x = m$, равна $\frac{2}{3} m f(m)$.
   б) Пусть C — точка пересечения прямой $l(m)$ с осью абсцисс. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника AOC и прямолинейного ABC.
   в) Пусть M и N — точки графика функции f, такие, что прямая MN параллельна $l(4)$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой MN, осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек M и N, не превосходит 32.
   г) Пусть $y = g(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0; +\infty)$, такая, что $g(4) = 2$ и при любом $m \geqslant 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции f,

осями координат и прямой $x = m$, равна $\frac{2}{3}mg(m)$. Докажите, что $g(x) = \sqrt{x}$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n - 3$ при всех $n \in \mathbb{N}$.
   а) Докажите, что если a — целое, то x_n — нечетное число при всех $n \geqslant 2$.
   б) Выясните, при каком значении a последовательность $\{x_n\}$ является стационарной.
   в) Выясните, при каких значениях a последовательность $\{x_n\}$ является геометрической прогрессией.
   г) Пусть $a = 4$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

Вариант 47 (1991 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_3^3 x - 5\log_3^2 x + 8\log_3 x$.
   а) Решите неравенство $f(x) < 0$.
   б) Решите уравнение $f(x) = 4$.
   в) Выясните, при каких значениях a неравенство $f(x) > a\log_3 x$ выполняется при всех x из множества $[27; +\infty)$.
   г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a.
2. Дана функция $f(x) = \cos x \cos 3x$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -\frac{1}{2}$.
   б) Найдите наименьшее положительное решение системы

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

   в) Найдите область значений функции f.
   г) Пусть $g(t)$ — наибольшее значение f на отрезке $[t; t + \frac{\pi}{2}]$. Найдите наименьшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

Задачи 3, 4, 5 — см. вариант 46.

Вариант 48 (1991 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 46.

3. Пусть z — комплексное число, $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ — соответствующие точки плоскости.
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то треугольник ABC равнобедренный.
   б) Найдите все такие z, что треугольник ABC равносторонний.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек z, при которых треугольник ABC равнобедренный.
   г) Среди всех z, таких, что $|z| = 1$, найдите те, при которых площадь треугольника ABC наибольшая.

Задача 4 — см. вариант 46.

Вариант 49 (1991 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 47.

3. Пусть z — комплексное число, $A(z^2)$, $B(z^3)$, $C(z^4)$ — соответствующие точки плоскости.
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то треугольник ABC равнобедренный.
   б) Найдите все такие z, что треугольник ABC равносторонний.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек z, при которых треугольник ABC равнобедренный.
   г) Среди всех z, таких, что $|z| = 1$, найдите те, при которых площадь треугольника ABC наибольшая.
4. Дана функция $f(x) = x^2$. Точки пересечения прямой $x = m$ с графиком функции f и осью абсцисс обозначаются соответственно $A(m)$ и $B(m)$, касательная к графику в точке $A(m)$ обозначается $l(m)$.
   а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямой $x = m$, равна $\frac{1}{3}mf(m)$.
   б) Пусть C — точка пересечения прямой $l(m)$ с осью ординат. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника AOC и прямолинейного ABC.
   в) Пусть M и N — такие точки графика функции f, что прямая MN параллельна $l(2)$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой MN, осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек M и N, не превосходит 32.
   г) Пусть $y = g(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0; +\infty)$, такая, что $g(2) = 4$ и при любом

$m \geqslant 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции g, осями координат и прямой $x = m$, равна $\frac{1}{3}mg(m)$. Докажите, что $g(x) = x^2$.

Вариант 50 (1992 год)

1. Дана функция $f(x) = \lg(1/x)\lg(10^5 x)\lg(x/10^3)$.
   а) Решите неравенство $f(x) \leqslant 0$.
   б) Решите уравнение $f(x) = f(1/x)$.
   в) При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два различных корня?
   г) Пусть $n(b)$, где $b > 0$ и $b \neq 1$, — число различных корней уравнения $f(x) = f(bx)$. Постройте график функции n.

2. Даны функции $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$.
   а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.
   б) Пусть $A(m)$ и $B(m)$ — это точки пересечения прямой $x = m$ с графиками функций f и g. При каких m длина отрезка с концами в этих точках равна единице?
   в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции f, а середина совпадает с точкой $M(\frac{7\pi}{6}, \frac{3}{4})$?
   г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции f.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = nx_{n-1} - 1$, а $x_0 = c$.
   а) Докажите, что если $c \leqslant 1$, то данная последовательность монотонна.
   б) Докажите, что если $c > 2$, то при всех натуральных n верно неравенство $|x_n/n!| \leqslant c$.
   в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она стремится к нулю.
   г) Докажите, что если число c рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

4. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z — комплексное число).
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O — начало координат).
   б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ комплексной плоскости.

в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.

г) При каком значении z, где $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

5. Назовем расстоянием между точками поверхности параллелепипеда длину кратчайшей ломаной на его поверхности, соединяющей эти точки. Пусть E и W — противоположные вершины параллелепипеда.

а) Найдите расстояние между вершинами E и W единичного куба.

б) При каких значениях a и b расстояние между вершинами E и W прямоугольного параллелепипеда единичного объема с длинами ребер a, a, b будет наименьшим?

в) Докажите, что расстояние между любыми парами точек поверхности единичного куба не превосходит расстояния между точками E и W.

г) Найдите длины ребер прямоугольного параллелепипеда единичного обьема, расстояние между вершинами E и W которого принимает наименьшее значение.

Вариант 51 (1992 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_2 x \log_{1/2} \frac{1}{2^7 x} \log_4 \frac{x^2}{2^{16}}$.

а) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.

б) Решите уравнение $f(x) = f(1/x)$.

в) При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два различных корня?

г) Пусть $n(b)$, где $b > 0$ и $b \neq 1$, — число различных корней уравнения $f(x) = f(bx)$. Постройте график функции n.

2. Даны функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos 2x$.

а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми $x = \pi$ и $x = \frac{7\pi}{6}$.

б) Пусть $A(m)$ и $B(m)$ — точки пересечения прямой $x = m$ с графиками функций f и g. При каких m длина отрезка с концами в этих точках равна единице?

в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции f, а середина совпадает с точкой $M(\frac{13\pi}{12}, \frac{1}{4})$?

г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции f.

Задачи 3–5 — см. вариант 50.

Вариант 52 (1992 год)

Задачи 1,2 — см. вариант 51.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = nx_{n-1} + 2$, а $x_0 = c$.
   а) Докажите, что если $c \geqslant -2$, то данная последовательность монотонна.
   б) Докажите, что если $c < -4$, то при всех натуральных n верно неравенство $|x_n/n!| \leqslant -c$.
   в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она стремится к нулю.
   г) Докажите, что если число c рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.
4. Пусть $A(3z+2)$, $B(2z+3)$, $C(3z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z — комплексное число).
   а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O — начало координат).
   б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, -1 и $3z + 2$ комплексной плоскости.
   в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.
   г) При каком значении z, где $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

Вариант 53 (1993 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2 - 2x)$.
   а) Пусть $a = -2$. Решите уравнение $f(x) = 1$.
   б) Пусть $a = -3$. Решите неравенство $f(x) \leqslant -1$.
   в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар (x, a), что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?
   г) Найдите все такие $a > -2$, при которых для любого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.
2. Дана функция $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$, $x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -1$.
   б) Найдите наибольшую длину промежутка монотонности функции f.
   в) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = a$?

г) Рассмотрим тело, ограниченное плоскостями $x = -\pi$, $x = \frac{\pi}{2}$ и поверхностью, получаемой при вращении графика функции f вокруг прямой $y = m$ (лежащей в плоскости Oxy). При каком m объем этого тела будет наименьшим?

Задачи 3–5 — см. вариант 2.

Вариант 54 (1993 год)

Задачи 1,2 — см. вариант 53.

3. Дана функция $f(x) = 6x^2 - x^3$.
   а) Докажите, что фигуры, ограниченные отрезками горизонтальных касательных к графику функции f и дугами этого графика между точками его пересечения с касательными, имеют равные площади.
   б) Докажите, что график функции f симметричен относительно точки $A(2, 16)$.
   в) Докажите, что прямая, касающаяся графика функции f в точке с абсциссой x_0, не равной двум, пересечет этот график еще в одной точке. Найдите абсциссу этой точки.
   г) Докажите, что прямая, пересекающая график функции f в трех точках, одна из которых является серединой отрезка между двумя другими, проходит через точку A.
4. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество комплексных чисел, модуль которых равен единице.
   а) Докажите, что все решения уравнения $z^8 - z^4 + 1 = 0$ принадлежат множеству $\mathcal{S}$.
   б) Найдите все решения уравнения $3z^4 - iz^3 + 3iz + 1 = 0$, которые принадлежат $\mathcal{S}$.
   в) Найдите все действительные a, при которых уравнение $z^5 + z = a$ имеет решения из $\mathcal{S}$.
   г) Найдите все значения $c \in \mathcal{S}$, при которых уравнение $z^5 + z = c$ имеет решения из $\mathcal{S}$.

Вариант 55 (1994 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_2 x + \log_{2x} x$.
   а) Докажите, что числа x и $\frac{1}{4x}$ входят (либо не входят) в область определения функции f одновременно и $f(\frac{1}{4x}) = -f(x)$.
   б) Решите уравнение $|f(x)| = f(2)$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на луче $[1; +\infty)$.

г) Найдите все такие a, при которых уравнение $f(x) = a\log_2^2 2x$ имеет три решения.

2. Дана функция $f(x) = \cos ax + \cos 2ax$.

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все такие a, при которых $f(\frac{\pi}{2}) > 0$.

в) Найдите все такие a, при которых $f(x) > 0$ при всех $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

г) Найдите все такие a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

3. Дана функция $f(x) = ax - 2\sqrt{x+1}$, $a > 0$.

а) Найдите все такие a, при которых функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$.

б) Пусть $a = 1$. Найдите уравнения касательных к графику данной функции, проходящих через точку $A(5, 0)$.

в) Пусть $a = 1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f.

г) Найдите (при произвольном $a > 0$) такое значение x_0, при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции f в точке с абсциссой x_0, самим этим графиком и прямыми $x = -1$, $x = 2$, имеет наименьшую площадь.

4. Пусть a, b, c — длины некоторых отрезков.

а) Докажите, что если $a = \sqrt[6]{2}, b = \sqrt[6]{3}, c = \sqrt[6]{7}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.

б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a = 19^{21}$, $b = 20^{21}$, $c = 21^{21}$.

в) Докажите, что если для любого натурального числа n существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n, то все эти треугольники равнобедренные.

г) Пусть φ_n — угол треугольника со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[n]{2}$, $c = \sqrt[n]{4}$ $(n \geqslant 2)$, лежащий против средней из них. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

5. Пусть $A(i-1)$, $B(2i-1)$, $C(2-3i)$ — точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам, $\mathcal{S}$ — окружность $|z| = 1$, а $\mathcal{D}$ — множество комплексных чисел, заданное неравенством $|2z - 1| \leqslant 1$.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки $P \in \mathcal{S}$ до точек A, B, C постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки A, B и множество комплексных чисел вида $z(2i-1)+(1-z)(i-1)$, где $z \in \mathcal{D}$.

в) Найдите такую точку $E \in \mathcal{D}$ и все такие равносторонние треугольники с вершинами на $\mathcal{S}$, для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до E наибольшая.

г) Выясните, верно ли, что для всякой точки w, лежащей в треугольнике ABC, найдется такое число $z \in \mathcal{D}$, что $w = zz_k + (1-z)z_j$, где $z_k, z_j \in \{i-1, 2i-1, 2-3i\}$.

Вариант 56 (1994 год)

1. Дана функция $f(x) = \log_{x/3} x - \log_3 x$.

а) Докажите, что числа x и $\frac{9}{x}$ входят (либо не входят) в область определения функции f одновременно и $f(\frac{9}{x}) = -f(x)$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f(\frac{1}{3})$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на промежутке $(0; 1]$.

г) Найдите все такие a, при которых уравнение $f(x) = a\log_3^2 \frac{x}{3}$ имеет три решения.

2. Дана функция $f(x) = \cos ax - \cos 2ax$.

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все такие a, при которых $f(\pi) > 0$.

в) Найдите все такие a, для которых $f(x) > 0$ при всех $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

г) Найдите все такие a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

Задачи 3–5 — см. вариант 55.

Вариант 57 (1994 год)

Задачи 1, 2 — см. вариант 56.

3. Дана функция $f(x) = ax - 2\sqrt{3-x}$, $a < 0$.

а) Найдите все a, для которых функция f монотонна на луче $(-\infty; -1]$.

б) Пусть $a = -1$. Найдите уравнения касательных к графику функции f, проходящих через точку $A(-7, 0)$.

в) Пусть $a = -1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f.

г) Найдите (при произвольном $a < 0$) такое значение x_0, при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции f в точке с абсциссой x_0, самим этим графиком и прямыми $x = -1$, $x = 2$, имеет наименьшую площадь.

4. Пусть a, b, c — длины некоторых отрезков.
   а) Докажите, что если $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{4}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.
   б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a = 19^{20}$, $b = 20^{20}$, $c = 21^{20}$.
   в) Докажите, что для любого натурального числа $n > 8$ существует треугольник со сторонами $(n-1)^4$, n^4, $(n+1)^4$ и почти все эти треугольники (т. е. кроме их конечного числа) остроугольные.
   г) Пусть φ_n — угол треугольника со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[n]{3}$, $c = \sqrt[n]{9}$ $(n \geqslant 2)$, лежащий против меньшей стороны. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

Вариант 58 (1995 год)

1. Дана функция $f(x) = \sqrt{\log_2 x}$.
   а) Решите уравнение $f\left(2x^2 + \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{2}{x}\right) = f\left(4x + \dfrac{1}{x}\right)$.
   б) Решите неравенство $f\left(\dfrac{4 - x^2}{1 + x^2}\right) \leqslant f\left(\dfrac{7}{2} - x\right)$.
   в) Решите уравнение $f(2x^a) = f(4x)$ при всех $a \in \mathbb{R}$.
   г) Числа a, b, c образуют возрастающую геометрическую прогрессию $(a \geqslant 1)$. Докажите, что
$$\frac{\sqrt{2}}{c-a}\int_a^c f(x)\,dx \geqslant f(b).$$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x}$.
   а) Пусть $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. Решите уравнение $f(x) = 4$.
   б) При тех же значениях a и b решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.
   в) Пусть $a = 1$. Найдите все такие значения b, что данная функция убывает на интервале $(0; \frac{\pi}{3})$.
   г) Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 1$ имеет ровно три решения на отрезке $[0; 2\pi]$ тогда и только тогда, когда $a^{2/3} + b^{2/3} = 1$.

3. Дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$, $a_1 = c > 0$.

   а) Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $\sqrt{2} \leqslant \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 2$.

   б) Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ убывает, и вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   в) Пусть $c = 1$. Докажите, что все числа a_n, $n \geqslant 2$, иррациональные.

   г) Пусть $c = 2$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = 2\pi$.

4. Пусть $A(u)$, $B(v)$, $C(w)$ — точки плоскости, изображающие комплексные числа u, v, w.

   а) Пусть $u = 0$, $v = 1+i$. Найдите все такие w, что треугольник ABC равносторонний.

   б) Пусть $u = 0$, $v = 1+2i$, а число w является корнем уравнения $z^2 = (1 + 2i)z + 3 - 4i$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

   в) Известно, что треугольник ABC равносторонний. Могут ли действительные и мнимые части всех чисел u, v и w быть рациональными одновременно?

   г) Докажите, что если $u^2+v^2+w^2 = uv+vw+wu$, то треугольник ABC равносторонний.

5. Дана функция $f(x) = 4+ax-x^2$, прямая ℓ, заданная уравнением $y = 2x + 8$, и точка $A(0, 4)$.

   а) Найдите все значения a, при которых прямая ℓ касается графика функции f.

   б) Пусть P и Q — точки касания прямой ℓ с графиками $y = f(x)$ (при найденных в предыдущем пункте значениях a). Вычислите площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком PQ и дугами AP, AQ этих графиков.

   в) Пусть $a = 2$. Найдите точку графика функции f, ближайшую к точке $M(-3, \frac{3}{2})$.

   г) Найдите наименьшее значение площади сегмента, ограниченного графиком функции f и осью абсцисс.

Вариант 59 (1995 год)

1. Дана функция $f(x) = \sqrt{\log_3 x}$.

   а) Решите уравнение $f\left(2x - \dfrac{1}{x}\right) + f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)$.

   б) Решите неравенство $f\left(\dfrac{5-2x^2}{2+x^2}\right) \leqslant f\left(\dfrac{2x+7}{4}\right)$.

   в) Решите уравнение $f(\sqrt{3}x^a) = f\left(\dfrac{9}{x}\right)$ при всех $a \in \mathbb{R}$.

   г) Числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию ($a \geqslant 1$). Докажите, что
$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,dx \leqslant f(b).$$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{a}{\cos x} - \dfrac{b}{\sin x}$.

   а) Пусть $a = \sqrt{3}$, $b = 1$. Решите уравнение $f(x) = 4$.

   б) При тех же значениях a и b решите неравенство $f(x) \leqslant 0$.

   в) Пусть $a = 3$. Найдите все такие значения b, что данная функция убывает на интервале $(\frac{5\pi}{6}; \pi)$.

   г) Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 8$ имеет ровно три решения на отрезке $[0; 2\pi]$ тогда и только тогда, когда $a^{2/3} + b^{2/3} = 4$.

Задачи 3–5 — см. вариант 58.

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ

Вариант 5

1. а) *Ответ* — см. рис. 61. Имеем: $x^2y+xy^2-2xy = xy(x+y-2) = 0$. Полученное уравнение задает объединение осей координат и прямой $x + y - 2 = 0$, разбивающих плоскость на семь областей, каждая из которых или целиком входит в решение неравенства, или нет (см. решение задачи 1 в разделе «Логика, геометрия и анализ в алгебраических задачах»).

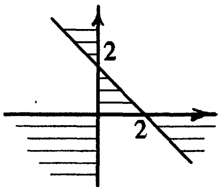

Рис. 61

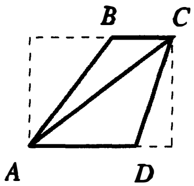

Рис. 62

б) $(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
в) Умножив на 4, получим неравенства $9 < 4\log_2 5 < 10$, которые верны, поскольку $2^9 = 512 < 625 = 5^4 < 1024 = 2^{10}$.
г) Поскольку высоты треугольников (рис. 62), опущенные на параллельные стороны трапеции, равны, то из равенства площадей треугольников следует равенство их оснований, значит, $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $BC = 5$ см и $CD = 15$ см.

2. Нарисуем график функции f. Поскольку уравнение $y^2 = 4x - x^2$ задает на плоскости окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$, а $f(x) \geqslant 0$ и f — четная функция, то график f состоит из двух полуокружностей, как это изображено на рис. 63. Теперь ответы на вопросы очевидны.

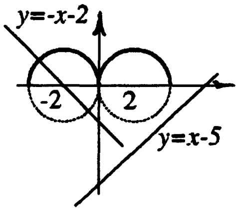

Рис. 63

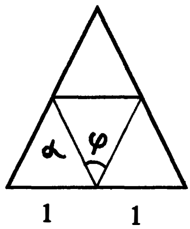

Рис. 64

а) $-2-\sqrt{2}$. **б)** $[-4;4]$. **в)** Три решения при $a=0$, четыре — при $0<a<2$ и два, если $a=2$. В остальных случаях решений нет.

3. а), б) Обозначив через a боковую сторону равнобедренного треугольника (рис. 64), по теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi-\varphi}{2}\right)}$, откуда $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)}$ и $S(\varphi)=\dfrac{a^2}{2}\sin\varphi=\dfrac{3\sin\varphi}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)}$.

в) Чтобы упростить исследование функции $S(\varphi)$, удобно сделать замену $t=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\in(0;+\infty)$:

$$S(\varphi)=\frac{3\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\left(\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}=\frac{3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1\right)^2}=$$
$$=\frac{t\sqrt{3}}{(t+1)^2}=g(t),\quad t>0,$$

откуда $\max g(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. а) График функции f изображен на рис. 65, и искомая площадь равна $\int_0^1\sqrt{x}dx+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.

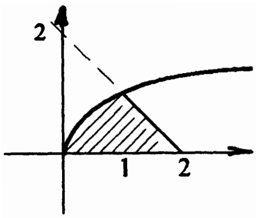

Рис. 65

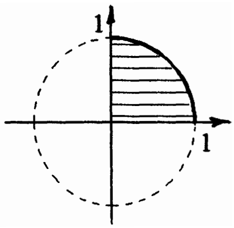

Рис. 66

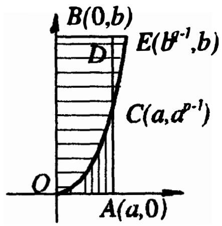

Рис. 67

б) Поскольку уравнение $y=\sqrt{1-x^2}$ задает верхнюю полуокружность с радиусом 1 (рис. 66), то данный интеграл равен четверти площади круга, т. е. $\frac{\pi}{4}$.

в) Прежде всего заметим, что функции $f(x)=x^{p-1}$ и $g(x)=x^{q-1}$ являются взаимно обратными, поэтому первый интеграл равен площади криволинейного треугольника OAC (рис. 67), второй — площади OBE, а объединение этих двух фигур содержит прямоугольник $OADB$, площадь которого равна ab. Равенство имеет место, если точки E и C совпадают, т. е. при $a=b^{q-1}$.

Собственно говоря, методическая идея построения данной задачи состояла в том, чтобы подвести учащихся к решению пункта в).

Вариант 6

1. а) $\sin(x+y) < 0$, если $\pi + 2\pi k < x + y < 2\pi + 2\pi k$. Аналогично определяем знак $\sin(x-y)$. Решение неравенства изображено на рис. 68 — “бесконечная шахматная доска”.

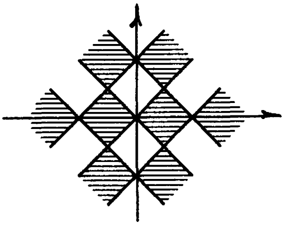

Рис. 68

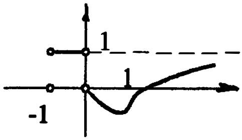

Рис. 69

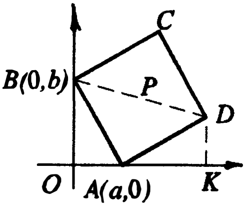

Рис. 70

б) $-2; -1$.

в) *Ответ:* см. рис. 69. Функция f, график которой нам задан, не имеет производной при $x = -1; 0$. Так как она постоянна при $x < -1$, то ее производная на этом луче равна нулю, а $f'(x) = 1$ при $x \in (-1; 0)$. Поскольку f убывает на интервале $(0; 1)$, то здесь ее производная $f' < 0$. Далее, $f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 1$ и, поскольку f выпукла вниз и имеет прямую $y = x - 1$ своей асимптотой, то $f'(x)$, возрастая, стремится к единице.

г) Поскольку (рис. 70) $DK = OA$ и $AK = OB$, то координаты точки D будут $(a+b, a)$, а так как центр P квадрата — это середина отрезка BD, то его координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, значит, P лежит на прямой $y = x$. Координаты точки C — $(b, a+b)$.

2. а) πk; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. б) Решений нет при $a < 0$, $a > \frac{9}{8}$, одно решение при $a = \frac{9}{8}$, $a \in [0; 1)$, два решения при $a \in [1; \frac{9}{8})$. **в)** $[-2; \frac{9}{8}]$.

3. б) Произведение площадей несмежных прямоугольников (обозначения — на рис. 71) равно $ax \cdot by = ab \cdot xy \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

в) Имеем: $1 \geqslant x^2 + xy + y^2 \geqslant 3xy$, значит, $xy \leqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается при $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Будет решать более общую задачу, предполагая что функция f монотонно возрастает на $[0; 1]$, имеет производную на этом

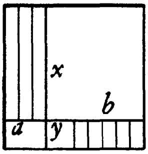

Рис. 71

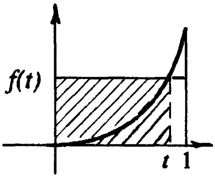

Рис. 72

отрезке и $f(0)=0$. Имеем (рис. 72):

$$S(t)=\int_0^t (f(t)-f(x))\,dx+\int_t^1 (f(x)-f(t))\,dx=$$
$$=(2t-1)f(t)-\int_0^t f(x)dx+\int_t^1 f(x)dx$$

(если $f(x)=x^2$, то $S(t)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$). Дифференцируя, получаем $S'(t)=2f(t)+(2t-1)f'(t)-f(t)-f(t)=(2t-1)f'(t)$, значит, $t=\frac{1}{2}$ — точка минимума функции S.

Вариант 7

1. **а)** *Ответ:* 10; 100. Сделав замену $t=2^{\lg x}=x^{\lg 2}$, получим $t=2; 4$. **б)** См. рис. 73.

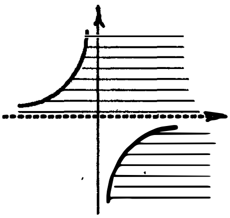

Рис. 73

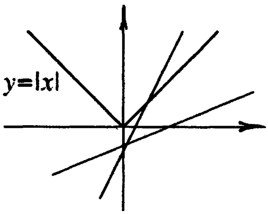

Рис. 74

в) Данная функция имеет непрерывную производную, которая была бы ограниченной, если бы f (а значит, и f') являлась периодической функцией. Однако ясно, что $f'(x)=-2x\sin(x^2)$ не ограничена, поскольку $f'\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)=2\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$.

Другой подход: $\cos(x^2)=1$, если $x=\pm\sqrt{2\pi k}$. Попробуйте доказать, что множество $\left\{\pm\sqrt{2\pi k}\mid k=0,1,\dots\right\}$ не переходит в себя ни при каком сдвиге $x\mapsto x+T$ числовой прямой.

г) *Ответ:* $|a| > 1$. Геометрическая идея: прямая $y = ax + b$ пересечет график функции $y = |x|$ при любом b в том и только том случае, если она идет круче, чем этот график (рис. 74).

2. **а)** $2\pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** $[-\frac{5}{4}; 5)$. **в)** Одно решение при $a \leqslant -1$, $a \geqslant 5$, два — при $a \in (-1; 5)$.

3. Точка $P(x, y)$ входит в множество значений отображения f тогда и только тогда, когда имеет решение система

$$\begin{cases} u + v = x, \\ 2uv = y, \end{cases}$$

т. е. когда разрешимо уравнение $u^2 - ux + \frac{1}{2}y = 0$, значит, $x^2 - 2y \geqslant 0$.

а) *Ответ:* 0; 1; 2. Точка A не имеет прообраза. Прообраз B — точка $(1, 1)$, а прообраз C состоит из двух точек. **б)** См. рис. 75.

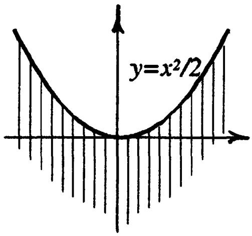

Рис. 75

в) Точки $P(c, t)$ и $Q(t, c)$ лежат на прямых $u = c$ и $v = c$ соответственно и переходят при отображении f в точку $(c + t, 2ct)$, лежащую на прямой $y = 2c(x - c)$, касающейся параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ в точке $(2c, 2c^2)$.

4. **а)** Положим для краткости $\alpha = \arccos x$. $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n + 1)\alpha) + \cos((n - 1)\alpha) = 2\cos\alpha\cos n\alpha = 2\cos(\arccos x)T_n(x) = 2xT_n(x)$.

б) Доказательство проводится методом математической индукции с использованием рекуррентного соотношения, выведенного в предыдущем пункте.

в) Имеем: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$, $\max\{|T_2(x)| \mid |x| \leqslant 1\} = 1$, следовательно, надо доказать, что при любых a, b верно неравенство $\max\{|x^2 + ax + b| \mid |x| \leqslant 1\} \geqslant \frac{1}{2}$.

Далее, имеем: $|P(1) - P(0)| = |a+1|$, $|P(-1) - P(0)| = |a-1|$. Поскольку при всех a справедливо неравенство $|a+1|+|a-1| \geqslant 2$, то хотя бы одно из этих чисел не меньше единицы. Если $|a+1| = |P(1)-P(0)| \geqslant 1$, то хотя бы одно из чисел $|P(1)|$, $|P(0)|$ не меньше $\frac{1}{2}$.

Вариант 8

1. а) $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) *Ответ:* — на рис. 76. Точка с координатами (x, y) является серединой отрезка, концы которого лежат на кривой $y = x^3$, тогда и только тогда, когда найдутся такие числа a и b, что

$$\begin{cases} a + b = 2x, \\ a^3 + b^3 = 2y. \end{cases}$$

Исключая очевидное решение $a = -b$, приходим к уравнению $3a^2 - 6xa + 4x^2 - \frac{y}{x} = 0$, которое разрешимо при $\frac{y}{x} \geqslant x^2$.

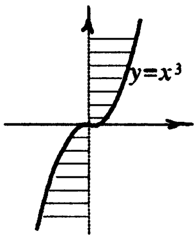

Рис. 76

в) ± 1. **г)** $b \geqslant 0$ — см. предыдущий вариант.

2. а) $[-1; 3)$. **б)** $(-\infty; 5/4]$.

в) Рассмотрим функцию $g(t) = -t^2 + t + 1$, которая связана с f соотношением $f(x) = g\left(\sqrt{x+1}\right)$. Имеется взаимно однозначное соответствие $t \leftrightarrow \sqrt{x+1}$ между положительными решениями уравнения $|f(x)| = a$ и решениями уравнения $|g(t)| = a$, лежащими на луче $(1; +\infty)$. График $|g(t)|$ для $t \geqslant 0$ изображен на рис. 77, откуда и получаем ответ: уравнение имеет один корень при $a = 0$, $a \geqslant 1$ и два — при $a \in (0; 1)$.

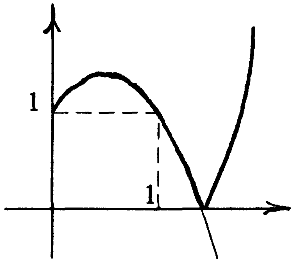

Рис. 77

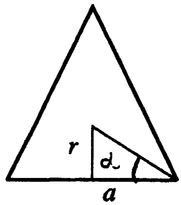

Рис. 78

3. а) Пусть a — длина основания данного треугольника (рис. 78). По теореме синусов $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, далее, $r = \frac{1}{2}a\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$, поэтому $\frac{r}{R} = \sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4} \overset{\text{def}}{=} f(\alpha)$, $\alpha \in (0;\pi)$.

б) Исследуя найденную в предыдущем пункте функцию f, получим, что она принимает наибольшее значение при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

в) Имеем: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{p}$, здесь $p = a+b+c$ — периметр треугольника, так что $\frac{r}{R} = \frac{8S^2}{abcp} = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$. Далее, $\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leqslant \frac{1}{2}((a+b-c)+(b+c-a)) = b$; применяя аналогичные неравенства, получим, что $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$, причем равенство имеет место лишь в случае, когда $a+b-c = b+c-a = c+a-b$, т. е. при $a=b=c$.

4. а) $2(ax+by)-(a+b)(x+y) = ax+by-ay-bx = (y-x)(b-a) \geqslant 0$.

б) По индукции:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}\right) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a_{n+1}b_{n+1} + na_{n+1}b_{n+1} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i - a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant$$

$$\geqslant na_{n+1}b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_ib_i - b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} b_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} a_{n+1}(b_{n+1} - b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (b_{n+1} - b_i)(a_{n+1} - a_i) \geqslant 0.$$

в) Первое решение: поскольку f возрастает на $[0; 1]$, то при всех $x \in [0; \frac{1}{2}]$ имеем $f(x)(1-2x) \leqslant f(1-x)(1-2x) = h(x) = g(1-x)$, где $g(x) = f(x)(2x-1)$, $x \in [\frac{1}{2}; 1]$. Далее, так как подграфики функций h и g симметричны, то они имеют одинаковую площадь, значит, $\int_{1/2}^{1} f(x)(2x-1)dx = \int_{1/2}^{1} g(x)dx = \int_0^{1/2} h(x)dx \geqslant \int_0^{1/2} f(x)(1-2x)dx$, откуда и получаем требуемое неравенство.

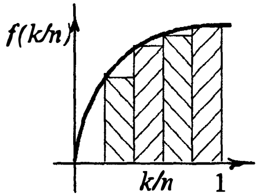

Рис. 79

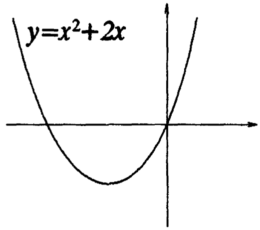

Рис. 80

Второе решение (рис. 79): $2\int_0^1 xf(x)dx \geqslant \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant$ (в силу неравенства предыдущего пункта) $\geqslant \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ $= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n} \geqslant \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(1)}{n}$. В силу произвольности n отсюда следует требуемое неравенство.

Вариант 9

1. а) Пусть $p(x) = ax^2 + bx + c$. Так как $a + b + c = p(1)$, то $ap(1) < 0$, значит парабола, являющаяся графиком функции p, пересечет ось абсцисс в двух разных точках. Обратное утверждение неверно, пример — на рис. 80.

б) *Ответ:* $\frac{1}{2} + 2k; k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из цепочки

$$1 = \sin^{19}(\pi x) + \cos^{92}(\pi x) \leqslant \sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x) = 1$$

следует, что $\sin^{19}(\pi x) = \sin^2(\pi x)$ и $\cos^{92}(\pi x) = \cos(\pi x)$, т. е. $\sin(\pi x) = 1$ или $\cos(\pi x) = \pm 1$.

в) *Ответ* — на рис. 81, где изображено множество пар (a, b), заданное неравенством $|b| \geqslant |a|$, так как производная $y' = a\cos x - b$ данной функции должна сохранять знак на всей оси.

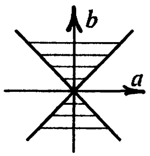

Рис. 81

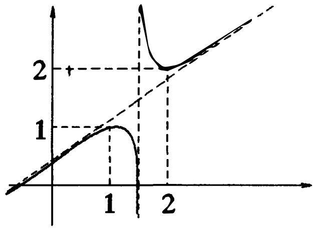

Рис. 82

г) *Ответ:* $-(x_1+x_2)$. Абсциссы точек пересечения прямой $y = kx+b$ с графиком функции $y = x^3 - 19x + 92$ являются корнями уравнения $x^3 - (k+19)x + 92 - b = 0$, следовательно, их сумма равна нулю.

2. а) *Ответ:* $[0; \frac{9}{4})$. Сделав замену $t = \sqrt{x}$, получим неравенство $\frac{t^2-2}{2t-3} \leqslant 1$, которое можно решить стандартным методом, однако с некоторой целью построим график функции, заданной формулой $f(t) = \frac{t^2-2}{2t-3}$ (рис. 82). Ясно, что неравенство $f(t) \leqslant 1$ выполняется при $t < \frac{3}{2}$, значит, $0 \leqslant x < \frac{9}{4}$.

б) *Ответ:* $(0;1) \cup (1; 2\sqrt{2}) \cup \{4\}$. Замена $t = \log_2 x$ приводит к неравенству $\frac{t-2/t}{2-3/t} \leqslant 2$ или $\frac{t^2-2}{2t-3} \leqslant 2$, где $t \neq 0$, т. е. к неравенству, в правой части которого стоит значение $f(t)$ (см. пункт а)). Из графика функции f (рис. 82) получаем, что $t < \frac{3}{2}$ или $t = 2$ или $t \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{3}{2}) \cup \{2\}$, откуда и следует ответ.

в) Аналогично предыдущим пунктам, сделав замену $t = 2\cos x$, получим уравнение $t^2 - 2 = k(2t-3)$ или $f(t) = k$. Множеством значений $\{f(t)\}$ при $|t| \leqslant 2$ является объединение лучей $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ (рис. 82), которое содержит все целые числа.

3. а) *Ответ:* $p_n = \dfrac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$. Действительно,

$$p_n \sin\frac{\alpha}{2^n} = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}} = \ldots = \frac{1}{2^n}\sin\alpha.$$

б) *Ответ:* $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, так как $\dfrac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

в) В силу предыдуших пунктов имеем формулу

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}},$$

подставив в которую $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получим формулу Виета, поскольку нетрудно видеть, что

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

(n квадратных корней).

4. а) *Ответ:* $A = B = \frac{1}{2}$. Имеем:

$$\int_a^b (kx + l)dx = \left(\frac{kx^2}{2} + lx\right)\Big|_a^b =$$
$$= (b-a)\left(\frac{ka+kb}{2} + l\right) = (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right),$$

где $f(x) = kx + l$. Поэтому значения $A = B = \frac{1}{2}$ удовлетворяют условию, однако проведенное расуждение не дает ответа на вопрос, существуют ли другие такие пары A, B (см. следующий пункт).

б) *Ответ:* да, существуют; $A = B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{2}{3}$. Для того чтобы тождество имело место для всех квадратных функций f, необходимо, а в действительности и достаточно (почему?), чтобы оно выполнялось для функций 1, x, x^2. Следовательно,

$$b - a = \int_a^b dx = (b-a)(A + C + B),$$

$$\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) = \int_a^b x dx = (b-a)(Aa + C\tfrac{a+b}{2} + Bb),$$

и

$$\tfrac{1}{3}(b^3 - a^3) = \int_a^b x^2 dx = (b-a)(Aa^2 + C(\tfrac{a+b}{2})^2 + Bb^2),$$

откуда и получаем систему

$$\begin{cases} A + C + B = 1, \\ aA + C\frac{a+b}{2} + Bb = \frac{a+b}{2}, \\ a^2A + C(\frac{a+b}{2})^2 + Bb^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}. \end{cases}$$

Так как $C = 1 - A - B$, то, подставляя во второе уравнение, получаем, что $\frac{a-b}{2}(A - B) = 0$, значит, $A = B$ и $C = 1 - 2A$. Из последнего уравнения следует, что $A = \frac{1}{6}$.

в) *Ответ:* $\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. Искомый объем равен интегралу от площади поперечного сечения, т. е. интегралу $\int_{R-h}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi(R^2x - \frac{1}{3}x^3)|_{R-h}^{R} = \pi(R^2h - \frac{1}{3}(R^3 - (R-h)^3))$.

Вариант 10

1. б) *Ответ:* $16\pi; 3984\pi; -48\pi; -1328\pi$. Так как $|\sin\alpha|, |\cos\alpha| \leqslant 1$, то равенство возможно лишь в тех случаях, когда

$$\begin{cases} \sin\frac{1992\pi^2}{x} = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\frac{1992\pi^2}{x} = -1, \\ \cos x = -1. \end{cases}$$

Для решений первой системы имеем $x = 2k\pi$, $\frac{1992\pi^2}{2k\pi} = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$, откуда $1992 = k(4l + 1)$. Поскольку k и l — целые числа, а $1992 = 8 \cdot 249$, получаем следующие варианты: $l = 0$, $k = 1992$, или $l = 62$, $k = 8$, или $l = -1$, $k = -664$, или, наконец, $l = -21$ и $k = -24$.

в) *Ответ* — на рис. 83. Неравенство $|x - a| + |x - b| \leqslant 2$ задает множество пар (a, b), лежащих в квадрате со сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов, имеющем центр в точке с координатами (x, x). Множество пар (a, b), лежащих в каждом таком квадрате при $x \in [0; 1]$, является прямоугольником.

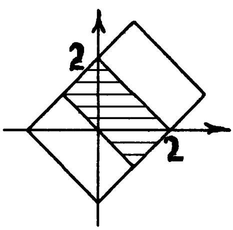

Рис. 83

г) *Ответ:* да, существует, например прямая, проходящая через точки с координатами $(1,0)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ (смотрите решение соответствующего пункта варианта 9).

2. **а)** $[0;1]$. **б)** $(0;\frac{1}{2})\cup(1;8]$. **в)** $-5,-4,\ldots,1$.

3. См. задачу И в разделе «Умеете ли вы решать “почти школьные” задачи?». **б)** $\sin^2\alpha \geqslant \frac{2}{3}$.

4. **а)** Имеем:

$$\int_0^{t+1} f(x)\,dx = \int_0^t f(x)dx + \int_t^{t+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{t+1} f(x)dx.$$

Далее, $\int_1^{t+1} f(x)dx = \int_0^t f(u+1)du = \int_0^t f(x)dx$ в силу периодичности функции f, значит, $\int_t^{t+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

б) Имеем:

$$\int_0^1 \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)}dx = \int_0^{1/2} \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)}dx + \int_{1/2}^1 \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)}dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{2})}\right) dx \geqslant \int_0^{1/2} 2dx = 1.$$

в) *Ответ:* $\alpha \in \mathbb{R}$. Покажем вначале, что неравенство справедливо при $\alpha = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Имеем сумму:

$$\int_0^1 \frac{f(x+\frac{1}{n})}{f(x)}dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{f(x+\frac{1}{n})}{f(x)}dx,$$

сделав в каждом из интегралов замену $u = x - \frac{k-1}{n}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{1/n} \frac{f(u+\frac{k}{n})}{f(u+\frac{k-1}{n})}dx = \int_0^{1/n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(u+\frac{k}{n})}{f(u+\frac{k-1}{n})}dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{1/n} n\sqrt[n]{\frac{f(u+\frac{1}{n})}{f(u)}\frac{f(u+\frac{2}{n})}{f(u+\frac{1}{n})}\cdots\frac{f(u+\frac{n}{n})}{f(u+\frac{n-1}{n})}}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/n} n\,dx = 1,$$

поскольку $f(u+\frac{n}{n}) = f(u)$. Если $\alpha = \frac{m}{n}$, то можно поступить аналогично применительно к интегралу

$$\frac{1}{m}\int_0^m \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx.$$

Докажем теперь, что неравенство справедливо при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно показать, что функция Φ, определенная формулой $\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)} dx$, непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть $c = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > 0$. Поскольку f непрерывна и периодична, то она равномерно непрерывна, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых u_1, u_2, таких, что $|u_1 - u_2| < \delta$, верно неравенство $|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant c\varepsilon$, откуда следует оценка

$$|\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x+\alpha_1) - f(x+\alpha_2)|}{f(x)} dx \leqslant \int_0^1 \frac{c\varepsilon}{c} dx = \varepsilon.$$

Вариант 11

1. а) См. рис. 84. **б)** $b \leqslant -2|\sin \frac{a}{2})|$ (рис. 85). **в)** $r = \frac{1}{2}$.

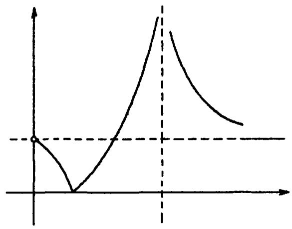

Рис. 84

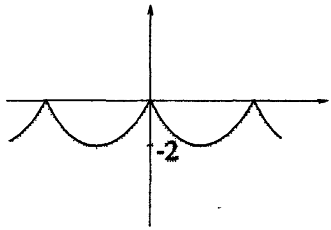

Рис. 85

г) Пусть $\psi(n) = \int_0^n \frac{\sin x}{1+x^2} dx$. Если $2\pi k \leqslant n \leqslant \pi(2k+1)$, то $\psi(n) \geqslant \psi(2\pi k)$, а при $\pi(2k+1) \leqslant n \leqslant 2\pi(k+1)$ $\psi(n) \geqslant \psi(2\pi k + 2\pi)$. Осталось заметить, что

$$\psi(2\pi k) = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{2\pi l}^{\pi(2l+1)} \sin x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(x+\pi)^2}\right) dx > 0.$$

2. а) $(\frac{3}{2}; 2)$. **б)** $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup \{\pi + 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) Кубический многочлен не может делиться на $(x - x_1)^2(x - x_2)^2$ — смотрите решение задачи 1.2в.

3. а) *Ответ* — на рис. 86. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Поскольку $z = \dfrac{1}{w}$, то $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$. Точка w принадлежит образу

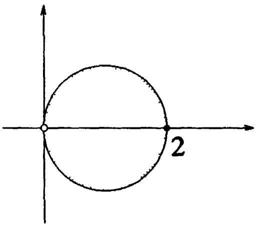

Рис. 86

полуплоскости $z \geqslant \dfrac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{u}{u^2+v^2} \geqslant \dfrac{1}{2}$, т. е. $(u-1)^2+v^2 \leqslant 1$, $(u,v) \neq (0,0)$.
б) Одно из возможных решений: если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, то $\frac{1}{\bar a}+\frac{1}{\bar b}+\frac{1}{\bar c}=0$, т. е. $\frac{a}{|a|^2}+\frac{b}{|b|^2}+\frac{c}{|c|^2}=0$. Последнее равенство имеет вид $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$, где $\alpha,\beta,\gamma>0$ и $\alpha+\beta+\gamma=1$, таким образом, начало координат лежит внутри выпуклой оболочки точек a, b, c, т. е. оно принадлежит треугольнику с вершинами в этих точках.
в) Если z_0 — корень уравнения, $a_i=c_i-z_0$, то $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=0$, в силу утверждения предыдущего пункта точка ноль лежит внутри треугольника с вершинами a_1, a_2, a_3, следовательно z_0 находится внутри треугольника с вершинами c_1, c_2, c_3.

4. а) 30. **в)** *Ответ:* $\frac{2}{3}$. Из трех возможных вариантов: правильная монета лежит гербом вверх, фальшивая монета лежит вверх одной или же другой стороной — нам подходят два последних.

Вариант 12

1. а) *Ответ:* $a=0$, b — любое. Изобразим на плоскости множества, заданные неравенствами $t \leqslant -|y-a|$ и $y \geqslant 2|t|$ (замена $t=x-b$). Ясно (рис. 87), что они имеют единственную общую точку лишь при $a=0$.
б) Перейдя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, после несложных преобразований получим уравнение $\operatorname{tg} 4\varphi=-\frac{2}{997}$, поэтому данная кривая состоит из восьми проходящих через начало координат прямых. Угол между соседними прямыми равен $\frac{\pi}{4}$.
в) Пусть $x-y=k$, $x+y=k^{1992}$, тогда числа $x=\frac{1}{2}(k+k^{1992})$, $y=\frac{1}{2}(k^{1992}-k)$ целые.

2. а) *Ответ:* $x=-1$, $x \geqslant 0$. Решение стандартно, геометрическая интерпретация — на рис. 88.

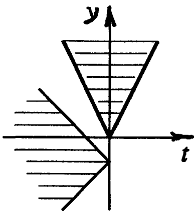

Рис. 87

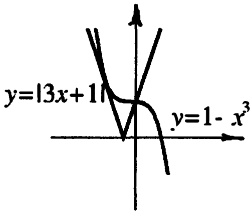

Рис. 88

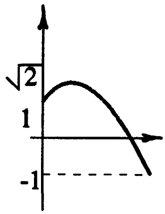

Рис. 89

б) *Ответ:* $\frac{\pi}{4}$ при любых a, $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}}$ при $1 \leqslant a < \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{a}{\sqrt{2}}$ при $-1 \leqslant a < 1$. После разложения на множители получаем, что $\cos x - \sin x = 0$ или $\cos x + \sin x = a$, откуда $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Осталось определить те решения, которые попадают в указанный отрезок, для чего удобно рассмотреть график функции $y = \cos x + \sin x$ при $x \in [0;\pi]$ (рис. 89).

в) *Ответ:* 1. Так как $3^{2x} - 2^{2x} - 3^x - 2^x = (3^x + 2^x)(3^x - 2^x - 1)$, то $3^x = 2^x + 1$. Это уравнение имеет очевидное решение $x = 1$, осталось доказать, что других решений у него нет. Заметим, что в обеих частях этого уравнения стоят возрастающие функции, поэтому прямая ссылка на монотонность недоказательна, однако ясно (доказательство — далее), что 3^x "растет быстрее", чем $2^x + 1$. Действительно, $(3^x - 2^x - 1)' = 3^x\ln 3 - 2^x\ln 2 > 0$ при $x > 0$, значит, функция $3^x - 2^x - 1$ возрастает на $[0;+\infty)$ и более одного нуля не имеет. Если $x \leqslant 0$, то $3^x \leqslant 1 < 1 + 2^x$, поэтому на отрицательной части вещественной оси корней у уравнения нет.

3. а) *Ответ:* $y = \frac{x}{e}$. Вычисление стандартно.

б) *Ответ:* $a \leqslant \frac{1}{e}$. Запишем уравнение в виде $\frac{\ln x}{x} = a$ и исследуем функцию $y = \frac{\ln x}{x}$: $\max y = \frac{1}{e}$ при $x = e$; $y \to -\infty$ при $x \to 0$; $y \to 0$ при $x \to +\infty$. Ответ ясен из приведенного на рис. 90 графика.

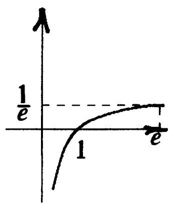

Рис. 90

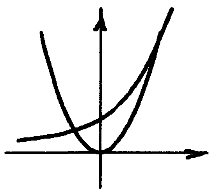

Рис. 91

в) *Ответ:* три решения. Эта задача характерна тем, что бездумное использование графической интерпретации может привести к ошибке. На рис. 91 показаны эскизы графиков при не очень больших значениях аргумента. Ясно, что эти графики имеют одну точку пересечения с отрицательной абсциссой (монотонность и непрерывность), но не совсем понятно, что происходит на $[0; +\infty)$. Это уравнение имеет очевидное решение $x = 6$ и, как следует из рис. 90, существует и еще одно его решение на интервале $(1; e)$!

г) *Ответ:* одно рациональное решение $x = 6$. Так как при нецелых x число 6^x иррационально, то среди натуральных чисел решением может быть только $x = 2$ (см. решение предыдущего пункта), которое таковым не является.

4. а) Пусть x_n — число способов замощения полоски $2 \times n$ “доминошками”. Крайняя левая доминошка может лежать так, как показано на рис. 92, *а* или *б*, в первом случае имеются x_{n-1} способов замощения оставшейся полоски, во втором их x_{n-2}. Значит, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, а так как $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, то, рассуждая по индукции, получаем, что x_n — это n-е число Фибоначчи.

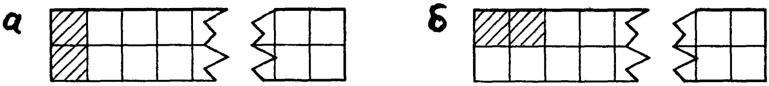

Рис. 92

б) *Ответ:* $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. До этой формулы можно догадаться, рассмотрев несколько значений n, и затем доказать ее по индукции. Приведем, однако, другое рассуждение.

Имеем: $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)^2 = (1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$, коэффициент при x^n в левой части равен сумме $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$, откуда и следует указанное тождество.

в) *Ответ:* $\frac{43}{45}$. Найдем вероятность того, что каждый раз ученик выходит к доске, не попросив подняться никого из своих одноклассников. В первый раз учитель должен вызвать Алешу или Евгения (рис. 93), вероятность этого события равна $\frac{2}{6}$, во второй — опять-таки двух крайних (вероятность — $\frac{2}{5}$), и так далее, таким образом с вероятностью $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{45}$ никто никому не помешает. Искомая вероятность равна $1 - \frac{2}{45} = \frac{43}{45}$.

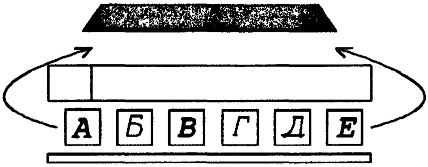

Рис. 93

Вариант 13

1. а) *Ответ:* два решения при $a > 997^2$, бесконечно много при $a = 997^2$ и ни одного при $a < 997^2$. Действительно, функция $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{1994} |x-k|$ убывает на луче $(-\infty; 997]$, возрастает на $[998, +\infty)$ и $\varphi(x) = 996 \cdot 997 + 997 = 997^2$ при любом $x \in [997; 998]$.

б) Имеем: $n^{1994} - 1994n + 1993 = n^{1994} - 1 - 1994(n-1) = (n-1)(n^{1993} + n^{1992} + \ldots + n - 1993)$, а многочлен, стоящий во второй скобке, также делится на $n-1$, поскольку единица является его корнем.

Заметим, что данный многочлен имеет вид $P(n) - P'(n)(n-1) - P(1)$, где $P(x) = x^{1994}$, и вообще утверждение задачи имеет следующее обобщение: если $P(x)$ — многочлен, то $P(x) - P'(x)(x-a) - P(a)$ делится на $(x-a)^2$.

в) Положим $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$ (1993 квадратных корней). Далее, $\frac{2-\sqrt{x+2}}{2-x} = \frac{1}{2+\sqrt{x+2}}$, поэтому исходное неравенство равносильно $\sqrt{x+2} < 2$ или $-2 \leqslant x < 2$, что верно. Полезно также отметить, что данная дробь равна

$$\frac{2 - 2\cos\dfrac{\pi}{2^{1995}}}{2 - 2\cos\dfrac{\pi}{2^{1994}}} = \frac{\sin^2\dfrac{\pi}{2^{1996}}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2^{1995}}} = \frac{1}{4\cos^2\dfrac{\pi}{2^{1996}}},$$

что, очевидно, больше $\frac{1}{4}$.

2. а) $x = 1$, $x \leqslant 0$. **б)** $\frac{3\pi}{4}$ при любом b, $\frac{3\pi}{4} \pm \arccos\frac{-b}{\sqrt{2}}$ при $1 \leqslant b < \sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{-b}{\sqrt{2}}$ при $-1 \leqslant b < 1$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** 1.

3. а) $y = ex$. **б)** $a < 0$, $a \geqslant e$. **в)** Три решения. **г)** Одно решение $x = 10$.

4. а) *Ответ:* 204 способа. Левая нижняя клетка квадрата $k \times k$ может находиться в $(9-k) \times (9-k)$ узлах сетки, т. е. для ее расположения имеются $(k-9)^2$ вариантов. Таким образом, всего имеются $1^2+\ldots+8^2=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}=204$ варианта.

б) *Ответ:* 2^{n-1} при нечетном n и $2^{n-1}+\frac{1}{2}C_n^{n/2}$ при четном. Двоичных чисел, в которых нулей не меньше, чем единиц, столько же, сколько таких чисел, в которых нулей не больше, чем единиц (замена $0\mapsto1, 1\mapsto0$). Если n нечетно, то наборы этих типов не совпадают, поэтому искомые наборы составляют половину всех n-позиционных двоичных чисел и их $\frac{1}{2}\cdot2^n=2^{n-1}$. При четном n получаем $\frac{1}{2}(2^n+C_n^{n/2})$, так как нужно учесть число n-позиционных чисел, в которых нулей столько же, сколько единиц.

в) *Ответ:* $\frac{19}{36}$. Обозначим через $17+x$ время прихода Васи, а $17+y$ — Оли, $x,y\in[0;1]$. Из условия задачи следует, что они встретятся, если $x\leqslant y\leqslant x+\frac{1}{2}$ или $y\leqslant x\leqslant y+\frac{1}{6}$, т. е. если $x-\frac{1}{6}\leqslant y\leqslant x+\frac{1}{2}$.

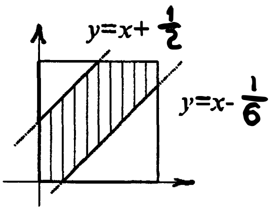

Рис. 94

На рис. 94 заштриховано множество точек, координаты которых удовлетворяют указанным неравенствам. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной части квадрата к площади всего квадрата, откуда и получаем ответ.

Вариант 14

1. а) *Ответ:* $\operatorname{arctg}\sqrt{5-2\sqrt5}$. Замена $t=\operatorname{tg}^2x$ приводит к уравнению $\dfrac{4t}{(1-t)^2}+t=10$, откуда $t^3-12t^2+25t-10=0$. Корнями последнего уравнения являются числа 2 и $5\pm2\sqrt5$. Поскольку функция $y=\operatorname{arctg}x$ возрастающая, а $0<5-2\sqrt5<2$, то отсюда и следует ответ.

б) Два решения при $0<a\leqslant\frac{1}{3}$, одно — при $a\leqslant0$, $a>\frac{1}{3}$ (рис. 95).

в) *Ответ:* два корня. Так как $(8^x+4^x+2^x)'|_{x=0}=\ln64>2$, то графики правой и левой частей данного уравнения выглядят

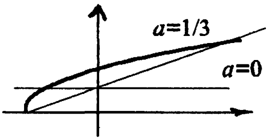

Рис. 95

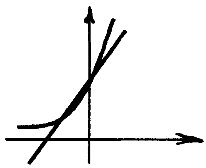

Рис. 96

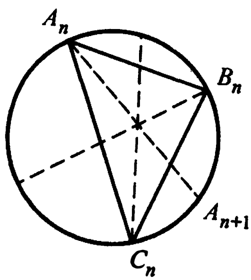

Рис. 97

так, как показано на рис. 96. Строгое доказательство приведено в Дополнении.

г) *Ответ:* 576. Если $t = x - 8 \in [0; 14]$, $z = t^2 - 14t \in [-49; 0]$, то $(x-8)(x-14)(x-16)(x-22) = z^2 + 48z \in [-576; 49]$.

2. Заметим, что $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$.

а) *Ответ:* 1. Имеем: $a_{n+1} - 1 = \dfrac{b_n + c_n}{2} - 1 = \dfrac{1 + 2 - a_n}{2} - 1 = \dfrac{1 - a_n}{2}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - a_n) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

б) Аналогично предыдущему пункту, $a_{n+1} - \xi = \dfrac{b_n + c_n}{2} - \xi = \dfrac{3\xi - a_n}{2} - \xi = \dfrac{\xi - a_n}{2}$, далее ясно.

в) *Ответ:* $\frac{\pi}{3}$, или 1,05. Обозначим углы треугольника $A_nB_nC_n$ через α_n, β_n, γ_n. Из свойств вписанных в окружность углов очевидно (см. рис. 97), что $\alpha_n = \dfrac{\beta_n + \gamma_n}{2}$ и т. д. Таким образом, последовательности углов рассматриваемых треугольников удовлетворяет соотношению предыдущего пункта, поэтому они имеют общий предел — $\frac{\pi}{3}$, более того, $|\alpha_{40} - \frac{\pi}{3}| = 2^{-39}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7})$, а это очень маленькое число.

3. а) Положим $a_n = x^n + x^{-n}$. Утверждение легко доказывается по индукции в силу тождества $a_{n+1} = a_1a_n - a_{n-1}$. Единственное, что следует отметить, это то, что индукционное предположение заключается в справедливости утверждения для всех $k \leqslant n$.

б) Пусть $a = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, тогда $a^{-1} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, так что $a + a^{-1} = 3$, поэтому число $a^n + a^{-n} = k$ целое. Так как $a > 2$, то $a^{-n} < 2^{-n}$, поэтому $k - 2^{-n} < a^n < k$, значит, $k \cdot 2^n - 1 < (3+\sqrt{5})^n < k \cdot 2^n$ и $[(3+\sqrt{5})^n] + 1 = k \cdot 2^n$.

в) Нетрудно видеть, что если $p(x)$ — частное от деления многочлена $x^n + 1$ на $x^k + 1$, то частным от деления $x^{4n} + 1$ на $x^{4k} + 1$

будет многочлен $p(x^4)$.

4. а) Очевидно, что число аммов на одной чашке будет делиться на три, а на другой — не будет.

б) *Ответ:* 0. Если воспользоваться формулой для произведения двух косинусов, то произведение $\cos k_1x \cos k_2x \ldots \cos k_nx$ можно представить в виде суммы членов вида $2^{-n}\cos(k_1 \pm k_2 \pm \ldots \pm k_n)x$. Поскольку в рассматриваемом случае ни один из коэффициентов при x не равен нулю (и является целым числом), то интеграл от каждого такого слагаемого равен нулю.

в) *Ответ:* $\frac{1}{4}$. Мы вправе считать, что длина палки равна единице. Пусть x и y — координаты изломов, $x < y$. Тогда условия на длины кусков определяют неравенства $x \leqslant \frac{1}{2}$, $y - x \leqslant \frac{1}{2}$ и $1 - y \leqslant \frac{1}{2}$. Искомая вероятность равна отношению площади треугольника с вершинами в точках с координатами $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ и треугольника, определяемого системой из трех указанных неравенств (рис. 98).

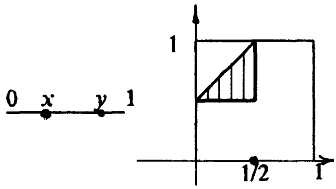

Рис. 98

Вариант 15

1. а) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$. **б)** Два решения при $-\frac{2}{5} \leqslant a < 0$, одно — при $a \geqslant 0$, $a < -\frac{2}{5}$. **г)** Итак, требуется найти условие, при котором для любого числа α существует решение квадратного уравнения

$$(x-a)(x-b) = \alpha(x-c)(x-d),$$

или

$$(1-\alpha)x^2 - ((a+b) - \alpha(c+d))x + ab - \alpha cd = 0$$

(случай $\alpha = 1$ следует рассмотреть отдельно). Преобразуем дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D_\alpha = (a+b)^2 + \alpha^2(c+d)^2 - 2\alpha(a+b)(c+d) + 4(\alpha-1)(ab-\alpha cd) =$$
$$\alpha^2((c+d)^2 - 4cd) - 2\alpha((a+b)(c+d) - 2(ab+cd)) + (a+b)^2 - 4ab =$$
$$\alpha^2(c-d)^2 - 2\alpha((a+b)(c+d) - 2(ab+cd)) + (a-b)^2.$$

Положим для краткости

$$A = (a+b)(c+d) - 2(ab+cd) = ac + ad + bc + bd - 2ab - 2cd,$$
$$B = (a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd.$$

Тогда $A + B = 2(c-b)(a-d)$, $A - B = (b-d)(c-a)$. Квадратное уравнение (относительно x) имеет решение тогда и только тогда, когда при всех α верно неравенство $D_\alpha \geqslant 0$, для чего необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратичного относительно α выражения D_α был неположителен. Проделанные вычисления показывают, что последний дискриминант равен

$$4(c-a)(c-b)(d-a)(d-b).$$

Для завершения доказательства осталось проверить, что неравенство

$$(c-a)(c-b)(d-a)(d-b) < 0$$

имеет место, когда одно из чисел a, b лежит между c и d.

3. **а)** 14,5. **в)** Пусть $q_l(x) = (x-1)(x^2-1)\ldots(x^l-1)$ и

$$P_{n,k}(x) = \frac{(x^{n-k+1}-1)(x^{n-k+2}-1)\ldots(x^n-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)} = \frac{q_n(x)}{q_k(x)q_{n-k}(x)}.$$

Имеем: $P_{n,k}(x) = \dfrac{q_{n-1}(x)(x^n - x^k + x^k - 1)}{q_k(x)q_{n-k}(x)} = \dfrac{x^k(x^{n-k}-1)q_{n-1}(x)}{q_k(x)q_{n-k}(x)}$ $+\dfrac{(x^k-1)q_{n-1}(x)}{q_k(x)q_{n-k}(x)} = x^k P_{n-1,k}(x) + P_{n-1,k-1}(x)$, и осталось провести индукцию по n. Кстати, не напоминают ли вам что-либо полученные выражения и соотношения между ними?

4. **б)** 0. **в)** $\frac{1}{4}$.

Вариант 16

1. **а)** $(-3;-1)$. **б)** *Ответ:* $(-\infty;-4] \cup [-2;-1] \cup [1;+\infty)$. Замена $y = x^2 + 3x + 1$ приводит к неравенству $y^2 - 4y - 5 \geqslant 0$.
в) *Ответ:* $a \geqslant \frac{1}{3}$. Стандартное решение. Рассмотрим три случая: $a \geqslant -1$, $-2 < a < -1$ и $a \leqslant -2$, вершина параболы $y = x^2 + 2ax + a - 2$ лежит, соответственно, левее прямой $x = 1$

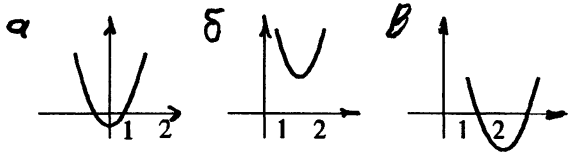

Рис. 99

(рис. 99, *а*), между $x = 1$ и $x = 2$ (рис. 99, *б*), правее $x = 2$ (рис. 99, *в*).

Ясно, что данная функция положительна на интервале $(1;2)$, если $y(1) \geqslant 0$, $a \geqslant -1$; или $y(-a) > 0$, $-2 < a < -1$; или $y(2) \geqslant 0$, $a \leqslant -2$. Решая системы

$$\begin{cases} 3a - 1 \geqslant 0, \\ a \geqslant -1, \end{cases} \quad \begin{cases} -a^2 + a - 2 > 0, \\ -2 < a < -1, \end{cases} \quad \begin{cases} a \leqslant -2, \\ 5a + 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

получаем ответ.

г) *Ответ:* x любое при $a = 0$; $x \in \left(-\infty; \frac{a+1}{a}\right) \cup \left(\frac{2}{a}; +\infty\right)$ при $a \in (0;1)$; $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a}\right) \cup \left(\frac{a+1}{a}; +\infty\right)$ при $a < 0$, $a \geqslant 1$. При $a \neq 0$ преобразуем неравенство к виду $\frac{x-(1+1/a)}{x-2/a} > 0$. Осталось выяснить, при каких a выполняется $1 + \frac{1}{a} \geqslant \frac{2}{a}$.

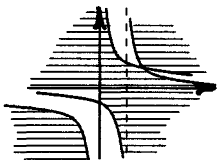

Рис. 100

Имеем неравенство $\frac{1}{a} \leqslant 1$, т. е. $\frac{a-1}{a} \geqslant 0$, таким образом, $a < 0$ или $a \geqslant 1$. Представляет интерес изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты (x, a) которых удовлетворяют данному неравенству (заштриховано на рис. 100).

2. а) Пусть $\sqrt[3]{2} = a$. Имеем: $(a^2 + a + 1)(a^2 - 1)(a^2 - a + 1) = (a^2+a+1)(a-1)(a+1)(a^2-a+1) = (a^3-1)(a^3+1) = a^6-1 = 2^2-1 = 3$.

б) *Ответ:* $a = -1$, $b = -2$, $x = 1$ и $-\sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2}$ — корень, то $(\sqrt{2})^3 - (a + 2) \cdot 2 + b\sqrt{2} - 2a = 0$, откуда $\sqrt{2}(b + 2) = 4(a + 1)$. Если $b \neq -2$, то получаем: $\sqrt{2} = \frac{4(a+1)}{b+2}$ — противоречие, так как $\sqrt{2}$ иррационален, а числа a и b, по условию, являются целыми.

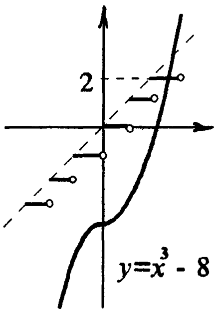

Рис. 101

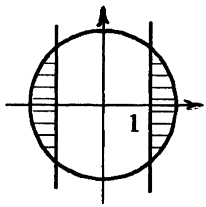

Рис. 102

Следовательно, $b = -2$, $a = -1$. Корнями многочлена $x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x^2-2)$ являются числа 1 и $\pm\sqrt{2}$.

в) *Ответ:* $\frac{2x+5}{3}$. По теореме Безу $P(2) = 3$ и $P(-1) = 1$. Пусть $px+q$ — остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^2-x-2; $P(x) = R(x)(x^2-x-2)+px+q$. Подставляя в это равенство $x = 2$ и $x = -1$, получаем систему

$$\begin{cases} 2p+q &= 3, \\ -p+q &= 1, \end{cases}$$

откуда $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{5}{3}$.

г) *Ответ:* $x = \sqrt[3]{10}$. Результат очевиден из рис. 101: прямая $y = 2$ пересекает график $y = x^3 - 8$ в точке с абсциссой $x = \sqrt[3]{10}$, а так как $2 < \sqrt[3]{10} < 3$, то $[\sqrt[3]{10}] = 2$. Для доказательства того, что найденное решение действительно единственно, достаточно проверить неравенства $x^3 - 8 > x$ при $x \geqslant 3$ и $x^3 - 8 < x - 1$ при $x \leqslant 2$. При $x \geqslant 3$ имеем: $x^3 - 8 \geqslant 9x - 8 > x$. Запишем второе неравенство в виде $x^3 - x < 7$. Оно очевидно при $|x| \leqslant 1$, $x < -1$, а также при $1 \leqslant x \leqslant 2$.

3. а) См. рис. 102 (прямые $x = \pm 1$ входят в решение!).

б) *Ответ* — на рис. 103. Графики строятся при помощи стандартных преобразований. Чтобы не допустить ошибку при построении последнего графика, можно для контроля найти область определения последней функции: $-1 \leqslant 2x - 2 \leqslant 2$, откуда $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

в) *Ответ:* $[0; \sqrt{2}]$; $[-1; 1)$. Стандартный способ: a — значение функции f, если уравнение $f(x) = a$ имеет решение; $\sqrt[4]{-x^2+4x} = a$, значит, $a \geqslant 0$. Далее: уравнение $x^2 - 4x + a^4 = 0$ имеет решение,

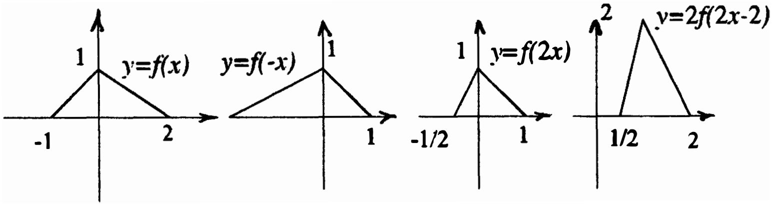

Рис. 103

если $4-a^4 \geqslant 0$, откуда $|a| \leqslant \sqrt{2}$, т. е. $a \in [0;\sqrt{2}]$. Уравнение $\frac{x^2-1}{x^2+1} = a$ или $x^2 = \frac{a+1}{1-a}$ имеет решение, если $\frac{a+1}{1-a} \geqslant 0$, таким образом, $a \in [-1;1)$.

г) Если x_1, x_2 — корни, то $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$. Поскольку корни должны быть действительными, то система

$$\begin{cases} p^2 - 4q & \geqslant 0, \\ p^2 - 2q & = 1 \end{cases}$$

и задает искомое множество (рис. 104).

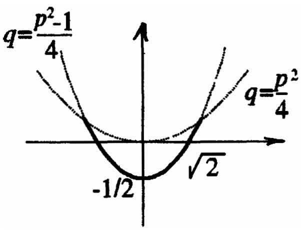

Рис. 104

Вариант 17

1. а) $(2;3)$. **б)** $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$. **в)** $b \leqslant \frac{3}{2}$. **г)** $b=0$ — решений нет; $x \in \left(-\infty;\frac{b-2}{b}\right) \cup \left(\frac{1}{b};+\infty\right)$, если $0 < b \leqslant 3$; $x \in \left(-\infty;\frac{1}{b}\right) \cup \left(\frac{b-2}{b};+\infty\right)$, если $b < 0$ или $b \geqslant 3$.

2. а) 8. **б)** $a=1$, $b=-1$ и $x=1;\sqrt{3}$. **в)** $x+1$. **г)** $\sqrt[3]{13}$.

3. а) См. рис. 105. **б)** См. рис. 106. **в)** $[0;2], (-1;\frac{1}{2}]$. **г)** См. рис. 107.

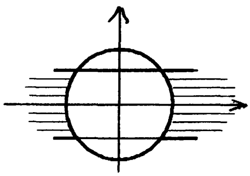

Рис. 105

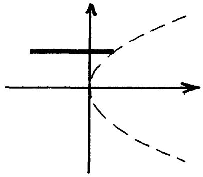

Рис. 107

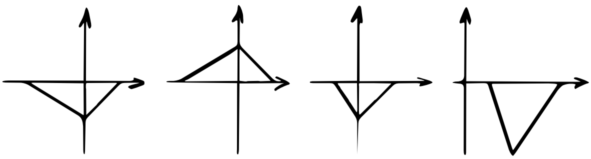

Рис. 106

Вариант 18

1. а) *Ответ:* $\sqrt{3}+1$. Действительно, $\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}} = \sqrt{5-\sqrt{(1+\sqrt{12})^2}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$, так как $\sqrt{3}-1>0$. Далее аналогично.

б) *Ответ:* $(-\infty; \sqrt{12}-\sqrt{11}) \cup (\sqrt{11}-\sqrt{10}; +\infty)$. Все, что надо сделать — это сравнить числа $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{11}-\sqrt{10}$:

$$\sqrt{12}-\sqrt{11} = \frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}} < \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}} = \sqrt{11}-\sqrt{10}.$$

в) *Ответ:* x^4-10x^2+1; $-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})$. Положив $u = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, получим $u^2 = 5+2\sqrt{6}$, $u^2-5 = 2\sqrt{6}$ и $(u^2-5)^2 = 24$, т. е. $u^4-10u^2+1=0$. Вместо того, чтобы прямо решать это биквадратное уравнение, можно просто проследить за двумя возведениями в квадрат, проделанными при его выводе.

г) Если точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ лежат на прямой $y = x\sqrt{3}+b$, то $y_0 = x_0\sqrt{3}+b$ и $y_1 = x_1\sqrt{3}+b$, откуда $(y_1-y_0) = (x_1-x_0)\sqrt{3}$. Поскольку число $\sqrt{3}$ иррационально, то в случае рациональных значений x_0, x_1, y_0, y_1 из этого равенства следует, что $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$.

2. а) *Ответ:* $(-\infty; -5) \cup (0; 2) \cup [3; 5)$. Так как $\{x\} < 1$, то $x^3-25x = x(x-5)(x+5) < 0$, откуда $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 5)$. Из полученного множества нужно исключить промежуток, в котором $[x] = 2$, т. е. промежуток $[2; 3)$.

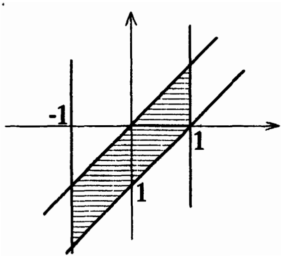

Рис. 108

б) *Ответ* — на рис. 108. Данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ \sqrt{x-y} \leqslant 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x - y \leqslant 1. \end{cases}$ Поэтому искомое множество является пересечением двух полос: первая из них ограничена прямыми $x = \pm 1$, а вторая — прямыми $x - y = 0$ и $x - y = 1$.

в) *Ответ:* $(0; 1)$. Поскольку $x^2 - x + 1 > 0$ при всех x, то данное неравенство можно записать в виде $\frac{x^2-x+1}{|x-1|} < |x| + \frac{1}{|x-1|}$, или $\frac{x^2-x}{|x-1|} < |x|$. Учитывая, что $x \neq 1$, преобразуем далее: $x^2 - x < |x^2 - x|$, что верно, если $x^2 - x < 0$, т. е. $x \in (0; 1)$.

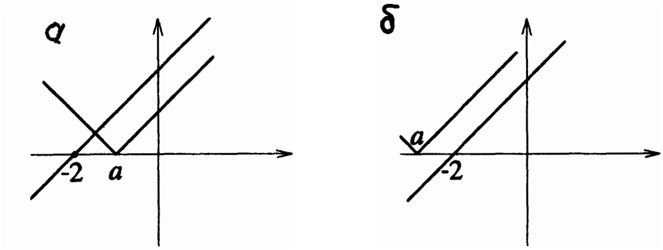

Рис. 109

г) *Ответ:* $a > 2$. Множество решений второго из данных неравенств состоит из тех точек числовой оси, которые расположены ближе к точке 2, чем к точке a. Следовательно, это множество пусто при $a = 2$, оно совпадает с интервалом $(-\infty; \frac{a+2}{2})$ при $a > 2$ и с $(\frac{a+2}{2}; +\infty)$ при $a < 2$. Для решения первого из неравенств воспользуемся его графической интерпретацией. Графики функций $y = |x - a|$ и $y = x + 2$ изображены на рис. 109, *а* и *б*, из которых ясно, что решение этого неравенства есть: $(-\infty; \frac{a-2}{2})$ при $a \geqslant -2$ и $(-\infty; +\infty)$ при $a < -2$.

3. **а)** *Ответ:* $k \in (-2; 0]$. Условие пункта а) означает, что уравнение $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + k$ не имеет решений, т. е. не имеет решения уравнение $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{k}{2}$, т. е. $\frac{k}{2}$ не является значением функции $y = \frac{1}{x(x+2)}$. Множество значений функции $y = x(x+2) = x^2 + 2x$ — луч $[-1; +\infty]$. График изображен на рис. 110.

б) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$ (см. решение предыдущего пункта).

в) *Ответ:* $1; -4; -1 \pm \sqrt{5}$. Так как $y^2 + 3xy + 2x^2 = (y + 2x)(y + x)$, то $x^2 + 3x - 4 = 0$ или $x^2 + 2x - 4 = 0$.

г) Решений нет, поскольку $x^4 + x(x+2) + 1 = x^4 + (x+1)^2$.

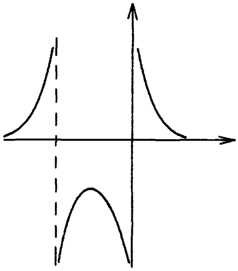

Рис. 110

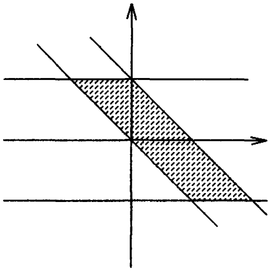

Рис. 111

Вариант 19

1. **а)** Это число равно двум. **б)** $(\sqrt{13} - \sqrt{14}; \sqrt{14} - \sqrt{15})$. **в)** $x^4 - 10x^2 + 1$; $\sqrt{3} - \sqrt{2}; \pm(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

2. **а)** $(-6; -3) \cup [-2; 0) \cup (6; +\infty)$. **б)** См. рис. 111. **в)** $(-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$. **г)** $a > 2$.

3. **а)** $(-2; 0]$. **б)** $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$; график получается сдвигом вдоль оси абсцисс соответствующего графика предыдущего варианта. **в)** $-1; 2; -1 \pm \sqrt{3}$. **г)** Решений нет.

Вариант 20

1. **а)** *Ответ:* $0{,}4\sqrt[7]{2{,}5}$. Поскольку данные числа взаимно обратны, то, положив $a = 2{,}5\sqrt[7]{0{,}4}$, получим: $1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} < a - 1$, так как $a > 1$.

б) *Ответ:* $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Стандартное рассуждение по индукции.

Задача также решается совсем просто, если использовать понятие сравнения по модулю. Именно, так как $3 \equiv -4 \pmod 7$, то $4^n - 3^n \equiv 4^n(1 - (-1)^n) \pmod 7$, значит, $4^n - 3^n \equiv 0 \pmod 7$, когда число n четное.

В связи с этой задачей полезно отметить тождество

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} - y^{n-1}) - xy(x^{n-2} - y^{n-2}).$$

в) *Ответ* — на рис. 112. Неравенство $|x-y| \geqslant x-2y$ равносильно совокупности неравенств $x-y \geqslant x-2y$ и $x-y \leqslant 2y-x$, поэтому искомое множество есть объединение полуплоскостей $y \geqslant 0$ и $y \geqslant \frac{2}{3}x$ (рис. 112).

Обратите внимание, что рис. 112 позволяет решить неравенство $|x-a| \geqslant x-2a$.

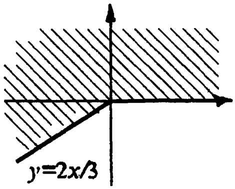

Рис. 112

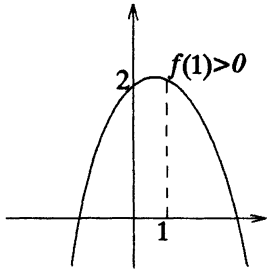

Рис. 113

г) *Ответ:* $\pm 1; \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}; \pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Сделав в исходном уравнении замену $t = x^2$, получим уравнение $t^3 - 5t^2 + 5t - 1 = 0$, левая часть которого есть произведение $(t-1)(t^2-4t+1)$.

2. а) Сформулированное утверждение нетрудно проверить непосредственно. В доказательстве его обобщения можно применить тождество, указанное в замечании к задаче 1б.

б) *Ответ:* нет, не является. Имеем: $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 41$. А если $r, s \in \mathbb{Q}$, то число $r\sqrt{2} + s\sqrt{3}$ иррациональное.

в) *Ответ:* да, существует. К примеру, $z_0 = \frac{1}{4}(7+\sqrt{33})$, поскольку $f(z_0) = -3$.

3. а) *Ответ:* $[0; \frac{3}{2}]$; графиком данной функции является полуокружность $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, $y \geqslant 0$.

б) *Ответ:* $-\frac{15}{4}$. Искомое значение равно наименьшему значению функции $y = t^2 - 4t$ на отрезке $[0; \frac{3}{2}]$.

в) $a > -1$ (рис. 113).

4. а) *Ответ:* $S = \frac{1}{2}AB(AD+BC) = 8$. Используйте то, что $ABCD$ — трапеция.

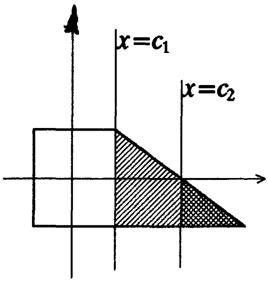

Рис. 114

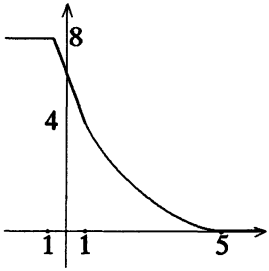

Рис. 115

б) Если $c_2 \geqslant c_1$, то $S(c_1) \geqslant S(c_2)$, поскольку часть четырехугольника, лежащая правее прямой $x = c_2$, содержится в той его части, которая находится правее прямой $x = c_1$ (рис. 114).
в) *Ответ:* $S(x) = 8$ при $x \leqslant -1$; $S(x) = 6 - 2x$, если $x \in [-1; 1]$; $S(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2$ при $x \in [1; 5]$; $S(x) \equiv 0$ при $x \geqslant 5$. Вычисления очевидны, график — на рис. 115.

Вариант 21

1. **а)** $0{,}625\sqrt[5]{1{,}6}$. **б)** $n = 2k - 1$, $k \in N$. **в)** См. рис. 116. **г)** $\pm 1; \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; \pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

2. **б)** Нет, не является. **в)** Да, существует. К примеру, $z_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

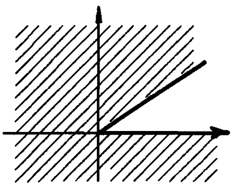

Рис. 116

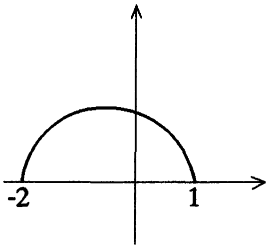

Рис. 117

3. **а)** $[0; \frac{3}{2}]$; график — полуокружность (рис. 117). **б)** -1. **в)** $a < 1$.

4. **а)** 8. **б)** Функция S монотонно возрастает. **в)** $S(x) = 0$ при $x \leqslant -1$; $S(x) = 2(x+1)$, если $x \in [-1; 1]$; $S(x) = 8 - \frac{1}{4}(5-x)^2$ при $x \in [1; 5]$; $S(x) = 8$ при всех $x \geqslant 5$.

Вариант 22

1. а) Это число равно единице. **б)** *Ответ:* нет, неверно. Данная квадратичная функция убывает при $x \leqslant \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ и возрастает при x, бóльших указанного значения, а $\sqrt{2}+\sqrt{3} > 3$.
в) *Ответ:* $(0,0)$. Пусть $x, y \neq 0$. Поделив на y^2, получим уравнение $(\frac{x}{y})^2 - 5\frac{x}{y} + 3 = 0$, откуда $\frac{x}{y} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, следовательно, числа x и y не могут быть рациональными одновременно.
г) Заметим, что $x_{n-1} = \frac{x_n+1}{2x_n}$. Число x_{n+1} не определено, если $x_n = \frac{1}{2}$, поэтому оно не определено, если $x_{n-1} = \frac{3}{2}, x_{n-2} = \ldots$, т. е. если $a = a_{n-1}$.

2. а) *Ответ:* $0; 2; 2\sqrt{2}$. Ясно, что $x \geqslant 0$, далее: $x^3 - 6x = 2x$, откуда $x^3 = 8x$, т. е. $x = 0; \pm 2\sqrt{2}$; или же $x^3 - 6x = -2x$, т. е. $x = 0; \pm 2$. Отбросив отрицательные значения, получим ответ.
б) *Ответ:* $(1-\sqrt{6}; 1) \cup (1+\sqrt{6}; 4]$. Преобразуем левую часть:
$$\frac{f(x)-40}{f(x-1)} = \frac{x^3-6x-40}{(x-1)((x-1)^2-6)} = \frac{(x-4)(x^2+4x+10)}{(x-1)(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})}$$
(корень $x = 4$ находим подбором) и применяем "метод интервалов".
в) Данное тождество можно проверить непосредственно, а можно заметить, что если $t = \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$, то $t^3 = 40 + 3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}t = 40 + 6t$, а из решения, приведенного в предыдущем пункте, следует, что уравнение $x^3 = 40 + 6x$ имеет единственный корень $x = 4$.

3. а) *Ответ:* $a \geqslant \frac{5}{2}$. Действительно, $t = x^2+2 \geqslant 2$, а уравнение $t + \frac{1}{t} = a$ имеет решение на луче $[2; +\infty)$ при $a \geqslant 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (поскольку функция $y = t + \frac{1}{t}$ возрастает на указанном луче).
б) *Ответ:* $a = 12, b = 0$. Нетрудно видеть, что если перенести все члены уравнения в левую часть, то в ней окажется сумма трех квадратов, поэтому $3x^2 - a + 2b = 0$, $2a - 3b - 12x = 0$, $x - 2 = 0$, откуда $a - 2b = 12$, $2a - 3b = 24$. Решив последнюю систему, получим ответ.
в) *Ответ:* $a > \frac{5}{2}$. Замена $t = x + \frac{1}{x}$ приводит к уравнению $t^2 + (a-1)t - 1 = 0$. Исходное уравнение имеет два различных отрицательных корня, когда последнее уравнение имеет корень $t_1 < -2$, что выполнено, если его левая часть отрицательна при $t = -2$ (рис. 118), т. е. если $(-2)^2 - 2(a-1) - 1 < 0$, откуда и следует ответ.

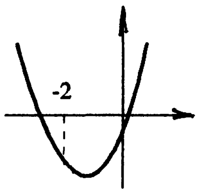

Рис. 118

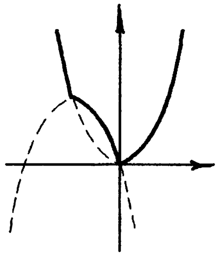

Рис. 119

4. **а)** *Ответ* — на рис. 119. Действительно, $y = x^2$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ и $y = -(x^2 + 2x)$ при $x \in [-1; 0]$.

б) *Ответ:* $x \in [-1; -\sqrt{-2a-1}] \cup [\sqrt{-2a-1}; 1]$ при $a \in [-1; -\frac{1}{2}]$; $x \in [-1; 1]$ при $a > -\frac{1}{2}$; решений нет при $a < -1$. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 + a \leqslant a + 1, \\ x^2 + a \geqslant -a - 1, \end{cases}$ решение которой можно записать непосредственно, а можно вначале изобразить на плоскости (x, a) множество точек, удовлетворяющих каждому из полученных неравенств (см. рис. 120).

в) *Ответ* — граница заштрихованной на рис. 120 области. Действительно, $y \geqslant -1$ и при этом $x^2 = 1$ или $y = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ (естественная замена a на y).

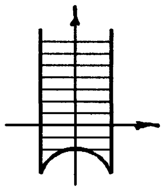

Рис. 120

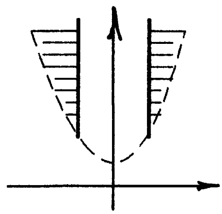

Рис. 121

Вариант 23

1. **б)** Нет, неверно. **в)** $(0, 0)$.

2. **а)** $0; -\sqrt{2}; -4$. **б)** $(-\infty; -5) \cup (-2; 1) \cup [5; +\infty)$.

3. **а)** $a \geqslant \frac{10}{3}$. **б)** $a = 3$, $b = \frac{5}{2}$. **в)** $a > \frac{1}{2}$.

4. **б)** $[-\sqrt{2a-1}; -1] \cup [1; \sqrt{2a-1}]$ при $a \geqslant 1$, при $a < 1$ решений нет. **в)** См. рис. 121.

Вариант 24

1. а) $[-1; 0) \cup (2; 3]$. **б)** См. рис. 122.

в) Поскольку данное неравенство можно привести к виду $(n-1)(n^2-2) \geqslant 0$, то оно очевидным образом верно для всех натуральных n.

г) *Ответ:* $|k| \leqslant 1$. По поводу геометрических соображений — см. задачи 7.1г, 8.1г. Стандартное решение: пусть $x, k > 0$, возведя в квадрат, получим неравенство $x^2(k^2-1) \leqslant 3$, которое верно при всех x лишь если $k^2 - 1 \leqslant 0$.

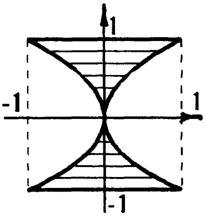

Рис. 122

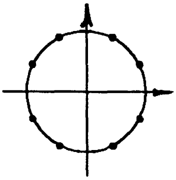

Рис. 123

Рис. 124

2. а) $g(t) = t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$. **б)** $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

в) *Ответ:* одно. Отметим на единичной окружности точки, соответствующие решениям данного уравнения (рис. 123). Поскольку $3 < \pi < 3{,}2 = \frac{16}{5}$, то $\frac{3}{4}\pi < 3 < \frac{5}{4}\pi < 4 < \frac{4}{3}\pi$, значит, в указанном отрезке лежит лишь $\frac{5}{4}\pi$.

г) *Ответ:* π. Поскольку $f(x) = g(\cos 2x)$, то $f(x+\pi) = f(x)$. Далее, $f(x) = -\frac{9}{16}$ при $\cos 2x = -\frac{1}{4}$, т. е. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k$. Обозначим $\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. Ясно, что $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Изобразим на числовой оси множество чисел $\{\pm\alpha + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (рис. 124). Существует единственный сдвиг на $T \in (0; \pi)$, который переводит точку α в точку этого множества, именно $T = \pi - 2\alpha$. Но, поскольку $2\alpha \neq \pi - 2\alpha$, то точка $\alpha - \pi$ при этом сдвиге не перейдет в точку данного множества, следовательно, период функции равен π.

3. а) *Ответ:* $a = 12$. Имеем: $0 = f(2) = 8 - 4 - 16 + a = a - 12$.

б) $x^3 - x^2 - 8x - 12 = (x-2)(x^2-2x-6) = (x-2)^2(x+3)$, значит, уравнение имеет еще один корень $x = -3$. **в)** $(-4; -3] \cup \{2\}$.

г) *Ответ:* $k < -\frac{9}{4}$. Уравнение $(x-2)^2(x+3) = (x+3)(x+k)$ имеет корень $x = -3$, значит, уравнение $(x-2)^2 = x + k$ должно либо не иметь корней, что будет при $k < -\frac{9}{4}$, либо его корнем должно быть также $x = -3$. Однако, если $(-3-2)^2 = -3+k$, т. е. $k = 28$, то это уравнение имеет и другой корень, отличный от -3.

4. а) Рассмотрим график функции $y = |14^x - 1|$ (рис. 125), откуда видно, что уравнение не имеет корней при $a < 0$, имеет один корень при $a = 0$, $a \geqslant 1$ и два корня при $0 < a < 1$.

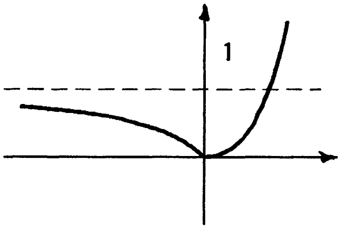

Рис. 125

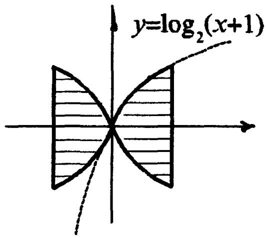

Рис. 126

б) В силу неравенства $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ имеем $14^x + 14^{-x} \geqslant 2$, следовательно, наименьшее значение функции F равно единице.

в) По индукции: $f(1) = 13$ — делится на 13. Пусть $f(n)$ делится на 13. Имеем: $f(n+1) - f(n) = 14^{n+1} - 14^n = 14^n \cdot 13$ — делится на 13, значит, и $f(n+1)$ делится на 13.

г) Также по индукции: неравенство верно при $n = 2$. Далее, $14^{n+1} = 14 \cdot 14^n > 14(20n+7) > 20n + 27 = 20(n+1) + 7$.

Вариант 25

1. а) $[0; 1) \cup (4; 5]$. **б)** См. рис. 126.

в) Возведите в куб неравенство $\sqrt[3]{x^2+2} < 1 + \sqrt[3]{x^2+1}$.

г) *Ответ:* $k \leqslant 1 + 2\sqrt{2}$. Неравенство равносильно следующему неравенству: $n + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geqslant k$, значит, k должно не превосходить наименьшего члена последовательности $a_n = n + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Функция $f(x) = x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$ имеет минимум в точке $x = \sqrt[3]{2}$, следовательно, наименьший член данной последовательности — это либо a_1, либо a_2. Но $a_1 = 1 + 2\sqrt{2} < 4 = a_2$.

2. а) 2π. **б)** $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** Одно решение $x = \frac{3\pi}{2}$.
г) Поскольку функция $g(\cos 2x)$ имеет период π, она не может совпадать с 2π-периодической функцией f.

3. а) $k = 2$. **б)** $-1; 2; 4$. **в)** $[1; 2] \cup [4; +\infty)$. **г)** $a > 3$.

4. а) При $a < 1$ решений нет, при $a = 1$ одно решение, при $a > 1$ — два. **в)** Все четные числа.

Вариант 26

1. а) *Ответ:* $(0;1) \cup (2;3) \cup (3;4)$. Область определения данного неравенства: $x > 0$, $x \neq 3$. Запишем его в виде $\dfrac{\log_2(x^2 - 6x + 9)}{\log_2(2^x - 1)} < 0$, определим знаки выражений, стоящих в числителе и в знаменателе полученной дроби (рис. 127), и выберем те промежутки, в которых эти знаки противоположны.

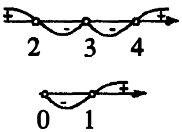

Рис. 127

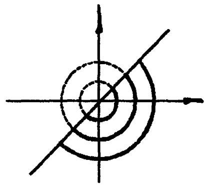

Рис. 128

б) *Ответ* — см. рис. 128. Данное уравнение равносильно совокупности: $y = x$ или $\begin{cases} x \geqslant y, \\ x^2 + y^2 = k, \end{cases}$ $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, искомое множество является объединением прямой $y = x$ и полуокружностей (лежащих под прямой $y = x$) радиусов $\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

в) *Ответ:* $-21; 3$. Прямая, проходящая через точки A и B, задается уравнением $y = \frac{m+3}{3}x + \frac{m-6}{3}$ и касается параболы $y = x^2$, если система $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{3}\left((m+3)x + m - 6\right) \end{cases}$ имеет единственное решение, что равносильно единственности решения уравнения $x^2 - \frac{m+3}{3}x - \frac{m-6}{3} = 0$. Значит, $\left(\frac{m+3}{3}\right)^2 + 4\frac{m-6}{3} = 0$; решая, получаем ответ.

г) *Ответ:* $f(2) = f(0) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$, $f\left(-25\frac{1}{7}\right) = f\left(-25\frac{1}{7} + 26\right) = f\left(\frac{6}{7}\right) = -\frac{6}{49}$.

2. а) *Ответ:* $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим $t = \cos x + \sin x$, тогда $\sin 2x = t^2 - 1$ и уравнение запишется в виде $11t = t^2 - 5 + 7$, откуда $t = \frac{1}{5}; 2$. Далее, $t = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$, значит, $|t| \leqslant \sqrt{2}$ и $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}$.

б) Прежде всего заметим, что $x \neq 2\pi k; \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее, поскольку $f(x) \geqslant 0$, то $x \in [-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k]$. При этих условиях $y = \sqrt[4]{2}\sqrt{\cos(x - \frac{\pi}{4})}$ (рис. 129).

в) *Ответ:* $\frac{3\pi}{2}$. Имеем уравнение $\sin 3x + 5\cos 4x = 6$. Поскольку $\sin 3x, \cos 4x \leqslant 1$, то равенство возможно лишь если $\cos 4x = 1$ и $\sin 3x = 1$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, подставив во второе, видим, что $\sin \frac{3\pi k}{2} = 1$ при $k = 3, 7, \ldots$

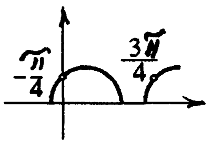

Рис. 129

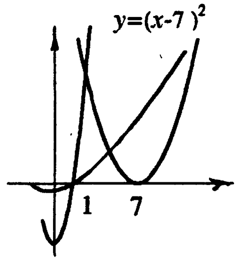

Рис. 130

3. Область определения есть $(1;7) \cup (7;+\infty)$, и в этом множестве $f(x) = \log_2 \frac{(x-7)^2}{x^2-1}$.

а) *Ответ:* 3. Имеем: $\log_2 \frac{(x-7)^2}{x^2-1} = 1$, или $(x-7)^2 = 2(x^2-1)$; решив уравнение, получим $x = -17; 3$, но -17 — посторонний корень.

б) *Ответ:* $(3;7) \cup (7;+\infty)$. Область определения данной функции — множество решений неравенства $f(x) < 1$, т. е. пересечение множества решений неравенства $\log_2 \frac{(x-7)^2}{x^2-1} < 1$ с $(1;7) \cup (7;+\infty)$.

в) *Ответ:* $a \geqslant 0$. Решения уравнения $f(x) = a$ совпадают с теми решениями уравнения $(x-7)^2 = 2^a(x^2-1)$, которые лежат на луче $(1;+\infty)$. Построим графики функций, заданных квадратичными выражениями $(x-7)^2$ и $c(x^2-1)$, $c > 0$ (рис. 130). Поскольку второй из графиков проходит через точку $(1,0)$, данное уравнение имеет корень, бо́льший единицы. При $0 < c < 1$ оно будет иметь еще один корень, бо́льший семи. Вместо геометрических соображений можно было провести стандартное исследование квадратного трехчлена $(c-1)x^2 + 14x - (c+49)$.

4. а) *Ответ:* $a > 3$. Уравнение $3x + \frac{2}{x} = ax$ равносильно уравнению $x^2 = \frac{2}{a-3}$, $x \neq 0$, которое имеет решение, если $\frac{2}{a-3} > 0$.

б) Поскольку $n(n+1) \geqslant 2$, то $x_n - x_{n+1} = -3n - \frac{2}{n} + 3(n+1) + \frac{2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n(n+1)} > 0$.

в) *Ответ:* $\frac{1}{6}(-11 \pm \sqrt{97})$. Предыдущие пункты дают подсказку: в данном уравнении следует сделать замену $y = 3x + \frac{2}{x}$, которая приводит к равносильному уравнению $\frac{2}{y-1} - \frac{7}{y+5} = 1$, поскольку $x \neq 0$ не является корнем исходного уравнения. Решая, находим $y = -11; 2$. Уравнение $3x + \frac{2}{x} = 2$ решений не имеет, решая $3x + \frac{2}{x} = -11$, получаем ответ.

Вариант 27

1. а) $(-1; 0) \cup (1; \log_2 3) \cup (\log_2 3; 2)$.

б) Объединение окружности $x^2 + y^2 = 4$ и частей прямых $x + y = \frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, лежащих вне ее (рис. 131).

в) *Ответ*: $4; \frac{4}{9}$. Уравнение параболы, проходящей через данные точки, имеет вид $y = -\frac{m}{2}(x+1)(x-2)$. Значение коэффициента m находим из условия единственности решения уравнения $-\frac{m}{2}(x + 1)(x-2) = 6 - 2x$.

г) $f(2) = 0$, $f(\frac{5}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f(-106{,}25) = -\frac{7}{16}$.

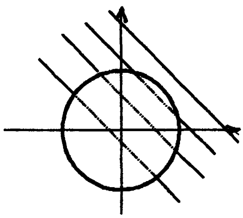

Рис. 131

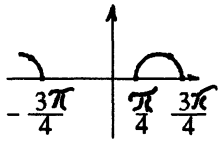

Рис. 132

2. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** См. рис. 132. **в)** $\frac{\pi}{2}$.

3. а) 2. **б)** $(2; 5) \cup (5; +\infty)$. **в)** $a \geqslant 0$.

4. а) $(-1; 0]$. **в)** $3; 5; 9 \pm \sqrt{66}$.

Вариант 28

1. а) *Ответ:* $\frac{3}{2}$. Подставив $x = \frac{3}{2}$, получим тождество $3 = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}$. Других решений уравнение не имеет, поскольку функция, стоящая в его левой части, строго возрастает, а в его правой части стоит строго убывающая функция.

б) *Ответ* — на рис. 133. Так как $x^2 + 4xy - 5y^2 = (x-y)(x+5y)$, то искомое множество есть объединение двух углов, являющихся решениями следующих систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + 5y \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + 5y \leqslant 0. \end{cases}$$

в) Если $a < b \leqslant 0$, то: $a^4 > b^4$, $-2a^3 > -2b^3$, $4a^2 > 4b^2$ и $-3a > -3b$, следовательно, $g(a) > g(b)$, т. е. функция монотонна, а значит обратима на луче $(-\infty; 0]$.

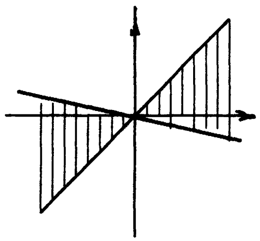

Рис. 133

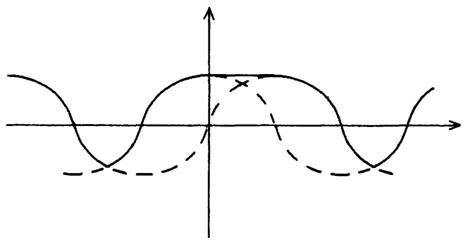

Рис. 134

г) *Ответ* — на рис. 134. Если $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\pi}{2} \in [x; x+\frac{\pi}{2}]$, следовательно, $\max\limits_{t\in[x;x+\frac{\pi}{2}]} \sin t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Синус убывает на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, поэтому $g(x) = \max\limits_{t\in[x;x+\frac{\pi}{2}]} \sin t = \sin x$ при $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. Нетрудно видеть, что $g(x) = \sin x$, если $x \in [\pi; \frac{5\pi}{4}]$. Наконец, $g(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ при $x \in [\frac{5\pi}{4}; 2\pi]$.

2. а) *Ответ:* $(1; 2)$. Делая замену $t = 2^x$, получаем неравенство $t^3 - 6t^2 + 8t < 0$; поскольку $t > 0$, то $t^2 - 6t + 8 < 0$, т. е. $t \in (2; 4)$, значит, $x \in (1; 2)$.

б) *Ответ:* $(0; 1]$. Замена $t = (\frac{3}{2})^x$ приводит к неравенству $\frac{5t}{9(t-1)} \geqslant 1 + \frac{1}{t}$, преобразуя, получаем неравенство $\frac{4t^2-9}{t-1} \leqslant 0$. Решая методом интервалов, имеем: $t \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup (1; \frac{3}{2}]$. Поскольку $t > 0$, то $t = (\frac{3}{2})^x \in (1; \frac{3}{2}]$ и $x \in (0; 1]$.

в) *Ответ:* $(-\infty; \log_2 \frac{a}{4})$ при $a > 0$; $(-\infty; \log_2(-\frac{a}{2}))$ при $a < 0$; при $a = 0$ решений нет. Ясно, что при $a = 0$ неравенство решений не имеет. При $a \neq 0$, сделав замену, получим квадратное неравенство $2z^2 + z - 1 < 0$, следовательно, $z \in (-1; \frac{1}{2})$. Если $a > 0$, то $\frac{2^{x+1}}{a} < \frac{1}{2}$ или $2^x < \frac{a}{4}$ (неравенство $\frac{2^{x+1}}{a} > -1$ верно при всех x). Взяв $a < 0$, видим, что $\frac{2^{x+1}}{a} > -1$ или $2^x < -\frac{a}{2}$, откуда и получаем ответ.

3. а) *Ответ:* $2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$, то $f(x) = g(\cos x - \sin x)$, где $g(t) = 3 - 2t - t^2$. Следовательно, замена $t = \cos x - \sin x$ приводит к уравнению $g(t) = 0$, откуда,

$t = 1; -3$. Поскольку $|t| \leqslant \sqrt{2}$, то $\cos x - \sin x = 1$, значит, $x = 2\pi k$ или $x = -\pi/2 + 2\pi k$.

б) *Ответ:* наименьшее значение $1 - 2\sqrt{2}$, наибольшее 4. Ясно (смотрите предыдущий пункт), что наибольшее и наименьшее значения функции f совпадают с наибольшим и наименьшим значениями квадратичной функции $y = 3-2t-t^2$ на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Очевидно (рис. 135), что наименьшее значение достигается при $t = \sqrt{2}$, а наибольшее — при $t = -1$. **в)** $g(t) = \frac{1}{2}t^2$.

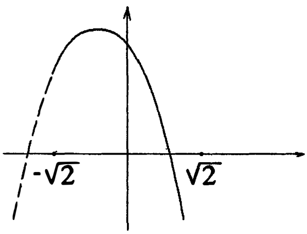

Рис. 135

4. а) *Ответ:* $(1; \sqrt{6} - 1]$. Область определения данного неравенства — луч $(1; +\infty)$. Преобразуя его, получаем $\log_4((x + 3)(x - 1)) \leqslant \log_4 \frac{16}{8}$, т. е. $x^2 + 2x - 5 \leqslant 0$, откуда $x \in [-1 - \sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}]$. Учтя область определения, находим ответ.

б) *Ответ:* $[\sqrt{6} - 1; 5)$. Область определения — интервал $(1; 5)$. Поскольку $\log_{0,19} 92 < 0$, то знаменатель правой части данного неравенства отрицателен в области его определения, поэтому оно равносильно неравенству $f(x) - 2 + \log_4 8 \geqslant 0$, откуда, используя проведенные в предыдущем пункте вычисления, и получаем ответ.

в) *Ответ:* $a \geqslant \sqrt{5}$. Перепишем условие в равносильной форме: $\log_a(x^2 + 2x - 3) < 2$ при всех $x \in (1; 2)$. Пусть $a > 1$. Поскольку функция, стоящая в правой части этого неравенства, является возрастающей, то оно верно при всех $x \in (1; 2)$ тогда и только тогда, когда ее значение при $x = 2$ не превосходит двух, т. е. $\log_a 5 \leqslant 2$, или $5 \leqslant a^2$, т. е. $a \geqslant \sqrt{5}$. Если $0 < a < 1$, то, так как выражение $x^2 + 2x - 3$ при x, близких к единице, сколь угодно близко к нулю, то $\log_a(x^2 + 2x - 3)$ может быть сколько угодно большим числом. Поэтому ни при каких таких a неравенство $\log_a(x^2 + 2x - 3) < 2$ не может выполняться при всех $x \in (1; 2)$.

Вариант 29

1. а) $-\frac{1}{2}$. б) См. рис. 136. **г)** См. рис. 137.

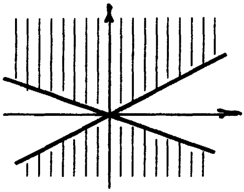

Рис. 136

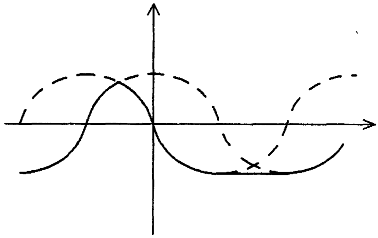

Рис. 137

2. а) $(-\infty; 0) \cup (\log_3 8; +\infty)$. **б)** $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. **в)** $(-\infty; \log_3 \frac{a}{3}))$ при $a > 0$; $(-\infty; \log_3(-\frac{a}{9}))$ при $a < 0$; при $a = 0$ решений нет.

3. а) $\pi + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** Наименьшее значение равно нулю, наибольшее $3 + 2\sqrt{2}$. **в)** $g(u) = -\frac{3}{2}u^2$.

4. а) $(2; 5)$. **б)** $(5; 7)$. **в)** $(1; \sqrt{7}]$.

Вариант 30

•1. а) Имеем: $f(x) = \dfrac{\sin(x - \frac{\pi}{6})\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})\sin(x + \frac{\pi}{6})}{\cos(x - \frac{\pi}{6})\cos(x + \frac{\pi}{6})} =$
$\dfrac{\sin 2x}{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos\frac{\pi}{3})} = \dfrac{4\sin 2x}{1 + 2\cos 2x}$.

б) *Ответ:* $\pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, $\frac{4\sin 2x}{1+2\cos 2x} = 3\,\mathrm{tg}\,x$, если $\sin x = 0$ или $8\cos^2 x = 3 + 6\cos 2x$, откуда $\cos 2x = 1$.

в) *Ответ:* $(\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k) \cup (-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть (для удобства) $z = 2x$. Точки 0, π, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$ разбивают единичную окружность на четыре дуги.

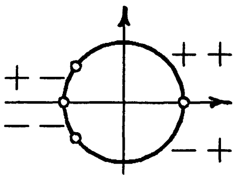

Рис. 138

На рис. 138 рядом с каждой такой дугой стоят знаки $\pm\pm$ в зависимости от знака числителя и знаменателя, т. е. знаков $\sin z$ и $1+2\cos z$. Таким образом, $2\pi k < z < \frac{2\pi}{3}+2\pi k$ или $2\pi k-\pi < z < 2\pi k - \frac{2\pi}{3}$.

г) *Ответ:* $\sqrt{3}$. Поскольку функции $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{6})$ и $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{6})$ возрастают на $[0;\frac{\pi}{6}]$, то их сумма достигает своего наибольшего значения на правом конце указанного отрезка.

2. а) $(-1;-\frac{1}{2})\cup(1;2)$. **б)** $-\frac{1}{2}; 2$.

в) *Ответ:* $g(x)=\frac{1}{2}(3\cdot 2^x-\sqrt{9\cdot 2^{2x}+4})$. Поскольку функция $y=\log_2 x$ монотонна, то достаточно проверить монотонность функции $y=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{x})$. Пусть $x_1>x_2$. Рассмотрим разность $\frac{1}{3}(x_1-\frac{1}{x_1})-\frac{1}{3}(x_2-\frac{1}{x_2})=\frac{1}{3}(x_1-x_2+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2})=\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{3x_1x_2}>0$, так как $x_1x_2>0$. Необходимо также отметить, что $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}>0$ при $x\in(-1;0)$. Для того чтобы найти формулу для обратной функции (ее существование доказывает монотонность), решим уравнение $f(x)=a$. Имеем $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{x})=2^a$, $x^2-3\cdot 2^a x-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}(3\cdot 2^a\pm\sqrt{9\cdot 2^{2a}+4})$. Так как по условию $x<0$, то $x=\frac{1}{2}(3\cdot 2^a-\sqrt{9\cdot 2^{2a}+4})$, откуда и следует ответ.

г) *Ответ:* решений нет при $a\leqslant -1$; одно решение при $-1<a\leqslant 1$; два — при $a>1$. Исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{x})=a-x$ при условии, что $x-\frac{1}{x}>0$, т. е. при $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$. График функции $y=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{x})$ изображен на рис. 139. Прямая $y=a-x$ может иметь с ним одну или две точки пересечения, или же может вообще не пересекаться с этим графиком.

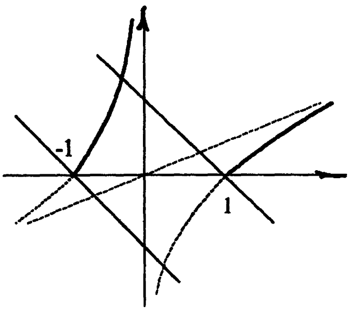

Рис. 139

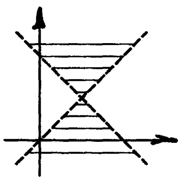
Рис. 140

3. а) См. рис. 140. **б)** Изобразим график функции $y=2x-x^2-3$

(рис. 141). Если $x \in [0;1]$, то $f(x) \in [-3;-2]$, значит, $-\pi < f(x) < -\frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos(f(x)) < 0$.

в) *Ответ:* $\frac{17}{4}$. Поскольку область значений функции $f(x)$ — луч $(-\infty;-2]$, а функция $y = 2^t + 2^{-t}$ убывает на этом луче, то $2^{f(x)} + 2^{-f(x)} \geqslant 2^{-2} + 2^2 = \frac{17}{4}$.

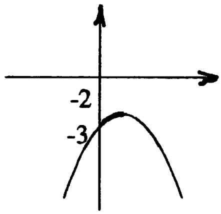

Рис. 141

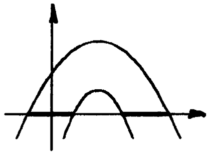
Рис. 142

г) *Ответ:* $[1-\sqrt{2};\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2};1+\sqrt{2}]$. График функции $y = f(x) + m^2, m \in [\frac{3}{2};2]$, лежит в полосе между графиками функции $y = f(x) + \frac{9}{4}$ и $y = f(x) + 4$ (рис. 142), поэтому точки его пересечения с осью абсцисс лежат в заштрихованных на этом рисунке отрезках.

Вариант 31

1. б) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \pi k) \cup (\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **г)** 0.

2. а) $(-3;-1) \cup (\frac{1}{3};1)$. **б)** $-3;\frac{1}{3}$. **в)** $g(x) = \sqrt{16 \cdot 3^{2x} + 1} - 4 \cdot 3^x$. **г)** Решений нет при $a \leqslant -2$, одно решение при $-2 < a \leqslant 2$, два — при $a > 2$.

3. а) См. рис. 143. **в)** $\frac{82}{9}$. **г)** $[-1-\sqrt{2};-\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2};-1+\sqrt{2}]$.

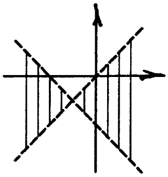
Рис. 143

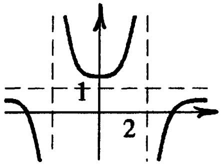

Рис. 144

Вариант 32

1. **а)** Доказательство проведем по индукции. Удобно сделать замену $t = 2^{-n}x$ и доказывать неравенство $\sin(2^n t) \leqslant 2^n|\sin t|$:

$$\sin(2^n t) = 2\sin(2^{n-1}t)\cos(2^{n-1}t) \leqslant |\sin(2^{n-1}t)| \leqslant 2^n|\sin t|.$$

б) Если предположить, что $\log_{n+2}(n^2+1) = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, то получим $(n+2)^p = (n^2+1)^q$, что невозможно, так как числа, стоящие в разных частях этого равенства, имеют различную четность.
в) $(n-1)n(n+1)(n+2)+1 = (n^2+n)(n^2+n-2)+1 = (n^2+n)^2 - 2(n^2+n)+1 = (n^2+n-1)^2$.

2. **а)** $1; \dfrac{-1\pm\sqrt{241}}{8}$. **б)** См. рис. 144.
в) *Ответ:* нет, не существует. Если $\frac{x^2-5}{x^2+m} = a$, то $x^2 = \frac{-ma-5}{a-1}$, а выражение $-\frac{ma+5}{a-1}$ ни при каком m не может быть неотрицательным при всех $a \neq 1$.

3. Удобно сразу сделать следующее преобразование:

$$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} = \frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{\sin 2x+1}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x}.$$

Однако следует иметь в виду, что полученное равенство не является тождеством, так как область определения самой первой дроби отличается от области определения всех последующих!
а) $f(\frac{\pi}{8}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + (\cos\frac{\pi}{4})^{-1} = 1+\sqrt{2}$.
б) *Ответ:* $(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. В данном неравенстве мы вправе сделать приведенное только что преобразование (почему?), в результате получим неравенство

$$\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x \geqslant 0, \quad \text{или} \quad \frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} \geqslant 0.$$

Обратите внимание, что если в левой части последнего неравенства сделать естественное сокращение, то полученное неравенство не будет равносильно исходному!
в) *Ответ:* $(-\infty; -2-\sqrt{3}]\cup[1;\infty)$. Так как $\cos x \neq 0$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{3}]$, то мы вправе записать, что $f(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = -1 + \frac{2}{1-\operatorname{tg} x}$. График функции $y = -1+\frac{2}{1-t}$ изображен на рис. 145. Поскольку $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$, то $t = \operatorname{tg} x \in [0; \sqrt{3}]$. Значения a, при которых существуют решения данного уравнения, совпадают со значениями, входящими в

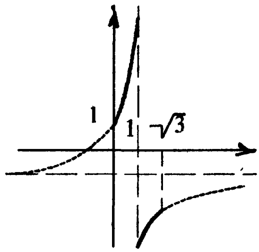

Рис. 145

область значений функции $y = \frac{1+t}{1-t}$ при $t \in [0; 1) \cup (1; \sqrt{3}]$ (соответствующая часть графика выделена на рис. 145).

4. **а)** $[\sqrt[5]{4}; 4]$. **б)** *Ответ:* $8 + 4\sqrt{6}; 2$. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} \frac{x}{4} = \sqrt{x+2}, \\ x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}, \\ x > 0. \end{cases}$

в) *Ответ:* $a = -\frac{5}{4}$ или $a > 1$. Так как функция f монотонна, то решениями данного уравнения являются все решения уравнения $x^2 - x - 1 = a$, удовлетворяющие условию $x > -1$. Таким образом, мы должны найти те значения c функции $y = x^2 - x - 1$, для которых уравнение $x^2 - x - 1 = c$ имеет единственное решение на луче $(-1; \infty)$. Ответ ясен из графика этой функции (рис. 146).

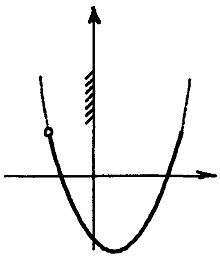

Рис. 146

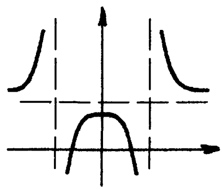

Рис. 147

Вариант 33

2. **а)** $-1; \frac{-1\pm\sqrt{73}}{4}$. **б)** См. рис. 147. **в)** Нет, не существует.

3. **б)** $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $(-\infty; -2 + \sqrt{3}] \cup [1; \infty)$.

4. **а)** $[1; 3\sqrt{3}]$. **б)** $1; 6$. **в)** $a = \frac{7}{4}$ или $a \geqslant 4$.

Вариант 34

1. а) $f(g(x)) = \frac{x+5}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$, значит, $(f(g(1)))' = -7$ и $y = -7x + 1$ — уравнение касательной.

б) $((x^2 - 3x + 2)^3)' = 3\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 (2x - 3)$. Итак, касательная параллельна оси абсцисс при $x = 1; \frac{3}{2}; 2$, образует тупой угол с этой осью при $x < \frac{3}{2}$, $x \neq 1$.

в) *Ответ:* $y = \frac{1}{2}(x - 3)$. Уравнение касательной, проходящей через точку с абсциссой x_0 на графике данной функции: $y + \sqrt{2 - x_0} = \frac{x - x_0}{2\sqrt{2 - x_0}}$. Поскольку эта прямая проходит через точку $A(3, 0)$, то $\sqrt{2 - x_0} = \frac{3 - x_0}{2\sqrt{2 - x_0}}$. Решая уравнение, получаем $x_0 = 1$.

г) Пусть $A(0, y_1)$ и $B(x_1, 0)$ — точки пересечения касательной с осями координат. Покажем, что $OA/OD = OC/OB$. Уравнение касательной, проходящей через через точку M: $y - \frac{2}{x_0} = -\frac{2(x - x_0)}{x_0^2}$, откуда $y_1 = \frac{4}{x_0}$, $x_1 = 4x_0$, значит, $|x_1 y_1| = OA \cdot OB = 16 = OC \cdot OD$.

2. а) 6. **б)** $[2; 4) \cup [6; +\infty)$.

в) Построим график функции $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{4 + x}$ (рис. 148), $f'(x) = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{2\sqrt{16 - x^2}}$. Функции f и $y = x^2 + a$ четны, рассмотрим их на отрезке $[0; 4]$. Поскольку одна функция возрастает, а вторая убывает на этом отрезке, то данное уравнение заведомо имеет не более одного решения, которое существует тогда и только тогда, когда $f(0) \geqslant a$ и $f(4) \leqslant 16 + a$, т. е. $\begin{cases} a \leqslant 4, \\ a \geqslant 2\sqrt{2} - 16. \end{cases}$ Осталось заметить, что при $a = 4$ данное уравнение имеет одно решение $x = 0$, при $a \in [2\sqrt{2} - 16; 4)$ — два решения противоположных знаков.

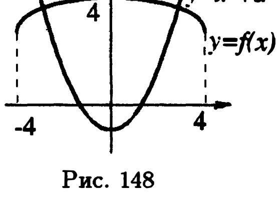

Рис. 148

г) *Ответ:* $n = 7$. Преобразуем данное неравенство:

$$\sqrt{4k + 1} - 2\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{4k + 1} + 2\sqrt{k}} < 0{,}1.$$

Поскольку $\sqrt{4k+1} > 2\sqrt{k}$, то неравенство заведомо выполнено, если $\frac{1}{4\sqrt{k}} < 0{,}1$, т.е. $\sqrt{k} > 2{,}5$, $k > 6{,}25$. Следовательно, можно взять $n = 7$.

3. а) Ясно, что $p = 1 + \cos\varphi + \sin\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

б) Очевидно, что так как сумма катетов больше гипотенузы, то периметр прямоугольного треугольника больше двух, поэтому треугольника с периметром $\frac{9}{5}$ не существует. Однако уравнение $\cos\varphi + \sin\varphi = \frac{4}{5}$ имеет решение. В чем же дело?

в) Вместо того чтобы исследовать функцию $p(\varphi)$, лучше записать: $p(\varphi) = 1 + \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$, $\varphi + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$, поэтому множество значений функции p — промежуток $(2; 1 + \sqrt{2}]$.

г) Используйте (а сначала проверьте) равенства:

$$\cos\frac{\pi}{64} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}, \quad \sin\frac{\pi}{64} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}.$$

Вариант 35

1. а) $y = -4x - 1$. **б)** Параллельна оси абсцисс при $x = 2$, образует с ней тупой угол при $x \in (2; 5) \cup (5; +\infty)$, острый угол — при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$. **в)** $y = 3x - 13$, $y = -9x - 13$.

2. а) 4. **б)** $(-\infty; 4] \cup (6; 8]$. **в)** Не имеет решений при $a < 4$, при $a \geqslant 4$ имеет два решения. **г)** Например, $k = 5$.

3. б) Ни при каком. **в)** $(1; \sqrt{2}]$. **г)** См. вариант 34.

Вариант 36

1. а) *Ответ:* функция g возрастает на $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $[0; \sqrt{2}]$, убывает на $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; +\infty]$. Если $x_1 < x_2 \leqslant -\sqrt{2}$, то $x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1 \geqslant 1$, значит, $g(x_1) = f(x_1^2 - 1) < f(x_2^2 - 1) = g(x_2)$, а если $-\sqrt{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $1 \geqslant x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1$, поэтому $g(x_1) > g(x_2)$. В оставшихся случаях можно провести аналогичные рассуждения или же воспользоваться четностью функции.

Приведем еще одно решение этой задачи. Предположим дополнительно, что функция f имеет производную. Тогда $f'(y) \geqslant 0$ при $y \leqslant 1$ и $f'(y) \leqslant 0$ при $y \geqslant 1$, следовательно, $f'(x^2 - 1) \geqslant 0$, если $x^2 - 1 \leqslant 1$, т. е. $|x| \leqslant \sqrt{2}$, и $f'(x^2 - 1) \leqslant 0$ при $|x| \geqslant \sqrt{2}$. Осталось заметить, что $g'(x) = f'(x^2 - 1)\,2x$, поэтому $g'(x) \geqslant 0$, если $f'(x^2 - 1) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, т. е. $x \in [\sqrt{2}; +\infty)$, или же если $f'(x^2 - 1) \leqslant 0$, $x \leqslant 0$, т. е. $x \in [-2; 0]$.

б) *Ответ:* $y = \frac{3x}{4} \pm 1$. Если $A(1, y_1)$, $B(4, y_2)$ — точки на графике данной функции, то $y_1 = 2$, $y_2 = 17/4$, а угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{y_2 - y_1}{4-1} = \frac{3}{4}$. Абсциссы точек касания искомых касательных с графиком функции h суть решения уравнения $h'(x) = \frac{3}{4}$, т. е. $1 - \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$, откуда $x_0 = \pm 2$. Подставляя значение x_0 в уравнение касательной $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$, получаем ответ.

в) *Ответ:* $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4})$. Множество значений функции $y = \operatorname{tg}\theta(x) = h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ есть луч $(-\infty; 1)$.

г) *Ответ:* $y = \frac{3x}{4} \pm 1$. Уравнение касательной в произвольной точке (x_0, y_0) графика есть $y - (x_0 + \frac{1}{x_0}) = (1 - \frac{1}{x_0^2})(x - x_0)$, или $y = \frac{x_0{}^2 - 1}{x_0{}^2} x + \frac{2}{x_0}$, а ее пересечения с осями координат — суть точки $A(0, \frac{2}{x_0})$ и $B(\frac{2x_0}{1 - x_0{}^2}, 0)$. Поэтому площадь треугольника OAB равна $\frac{2}{|1 - x_0^2|}$. Решая уравнение $\frac{2}{|1 - x_0^2|} = \frac{2}{3}$ и подставляя найденные значения в общее уравнение касательной, получаем ответ.

2. а) *Ответ* — на рис. 149. Если $x > 0$, то $0 < x \leqslant \sin y$; если $x < 0$, то $\sin y \leqslant x < 0$.

б) *Ответ:* $\pm\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}\cos^2 2x$. Делая замену $t = \cos 2x$, получаем уравнение $t^2 + t - 1 = 0$, откуда $t_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Осталось учесть, что $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) < -1$.

в) *Ответ:* $[\frac{3}{8}; \frac{3}{2}]$. Множество значений функции f совпадает с множеством значений функции $g(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t + 1)$ на отрезке $[-1; 1]$.

г) *Ответ:* $\frac{\pi}{3}$. Наибольшая длина промежутка монотонности совпадает с наибольшей длиной промежутка постоянства знака производной данной функции. Имеем: $f'(x) = -\sin 2x(2\cos 2x + 1) = 0$, если $x = \frac{\pi k}{2}$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. Найденные значения разбивают прямую на отрезки, среди которых наибольшую длину имеет $[0; \frac{\pi}{3}]$.

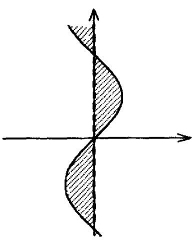

Рис. 149

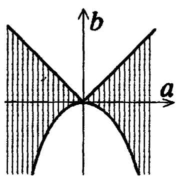

Рис. 150

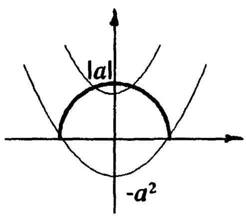

Рис. 151

3. **а)** $(-\infty; 2) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3)$. **б)** $(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3)$.
в) *Ответ:* -2. Обозначив $u = 2x^2 - 1$, $v = x^2 - 3x - 2$, $w = 2x + 4$, получим уравнение $\sqrt{u} + \sqrt{v} = \sqrt{u+w} + \sqrt{v+w}$, левая часть которого меньше (больше) правой, если $w > 0$ ($w < 0$). Следовательно, его решением может быть только $x = -2$.
г) *Ответ* — на рис. 150. Данное уравнение имеет решение, если верхняя полуокружность радиусом $|a|$ и парабола $y = x^2 + b$ пересекаются, т. е. если $-a^2 \leqslant b \leqslant |a|$ (рис. 151).

Вариант 37

1. **а)** Убывает на $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $[0; \sqrt{2}]$, возрастает на $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; +\infty)$. **б)** $y = \frac{3x}{2} \pm 2$. **в)** $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$. **г)** $y = 3x \pm 4$.
2. **а)** См. рис. 152. **б)** $\pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $[\frac{3}{8}; \frac{3}{2}]$. **г)** $\frac{\pi}{3}$.

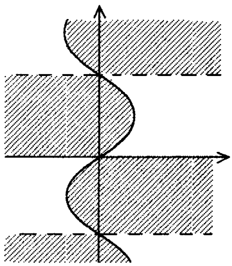

Рис. 152

3. **а)** $(-3; -\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \cup (-2; +\infty)$. **б)** $(-3; -\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-3}{2}; +\infty)$. **в)** -2.
г) Множество, заданное неравенством $|a|\sqrt{2} \geqslant b^2$ (нарисуйте его).

Вариант 38

1. **а)** *Ответ:* $y = x - \frac{7\pi}{2}$. Так как $1 = k = (\cos x)'|_{x=x_0} = -\sin x_0$, то $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $y_0 = \cos x_0 = 0$. Из условия прохождения прямой $y = x + \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ через данную точку получаем, что $-3\pi = \pi - 2\pi n$, т. е. $n = 2$.
б) *Ответ:* $(-3, 3)$, $(6, 48)$. Из условия прохождения касательной

$$y + 4x_0 - \frac{x_0^3}{3} = (x_0^2 - 4)(x - x_0)$$

через точку $(0, 18)$ получаем уравнение $-\frac{2}{3}x_0^3 = 18$, откуда $x_0 = -3$. Таким образом, касательная имеет уравнение $y = 5x + 18$.

Точки пересечения касательной и графика функции — решения уравнения $\frac{1}{3}x^3 - 4x = 5x + 18$. Так как одно его решение нам известно — это $x = -3$, то для нахождения остальных получаем квадратное уравнение.

в) *Ответ:* $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (рис. 153).

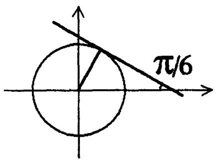

Рис. 153

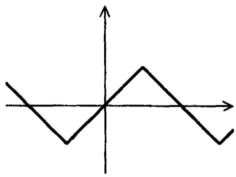

Рис. 154

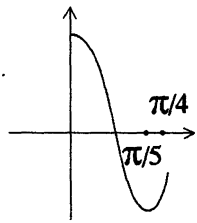

Рис. 155

г) *Ответ:* $(\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \frac{\pi}{2})$, $k \in Z$. Если $t = \arcsin(\sin x)$, то $\sin t = \sin x$, причем $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, поэтому

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]; \\ \pi - 2\pi k - x, & x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]. \end{cases}$$

График функции $y = \arcsin(\sin x)$ представляет собой “пилу”, которая не имеет касательных в своих “зубцах” (рис. 154). Для аккуратного доказательства последнего утверждения следует вспомнить определения производной и предела функции.

2. а) *Ответ:* $|m| \leqslant 4$, $m \neq 0$. Так как функция f четна, то достаточно рассматривать случай $m > 0$. Уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения, если функция f обратима на указанном множестве. Таким образом, в данном случае нужно, чтобы $[0; \frac{m\pi}{4}] \subset [0; \pi]$ (см. рис. 155, на котором изображена часть графика в случае $m = 5$).

б) *Ответ:* $m \geqslant -2$. Вершина параболы должна лежать левее прямой $x = 1$.

в) *Ответ:* $|m| \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. В данном случае функция должна быть монотонна, значит, при всех $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = x^2 - 3mx + (x^2 + 2) \geqslant 0$, что верно, если $9m^2 - 4(m^2 + 2) \leqslant 0$.

3. а) 1. **б)** $(0; 1] \cup (2; 2 + \sqrt{10}]$.

в) *Ответ:* $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем: $\cos x \leqslant 0$, а при помощи несложных преобразований данное уравнение приводится к уравнению $\sin x = 0$.

4. **а)** *Ответ:* $[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Числа x, y, являющиеся решениями данной системы, — суть корни квадратного уравнения $x^2 - 2x\sin\alpha + \cos\alpha + 1 = 0$, которое разрешимо, если $\sin^2\alpha - \cos\alpha - 1 \geqslant 0$, т. е. $\cos\alpha(\cos\alpha + 1) \leqslant 0$. Значит, $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 0$, откуда и следует ответ.

б) *Ответ:* $\pm\arccos(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4\sin^2\alpha - 2(\cos\alpha + 1) = 2 - 2\cos\alpha - 4\cos^2\alpha$, таким образом, получаем уравнение $4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$, откуда $\cos\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Осталось заметить, что, в силу результата предыдущего пункта, $\cos\alpha \leqslant 0$.

в) *Ответ:* $[0; \frac{9}{4}]$. Искомое множество совпадает с множеством значений функции $y = 2 - 2t - 4t^2$ на отрезке $[-1; 0]$.

Вариант 39

1. **а)** $y = -x - \pi$. **б)** $(-1, -3), (2, 12)$. **в)** $-\sqrt{3}$. **г)** $(\pi k, 1 - (-1)^k \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. **а)** $|m| \leqslant 2$, $m \neq 0$. **б)** $m \geqslant -4$. **в)** $|m| \geqslant 2\sqrt{2}$.

3. **а)** 0. **б)** $(-1-\sqrt{10}; -1) \cup [0; 1)$. **в)** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. **а)** $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** $(-1)^k \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $[0; \frac{9}{4}]$.

Вариант 40

1. **а)** 4. **б)** *Ответ:* $[4; 7)$. Решение, в котором используются аналитические методы: функции f и g монотонно возрастающие, следовательно, $f(x) + g(x) - 4 > 0$ при $x > 4$ и $2 - g(x) > 0$ при $x < 7$.

в) *Ответ:* $[3; +\infty)$ при $m \leqslant 1$, решений нет при $m > 1$. Преобразуем данное неравенство к виду $(m-1)f(x) \leqslant (m-1)g(x)$. Если $m > 1$, то оно равносильно неравенству $\sqrt{2x+1} \leqslant \sqrt{x-3}$, которое решений не имеет. Если $m = 1$, то ответ — вся область определения. Если $m < 1$, то получим неравенство $\sqrt{2x+1} \geqslant \sqrt{x-3}$, которое справедливо также при всех $x \geqslant 3$.

г) *Ответ:* $a \leqslant \sqrt{2}$. Будем рассуждать формально. Если $a \leqslant 0$, то неравенство очевидно имеет место. Если $a > 0$, то, возведя в квадрат, получим, что должно быть верно $(2 - a^2)x + 3a^2 + 1 \geqslant 0$ при всех достаточно больших x, откуда $2 - a^2 \geqslant 0$.

2. а) Если данная прямая — касательная, то точка касания определяется из уравнения $2x^3 - 1 = -\frac{3}{4}$, откуда $x = \frac{1}{2}$. Далее — прямая проверка.

б) Приведем два различных доказательства. Первое: $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2} - 1 > 0$ при $a, b \geqslant 1$. Второе: данное неравенство означает, что функция f монотонно возрастает на луче $[1; +\infty)$, что имеет место, так как $f'(x) = 2x^3 - 1 > 0$ при всех $x \geqslant 1$.

в) Если $x \leqslant 0$ и $\frac{1}{2}x^4 - x \leqslant n$, то $x^4 \leqslant 2n$ и $x \geqslant -\sqrt[4]{2n}$. Если $x \geqslant 2$, то $\frac{1}{2}x^4 - x \geqslant \frac{x^4}{4}$, поэтому из неравенства $f(x) \leqslant n$ следует, что $x \leqslant \sqrt[4]{4n}$. Поэтому все целочисленные решения неравенства $f(x) \leqslant n$ лежат в отрезке $[-\sqrt[4]{2n}; \sqrt[4]{4n}]$, откуда $\mathrm{num}(n) \leqslant 1 + (\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4})\sqrt[4]{n}$, что меньше, к примеру, чем $4\sqrt[4]{n}$. Значит, $\frac{\mathrm{num}(n)}{n} \leqslant \frac{4\sqrt[4]{n}}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$, откуда и следует требуемое утверждение.

3. а) Если x — целое, то числа x и x^2 имеют одинаковую четность, поэтому $f(x) = f(x^2)$. Далее, $f(x) = f(x^2) \iff \pi x^2 + 2\pi k = \pm\pi x \iff x^2 \pm x + 2k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Как известно, рациональный корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, у которого коэффициент при старшей степени равен единице, есть целое число.

б) *Ответ:* бесконечная сетка прямых, часть которых изображена на рис. 156. Если $\cos^2(\pi x) + \cos^2(\pi y) = 1$, то $\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y) = 0$ или $\cos(\pi(x+y))\cos(\pi(x-y)) = 0$, т. е. $x + y = k + \frac{1}{2}$ или $x - y = k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

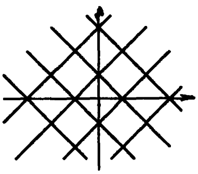

Рис. 156

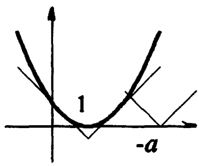

Рис. 157

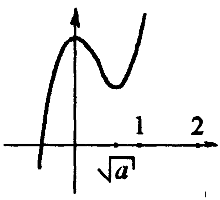

Рис. 158

в) *Ответ:* 12 решений. Если $f(x) = f(y)$, то $y = \pm(x + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, таким образом, первое уравнение системы задает сетку прямых, а второе — окружность, которая, как нетрудно видеть, пересечет всего шесть прямых из всей этой сетки.

4. а) *Ответ:* $a < -\frac{5}{4}$ или $a > -\frac{3}{4}$. Приведем геометрическую иллюстрацию к данной задаче. Касательные к графику функции

$y = (x-1)^2$, параллельные прямым $y = \pm x$, пересекают ось абсцисс в точках $x = \frac{3}{4}; \frac{5}{4}$ (рис. 157). Если вершина (точка с абсциссой $-a$) графика $y = |x+a|$ лежит на отрезке $[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}]$, то он имеет по крайней мере три точки пересечения с параболой. Поэтому $-a < \frac{3}{4}$ или $-a > \frac{5}{4}$.

б) *Ответ:* $[0;1]$. Из условия задачи следует, что $x = 0$ — точка максимума, а $x = \sqrt{a}$ — точка минимума (случай $a = 0$ очевиден). Поэтому (рис. 158) наименьшее на отрезке $[1;2]$ значение данной функции будет достигаться при $x = 1$, если $\sqrt{a} \leqslant 1$, т. е. если точка минимума лежит левее единицы.

в) *Ответ* $0; 4$. Поскольку касательная в точке с абсциссой x параллельна прямой $y = ax$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = a$, то нужно найти такие значения a, при которых уравнение $x^3-3x+2 = a$ имеет два решения. Таким образом, искомые значения параметра a — это экстремальные значения функции $y = x^3 - 3x + 2$.

Вариант 41

1. а) 7. **б)** $[7;19)$. **в)** $[3;+\infty)$ при $m \leqslant 1$, решений нет при $m > 1$. **г)** $a \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. б) См. рис. 156. **в)** 10 решений.

4. а) $(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4})$. **б)** $[0;1]$. **в)** $-4; 0$.

Вариант 42

1. а) *Ответ:* 0. Положив $t = 2^x$, получим $(t-1)^2(t+2) = 0$.

б) *Ответ:* -2. Наименьшее значение функции f совпадает с наименьшим значением $g(t) = t^3 - 3t$ при $t > 0$; находим $g'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$, следовательно, $t = 1$ — точка минимума и $\min f(x) = -2$.

в) *Ответ:* $x \leqslant \log_2 3$. Сделав ту же замену $t = 2^x$, придем к неравенству $t(t^2 - 2t - 3) \leqslant 0$. Учитывая, что $t > 0$, получаем $0 < t \leqslant 3$.

г) *Ответ:* одна пара, $x_1 = -x_2 = \log_2 \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика симметричны относительно начала координат в том и только том случае, если $x_1 = -x_2$ и $f(x_1) = -f(x_2)$, т. е. $f(x_1) = -f(-x_1)$, или $8^{x_1} - 3 \cdot 2^{x_1} = -\left(8^{-x_1} - 3 \cdot 2^{-x_1}\right)$. Пусть $t = 2^{x_1} > 0$. Имеем: $t^3 - 3t + \frac{1}{t^3} - \frac{3}{t} = \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 4\right) = 0$, откуда $t = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

2. **а)** Имеем: $\cos 2x + \cos x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2(1+\cos x) = 2\cos^2 x - \cos x - 3$, поэтому $g(t) = 2t^2 - t - 3$.
б) *Ответ:* $\frac{\pi}{2}+\pi k; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем: $2\cos^2 x - \cos x - 3 = -3$, откуда $\cos x = 0; \frac{1}{2}$. **в)** Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $2\cos^2 x - \cos x - 3 = (2\cos x - 3)(\cos x + 1) \leqslant 0$.
г) *Ответ:* нет решений при $a < -\frac{25}{8}$, $a > 0$, одно решение при $a = -\frac{25}{8}$, $-2 < a \leqslant 0$, два при $-\frac{25}{8} < a \leqslant -2$. Сделаем замену $t = \cos x$. Так как косинус монотонен на отрезке $[0;\pi]$, то число решений данного уравнения на этом отрезке совпадает с числом решений уравнения $2t^2 - t - 3 = a$ на отрезке $[-1;1]$, т. е. с числом точек пересечения прямой $y = a$ с графиком функции g, где $g(t) = 2t^2 - t - 3$, $t \in [-1;1]$ (рис. 159).

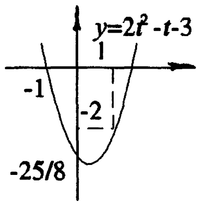

Рис. 159

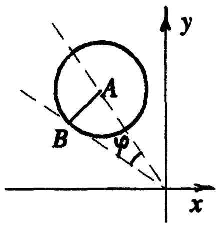

Рис. 160

3. **а)** Преобразуем данное уравнение: $|iz+2+2i| = |i(z+2+2/i)| = |z-(2i-2)| = 1$, следовательно, множество C — окружность с центром в точке $A(-2,2)$ и радиусом единица (рис. 160).
б) *Ответ:* $\frac{-13+14i}{5}; \frac{-13+6i}{5}$. Пусть $z = x + iy$ — искомая точка. Так как расстояние до мнимой оси равно $|x|$, а $|z-(2i-2)| = \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$, то решая систему $\begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2 = 1, \\ |x| = \frac{13}{5}, \end{cases}$ и получим ответ. **в)** $|z| \in [2\sqrt{2}-1; 2\sqrt{2}+1]$.
г) Ясно, что $\arg z \in [\frac{3\pi}{4} - \varphi; \frac{3\pi}{4} + \varphi]$, где $\varphi = \angle AOB$ (см. рис. 160). Так как $AB = 1$, $OA = 2\sqrt{2}$, то $\varphi = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Пусть a, b, c — длины ребер данного параллелепипеда. Тогда $S = 2(ab+bc+ca)$, а $a^2+b^2+c^2 = 1$.
а) Пусть $k_1 = \frac{a}{c}$, $k_2 = \frac{b}{c}$. Имеем: $c^2(1+k_1^2+k_2^2) = 1$ и $S(k_1,k_2) = 2c^2(k_1+k_2+k_1k_2) = 2\frac{k_1+k_2+k_1k_2}{k_1^2+k_2^2+1}$.
б) Неравенство $S(k,k) = 2\frac{k^2+2k}{2k^2+1} \leqslant 2$ равносильно $k^2+2k \leqslant 2k^2+1$, или $(k-1)^2 \geqslant 0$.

в) Введем функцию $f(k) = S(2,k) = 2\frac{3k+2}{k^2+5}$, $k > 0$. Имеем: $f'(k) = -2\frac{3k^2+4k-15}{(k^2+5)^2}$, значит, $f(\frac{5}{3}) = 1{,}8$ — искомое наибольшее значение.

г) Пусть $g(k) = S(ak,k) = 2\frac{ak^2+(a+1)k}{(a^2+1)k^2+1}$. Вычислив производную, получим, что ее корни — это корни уравнения $(a+1)(a^2+1)k^2 - 2ak - (a+1) = 0$, дискриминант которого равен $4(a^2+a+1)^2$. Следовательно, искомое значение $k = \frac{a+1}{a^2+1}$ (нетрудно показать, что при найденном k значение функции g наибольшее).

5. **а)** *Ответ:* $(1,1)$ и $(5,25)$. Уравнение касательной к графику данной функции, проходящей через точку графика с абсциссой x_1, будет $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$. Эта прямая проходит через точку $B(3,5)$ тогда и только тогда, когда $5 = 6x_1 - x_1^2$, откуда $x_1 = 1; 5$.

б) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

в) Площадь s криволинейного треугольника ABC (рис. 161) равна

$$s = \int_1^3 x^2\,dx - \frac{1}{2} \cdot 2(1+5) = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 - 6 = \frac{8}{3} = \frac{2}{3}S_{ABC}.$$

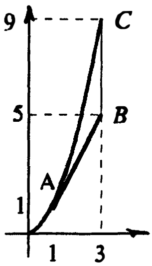

Рис. 161

г) Поскольку точка $B(x_0, y_0)$ лежит на касательной к графику, проведенной в точке $A(x_1, x_1^2)$, то $y_0 = 2x_1x_0 - x_1^2$. Далее, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK \cdot BC = \frac{1}{2}(x_0 - x_1)(x_0^2 - y_0) = \frac{1}{2}(x_0 - x_1)^3$, $s = \int_{x_1}^{x_0} x^2\,dx - (x_0 - x_1)\frac{x_1^2+y_0}{2} = \frac{(x_0-x_1)^3}{3} = \frac{2}{3}S_{ABC}$.

Вариант 43

1. **а)** $1; \log_3 \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$. **б)** -16. **в)** $(-\infty; \log_3 2\sqrt{3})$. **г)** Одна пара.

2. **а)** $g(t) = 2t^2 - 2t + 1$. **б)** $\pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $[\frac{1}{2}; 5]$. **г)** Одно решение при $a = \frac{1}{2}$, $a \in (1; 5]$, два решения при $a \in (\frac{1}{2}; 1]$.

Вариант 44

3. **а)** *Ответ:* $(-1, \frac{1}{2}); (3, \frac{9}{2})$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной прямой $y = x$, есть $y = x + \frac{3}{2}$. Ответ получим, решив систему $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = x + \frac{3}{2}. \end{cases}$

б) Площадь сегмента (рис. 162) равна разности

$$\frac{1}{2} \cdot 4\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) - \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{16}{3}.$$

в) В общем случае $S = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{6}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3$.

г) *Ответ:* $2\sqrt{3}$. Пусть k — угловой коэффициент прямой AB. Из системы $\begin{cases} y = kx + \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ найдем $|x_2 - x_1| = \sqrt{4k^2 + 12}$, откуда $S(k) = \frac{1}{12}(4k^2 + 12)^{3/2}$ и $\min S(k) = S(0) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

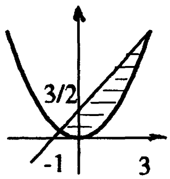

Рис. 162

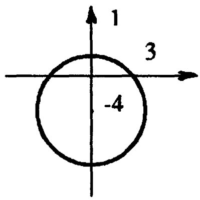

Рис. 163

4. **а)** *Ответ:* окружность (рис. 163). Пусть $z = x + iy$. Имеем:

$$|1 - (i+1)z| = |1 + y - x + i(x + y)| = \sqrt{(1 + y - x)^2 + (x + y)^2},$$
$$|i(z - 1) + 3| = |3 - y + i(x - 1)| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2},$$

откуда, произведя тождественные преобразования, получим уравнение $x^2 + y^2 + 8y = 9$, или $x^2 + (y+4)^2 = 25$. Значит, это уравнение задает окружность с радиусом, равным пяти, и с центром в точке $(0, -4)$.

б) Из системы $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8y = 9, \\ |y| = 3, \end{cases}$ получим, что $z = \pm 2\sqrt{6} - 3i$.

в) Ясно, что если точка $M(z)$ лежит на данной окружности C, то $|z| = OM \in [5 - OA; 5 + OA] = [1; 9]$.

г) Поскольку начало координат лежит внутри окружности C, то множество значений $\arg z$ для точек $M(z) \in C$ совпадает с $[0; 2\pi)$.

Вариант 45

3. а) Решая систему $\begin{cases} y = x, \\ y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}, \end{cases}$ получим $y = x = \sqrt{2}$. Так как $y' = \frac{-x}{2\sqrt{3-x^2/2}} = -\frac{1}{2}$ при $x = \sqrt{2}$, то уравнение касательной: $y - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$, или $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$.

б) Поскольку точки A и B пересечения этой касательной с осями имеют координаты $(3\sqrt{2}, 0)$ и $(0, \frac{3}{\sqrt{2}})$, то $S_{AOC} = \frac{9}{2}$.

в) Имеем $y'(x_0) = \frac{-x_0}{2\sqrt{3-x_0^2/2}} = -\frac{x_0}{2y_0}$, значит, $y - y_0 = -\frac{x_0}{2y_0}(x - x_0)$ — уравнение касательной, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Преобразуя его, получаем $y = \frac{-x_0x + x_0^2 + 2y_0^2}{2y_0} = -\frac{x_0}{2y_0}x + \frac{3}{y_0}$. Точки пересечения с осями координат — это $A(\frac{6}{x_0}, 0)$ и $B(0, \frac{3}{y_0})$, следовательно, $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{9}{x_0y_0}$.

г) *Ответ:* $3\sqrt{2}$. Так как $x_0y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}y_0\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_0^2}{2} + y_0^2\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $S = \frac{9}{x_0y_0} \geqslant 3\sqrt{2}$, причем $S = 3\sqrt{2}$ при $x_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, следовательно, минимальное значение площади есть $3\sqrt{2}$.

Вариант 46

1. а) $x = 1$; $x \geqslant 8$. б) $\frac{1}{2}; 4$.

в) *Ответ:* $a > -\frac{5}{4}$. Сделав в неравенстве $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x < a\log_2 x$ замену, получим неравенство $t(t^2 - 3t - a) < 0$, которое верно при всех $t \in [1; \frac{5}{2}]$ тогда и только тогда, когда $a > \max\limits_{[1;5/2]}(t^2 - 3t) = -\frac{5}{4}$.

г) График функции $g(t) = t^3 - 3t^2$ изображен на рис. 164. Уравнение $f(x) = a$ имеет один корень при $a < -4$, $a > 0$, два — при $a = -4; 0$, три корня при $-4 < a < 0$.

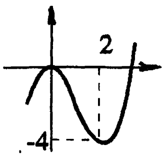

Рис. 164

2. Сделаем сначала преобразование $\sin 3x \sin x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2}(-2\cos^2 2x + \cos 2x + 1)$.

а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) *Ответ:* 2π. Если $\sin x\sin 3x=0$, то $x=\frac{\pi k}{3}$. Подставив его во второе уравнение, получим равенство $\cos\frac{5\pi k}{3}=1$. Наименьшее положительное k, при котором оно верно, — это $k=6$.

в) *Ответ:* $[-1;\frac{9}{16}]$. Область значений данной функции совпадает с множеством значений функции $g(t)=\frac{1}{2}(-2t^2+t+1)$ при $t\in[-1;1]$.

г) *Ответ:* 0. Поскольку $\sin 3x$ обращается в ноль на любом отрезке длиной $\frac{\pi}{2}$, то $g(t)\equiv\min\{\sin x\sin 3x \mid x\in[t;t+\frac{\pi}{2}]\}\leqslant 0$ при всех действительных t. Но $\sin x\sin 3x\geqslant 0$ на $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$, поэтому $g(-\frac{\pi}{4})=0$, так что наибольшее значение функции g равно нулю.

3. а) *Ответ:* 1. Искомое расстояние равно длине отрезка AK (рис. 165).

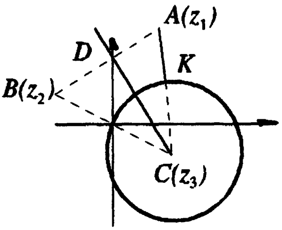

Рис. 165

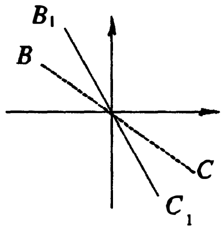

Рис. 166

б) Так как $|z_2|=|z_3|=1$, то $|z-z_1|=|zz_2-z_1z_2|$ и $|z-z_2|=|zz_3-z_2z_3|$, поэтому искомое множество — это срединный перпендикуляр к отрезку AB, т. е. прямая CD.

в) *Ответ:* отрезок B_1C_1 (рис. 166), где $B_1(z_2z_3)$, $C_1(z_3^2)$. Поскольку $z_2=-z_3$ — точки единичной окружности с центром в начале координат, то геометрически умножение на z_2 и z_3 — это повороты на углы $\arg z_2$ и $\arg z_3=\arg z_2+\pi$. Так как отрезок BC симметричен относительно нуля, то образы U и V при этих поворотах совпадают.

г) *Ответ:* дуга параболы $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}y^2$ (рис. 167). Если z — точка отрезка AC, то $z=it+\frac{\sqrt{3}}{2}$, где $t\in[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$, откуда $w=(it+\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}-t^2+it\sqrt{3}$. Следовательно, образ отрезка AC — множество точек $w=x+iy$, где $x=\frac{3}{4}-t^2$, $y=t\sqrt{3}$. Значит, $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}y^2$, причем $y\in[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}]$, т. е. искомый образ — дуга

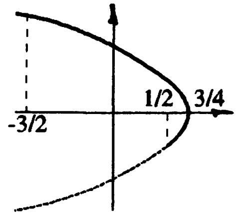

Рис. 167

параболы $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}y^2$ между точками с координатами $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

4. **а)** Искомая площадь (рис. 168) равна $\int_0^m \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}m\sqrt{m} = \frac{2}{3}mf(m)$.

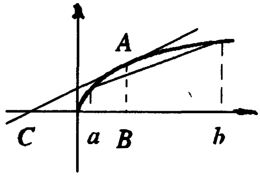

Рис. 168

б) *Ответ:* $\frac{1}{3}$. Так как $\operatorname{tg}\angle ACB = f'(m) = \frac{1}{2\sqrt{m}}$, то $BC = AB/\frac{1}{2\sqrt{m}} = 2m$ и $S_{ABC} = m\sqrt{m}$, а площадь s криволинейного треугольника AOC равна $s = m\sqrt{m} - \frac{2}{3}m\sqrt{m} = \frac{1}{3}m\sqrt{m}$.

в) Пусть a и b — абсциссы точек M и N, тогда $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} = f'(4) = \frac{1}{4}$. Площадь фигуры (трапеции) равна

$$\frac{b-a}{2}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right) = \frac{4\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{2}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right) = 2(b-a).$$

Из геометрических соображений ясно, что разность $b-a$ наибольшая при $a = 0$, откуда $b = 16$ и $s \leqslant 32$. (Иначе: $2(b-a) = 2\left((4-\sqrt{a})^2 - a\right) = 2(16 - 8\sqrt{a}) \leqslant 32$.)

г) Поскольку $g(m) = \frac{3}{2m}\int_0^m g(m)dx$, то g дифференцируема, поэтому, продифференцировав данное равенство, получим, что $g(x) = \frac{2}{3}g(x) + \frac{2}{3}xg(x)$, откуда $xg'(x) = \frac{1}{2}g(x)$. Таким образом, $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2x} = (\ln\sqrt{x})'$ и $\ln g(x) - \ln\sqrt{x} = \ln\frac{g(x)}{\sqrt{x}} = \ln c = \text{const}$, или $g(x) = c\sqrt{x}$. По условию $g(4) = 2$, значит, $c = 1$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

5. **а)** Так как $x_{n+1} = x_n(x_n-1)-3$, то если x_n — целое, то $x_n(x_n-1)$ — четное, значит, x_{n+1} — нечетное число.

б) *Ответ:* $-1; 3$. Пусть $x_n = a$, тогда $x_{n+1} = a^2 - a - 3$ и $x_{n+1} = a$, если $a = a^2 - a - 3$.

в) *Ответ:* $-1; 3; \pm\sqrt{3}$. Если $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия, то $x_1x_3 = x_2^2$, значит, $(a^2-a-3)^2 = a\left((a^2-a-3)^2 - a(a-1)\right)$ и $a^2(a-1) = (a-1)(a^2-a-3)^2$, откуда $a = 1$ или $\pm a = a^2 - a - 3$, т. е. $a = -1; 3; \pm\sqrt{3}$. Однако равенство $x_1x_3 = x_2^2$ — лишь необходимое условие, и, проверяя, видим, что $x_4 = 69$ при $a = 1$, т. е. в таком случае $\{x_n\}$ не есть геометрическая прогрессия.

г) Докажем по индукции, что $x_n \geqslant 4$ и $x_{n+1} - x_n \geqslant 3$, откуда и будет следовать, что конечного предела у последовательности $\{x_n\}$ нет. Действительно, если $x_n \geqslant 4$, то

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 2x_n - 3 = (x_n - 3)(x_n - 1) \geqslant 3.$$

Вариант 47

1. **а)** $(0; 1)$. **б)** $3; 9$. **в)** $a < 2$. **г)** Один корень при $a < 4$, $a > \frac{112}{27}$; два — при $a = 4, \frac{112}{27}$; три — если $4 < a < \frac{112}{27}$.

2. **а)** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. **б)** $\frac{\pi}{2}$. **в)** $[-\frac{9}{16}; 1]$. **г)** 0.

Вариант 48

3. **а)** При $|z| = 1$ имеем: $BC = |z^2 - z^3| = |z(z - z^2)| = |z - z^2| = AB$.
б) Из равенств $|z||1-z| = |z|^2|1-z| = |z||1-z^2|$, поскольку $z \neq 0; 1$, получаем $|z| = 1$ и $|z+1| = 1$, т. е. искомые точки — это точки пересечения двух окружностей единичного радиуса (рис. 169), значит, $z = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

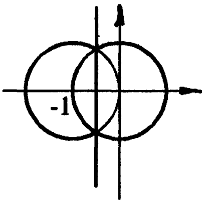

Рис. 169

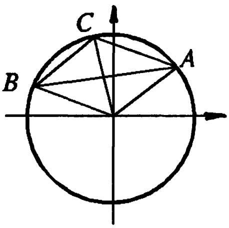

Рис. 170

в) *Ответ* — см. рис. 169. Возможны три варианта: $AB = BC$, $AB = AC$ и $AC = BC$. В первом: $|z - z^2| = |z^2 - z^3|$, или $|z||1 - z| = |z|^2|1 - z|$, а так как $z \neq 0; 1$, то $|z| = 1$. Во втором: $|z - z^2| = |z - z^3|$, или $|z||1 - z| = |z||1 - z||1 + z|$, откуда $|z + 1| = 1$. Наконец, в последнем случае $|z^2 - z^3| = |z - z^3|$, или $|z^2||1 - z| = |z||1 - z||1 + z|$, откуда $|z| = |1 + z|$ — уравнение срединного перпендикуляра к отрезку с концами в точках $z = 0$ и $z = -1$. Итак, искомое множество — объединение двух окружностей единичного радиуса с центрами в точках $z = 0$, $z = -1$ и прямой, проходящей через точки их пересечения.

г) *Ответ:* $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тогда $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$, $z^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$, и для площади треугольника ABC имеем формулу $S(\varphi) = \left|\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right|$ (рис. 170). Исследуя функцию $S(\varphi)$ на наибольшее значение, получим, что $\varphi = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

Вариант 49

3. См. вариант 48.

4. См. решение задачи 47.4.

Вариант 50

1. а) *Ответ:* $[10^{-5}; 1] \cup [10^3; +\infty)$. Рассмотрим многочлен $g(t) = -t(t + 5)(t - 3) = -t^3 - 2t^2 + 15t$. Поскольку $f(x) = g(\lg x)$, данное неравенство равносильно неравенству $g(t) \leqslant 0$, которое решаем методом интервалов. Значит, $t \in [-5; 0] \cup [3; +\infty)$, откуда и получаем ответ.

б) *Ответ:* $1; 10^{\pm\sqrt{15}}$. Поскольку $f(\frac{1}{x}) = g(-\lg x)$, получаем уравнение $g(t) = g(-t)$, или, после преобразований, $t(t^2 - 15) = 0$.

в) *Ответ:* $-36; \frac{400}{27}$. Число решений данного уравнения совпадает с числом решений уравнения $g(t) = a$, которое равно двум, если a — значение функции g в ее экстремальных точках (рис. 171), которые находим из уравнения $g'(t) = 0$, или $3t^2 + 4t - 15 = 0$. Значит, $t = -3; \frac{5}{3}$, откуда $a = g(-3) = -36$ или $a = g(\frac{5}{3}) = \frac{400}{27}$.

г) *Ответ* — на рис. 172. Пусть $c = \lg b$. Уравнение $f(x) = f(bx)$ равносильно уравнению $g(t) = g(t + c)$, или, после упрощений, $c(3t^2 + (3c+4)t + c^2 + 2c - 15) = 0$. После сокращения на c получаем уравнение, дискриминант которого равен $-3c^2 + 196$, значит, оно имеет два решения при $|c| < \frac{14}{\sqrt{3}}$, одно при $|c| = \frac{14}{\sqrt{3}}$, ни одного при

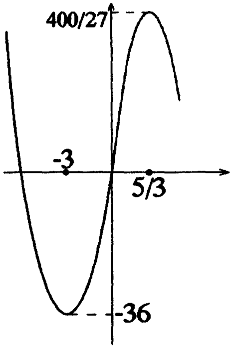

Рис. 171

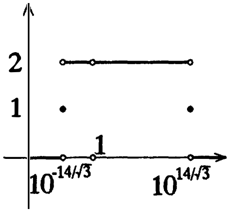

Рис. 172

остальных значениях c. Случай $c = 0$ особый (имеем тождество) и исключен по условию задачи.

2. а) *Ответ:* $\frac{4-\sqrt{3}}{4}$. Искомая площадь равна

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} + \sin x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

б) *Ответ:* $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Длина отрезка с концами в точках $A(x)$, $B(x)$ равна $|\cos 2x - \cos x|$, поэтому она равна единице, если $\cos 2x - \cos x = 1$ или $\cos 2x - \cos x = -1$. Замена $t = \cos x$ приводит к уравнениям $2t^2 - t = 0$, откуда $t = 0; \frac{1}{2}$ или $2t^2 - t - 2 = 0$, т. е. $t = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$. Поскольку $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, то это значение t не имеет отношения к исходному уравнению.

в) *Ответ:* да, существует. Например, отрезок с концами в точках с координатами $(0, 1)$ и $(\frac{7\pi}{3}, \frac{1}{2})$, поскольку его середина имеет абсциссу $\frac{1}{2}(0 + \frac{7\pi}{3}) = \frac{7\pi}{6}$ и $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

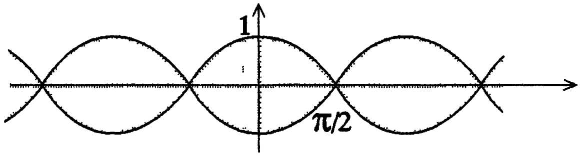

Рис. 173

г) *Ответ* — на рис. 173. Числа a и b являются координатами середины некоторой хорды графика функции $y = \cos x$ тогда и только тогда, когда разрешима система $\begin{cases} u+v=2a, \\ \cos u+\cos v=2b. \end{cases}$ Преобразуя: $\cos u+\cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} = 2\cos a\cos\frac{u-v}{2}$, приходим к уравнению $b=\cos a\cos\frac{u-v}{2}$, которое имеет решение лишь если $|b|\leqslant|\cos a|$, а при выполнении этого неравенства имеет решение и исходная система. Осталось заметить, что полученное неравенство задает множество, ограниченное кривыми $y=\cos x$ и $y=-\cos x$.

3. а) Поскольку $x_1=x_0-1$, то $x_1<c$ и $x_1\leqslant 0$, следовательно, $x_2=2x_1-1<0$. Нетрудно доказать по индукции, что $x_n\leqslant 0$. Неравенство $x_n<x_{n-1}$ имеет вид $nx_{n-1}-1<x_{n-1}$, или $x_{n-1}<\frac{1}{n-1}$, что верно.

б) Если $c=x_0>2$, то $x_1>1$, далее, $x_2=2x_1-1>1$. Если неравенство $x_k>1$ $(k\geqslant 2)$ верно, то $x_{k+1}=kx_k-1>k-1\geqslant 1$, значит, $x_n>1$ при всех натуральных n. Наконец, $1<x_n=nx_{n-1}-1<nx_{n-1}<n(n-1)x_{n-2}<\ldots<(n!)x_0=cn!$.

в) Преобразуя данное рекуррентное соотношение, получаем $\frac{x_n}{n}=x_{n-1}-\frac{1}{n}$, поэтому, если $x_n\to a$, то $\frac{x_n}{n}, \frac{1}{n}\to 0$, значит, $a=0$.

г) Пусть $c=x_0=\frac{p}{q}$, тогда $x_{q-1}=\frac{k}{q}$, x_q — целое и, более того, все члены x_n, где $n\geqslant q$, также являются целыми. Так как $x_n\neq x_{n+1}$, то $|x_n-x_{n+1}|\geqslant 1$ при всех $n\geqslant q$, следовательно, данная последовательность не является сходящейся.

4. а) Имеем: $OA^2=(2z+1)(2\bar z+1)=4|z|^2+2(z+\bar z)+1=2(z+\bar z)+5$ и $OB^2=(z+2)(\bar z+2)=|z|^2+2(z+\bar z)+4=2(z+\bar z)+5$ (здесь $\bar z$ — комплексно сопряженное к z число).

б) Сделав параллельный перенос, переводящий вершину A треугольника в точку O, получим треугольник OB_1C_1, где точкам B_1 и C_1 соответствуют комплексные числа $z+2-(2z+1)=1-z$ и $z^2+2z-(2z+1)=z^2-1=-(1-z)(z+1)$ соответственно. Следовательно, умножение на $1-z$ переводит треугольник с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ в подобный ему треугольник OB_1C_1, равный треугольнику ABC. Коэффициент подобия $\lambda=|z-1|$.

в) *Ответ:* $(1;3)$. Если $|z|=1$, то $OC=OB$, значит (см. пункт а)), точка O — центр описанной около данного треугольника окружности с радиусом $R=|z+2|$. При $z=\pm1$ треугольник вырождается, при остальных значениях z, где $|z|=1$, получаем, что $R\in(1;3)$.

г) *Ответ:* $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Площадь треугольника с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ равна $\frac{1}{2}|\operatorname{Im} z|$, поэтому для площади S подобного ему треугольника ABC (см. пункт б)) получаем формулу $S = \frac{1}{2}|\operatorname{Im} z||z-1|^2 = \frac{1}{2}|\sin\varphi|((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi) = |\sin\varphi|(1-\cos\varphi)$, здесь $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, а $\varphi \in [0; 2\pi]$. Достаточно рассматривать случай, когда $\varphi \in [0;\pi]$, тогда $S(\varphi) = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$, $S'(\varphi) = \cos\varphi - \cos 2\varphi = 2\sin\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$ и $S'(\varphi) = 0$ при $\varphi = 0; \frac{2\pi}{3}$. Ясно, что значение $S(\frac{2\pi}{3})$ является наибольшим.

5. а) *Ответ:* $\sqrt{5}$. Решение — на рис. 174, *а*, кратчайший путь можно искать среди путей на развертке куба (рис. 174, *б*).

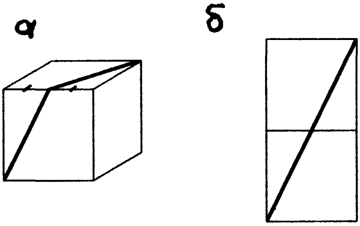

Рис. 174

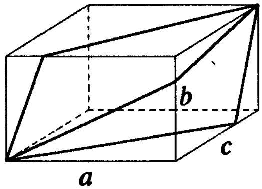

Рис. 175

б) $a = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, $b = \sqrt[3]{2}$. (См. пункт г)).

в) Если A и B лежат на соседних гранях, то расстояние между ними не превосходит $\sqrt{5}$. Предположим, что они находятся на противоположных гранях. Обернем кубик полоской шириной единица и длиной четыре, начиная от точки A. Так как B попадет в одну из двух ее половин, то $AB \leqslant \sqrt{5}$.

г) *Ответ:* два ребра имеют длину $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, а третье — $\sqrt[3]{2}$. Точки E и W можно соединить тремя путями, длины d_i которых равны, соответственно, $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$, $\sqrt{b^2+(a+c)^2}$ и $\sqrt{c^2+(a+b)^2}$ (рис. 175), а образы путей которых на развертках параллелепипеда являются отрезками. Поскольку $\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$ и $abc = 1$, то ${d_1}^2 = a^2+(b+c)^2 = \frac{1}{b^2c^2}+(b+c)^2 \geqslant \frac{1}{b^2c^2}+4bc = \frac{1}{b^2c^2}+2bc+2bc \geqslant 3\sqrt[3]{4}$, причем ${d_1}^2 = 3\sqrt[3]{4}$, если $b = c$ и $\frac{1}{b^2c^2} = 2bc$, т. е. $b = c = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ и $a = \sqrt[3]{2}$. Осталось заметить, что в этом случае $d_2 > d_1$ и $d_3 > d_1$.

Вариант 51

1. **а)** $[2^{-7}; 1] \cup [2^8; +\infty)$. **б)** $1; 2^{\pm 2\sqrt{14}}$. **в)** $144; -\frac{4900}{27}$. **г)** См. рис. 176.

2. а) $1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$. **б)** $\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k; (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** Да, существует. **г)** См. рис. 177.

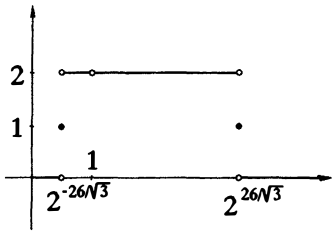

Рис. 176

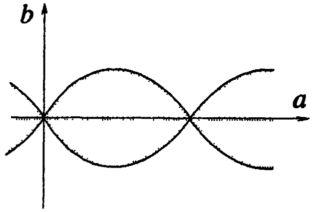

Рис. 177

Вариант 52

4. в) $(1;5)$. **г)** $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 53

1. а) $2+\sqrt{2}$. **б)** $(2;\frac{5+\sqrt{17}}{4}]$. **в)** См. рис. 178; $a \in (-4;-1-2\sqrt{2}) \cup (-1-2\sqrt{2};+\infty)$. **г)** $a > 0$, $a \neq 2\sqrt{2}-1$.

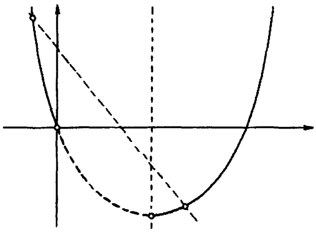

Рис. 178

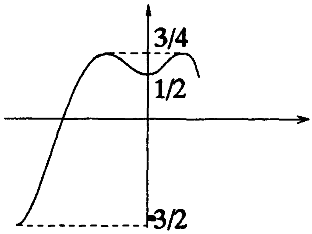

Рис. 179

2. а) $-\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}$. **б)** $\frac{2\pi}{3}$. **в)** См. рис. 179; *ответы* — см. вариант 2. **г)** $\frac{2}{3\pi}$.

Вариант 54

4. б) i; $\frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$. **в)** $a=0;\pm1;\pm2$. **г)** $c=\pm1;\pm i$.

Вариант 55

1. а) Область определения данной функции — $(0;\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2};+\infty)$. Если $x>0$ и $x \neq \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{4x}>0$ и $\frac{1}{4x} \neq \frac{1}{2}$, значит, эти числа входят в область определения одновременно. Далее, положив $t=\log_2 x$, получим, что $f(x) = t+\frac{t}{t+1} = t+1-\frac{1}{t+1}$. Так как $\log_2\frac{1}{4x} = -2-\log_2 x$, то $f(\frac{1}{4x}) = -2-t+1-\frac{1}{-2-t+1} = -(t+1)+\frac{1}{t+1} = -f(x)$.

б) *Ответ:* $2; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{8}; \frac{1}{\sqrt{2}}$. Указанная выше замена приводит к уравнению $\left|\frac{t^2+2t}{t+1}\right| = \frac{3}{2}$, т. е. $t^2+2t = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}$ или $t^2+2t = -\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$, откуда $t = 1; -\frac{3}{2}; -3; -\frac{1}{2}$.

в) Поскольку функция $t+1-\frac{1}{t+1}$ монотонна на $[0;+\infty)$, то и данная функция монотонна на $[1;+\infty)$. Следовательно, если $f(x) = f(x^n)$, то $x = x^n$.

г) *Ответ:* $0 < |a| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Сделав замену $u = \frac{1}{\log_2 2x}$, получим уравнение $u - u^3 = a$, $u \neq 0$. Число решений этого уравнения (в зависимости от a) определяется стандартным исследованием функции $y = u - u^3$.

2. а) *Ответ:* $\frac{\pi k}{2}; \frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Уравнение $\cos x + \cos 2x = \cos 3x + \cos 6x$ приводится к виду $\cos\frac{3x}{2}\sin 2x \sin\frac{5x}{2} = 0$.

б) *Ответ:* $(-\frac{2}{3}+4k; \frac{2}{3}+4k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Сделав в неравенстве $\cos\frac{\pi a}{2} + \cos\pi a > 0$ замену $z = \cos\frac{\pi a}{2}$, получим $2z^2 + z - 1 > 0$.

в) *Ответ:* $|a| < \frac{2}{3}$. Часть графика функции $y = \cos x + \cos 2x$ изображена на рис. 180, график функции f (при $a > 0$) получается сжатием (растяжением). Поэтому $f(x) > 0$ на $[0; \frac{\pi}{2}]$, если $\frac{\pi}{3a} > \frac{\pi}{2}$, т. е. $0 < a < \frac{2}{3}$. Далее, $f(x) = 2$ при $a = 0$, и так как функция f четна, отсюда следует ответ.

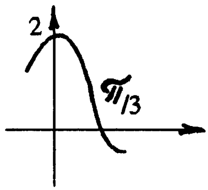

Рис. 180

г) *Ответ:* 0. Ясно, что при $a = 0$ график функции f — прямая $y = 2$ — имеет центр симметрии. В случае $a \neq 0$ удобно сделать замену $ax = u$. Точка (u_0, y_0) — центр симметрии графика функции $y = \cos u + \cos 2u$, если

$$\cos(u_0 + u) + \cos 2(u_0 + u) + \cos(u_0 - u) + \cos 2(u_0 - u) = 2y_0,$$

или

$$2\cos u_0 \cos u + 2\cos 2u_0 \cos 2u = 2y_0.$$

Заметим, что $c_1 \cos u + c_2 \cos 2u = \text{const}$ только при $c_1 = c_2 = 0$. Значит, $\cos u_0 = 0$ и $\cos 2u_0 = 0$, а эта система несовместна.

3. а) *Ответ:* $a \geqslant 1$. Поскольку $f'(x) = a - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$ на луче $[0;+\infty]$, то $a \geqslant \max\limits_{[0;+\infty)} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$.

б) *Ответ:* $y = \frac{1}{2}(x-5)$, $y = \frac{2}{3}(x-5)$. Подставив $y = 0$, $x = 5$ в уравнение $y - f(t) = f'(t)(x-t)$, после небольших преобразований приходим к уравнению $5\sqrt{t+1} = t+7$, откуда $t = 3; 8$.

в) *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup \{2 + 2\sqrt{2}\}$. Касательная в точке $(t, f(t))$ графика проходит через точку $(u, 0)$, если $0 = (\sqrt{t+1} - 1)(u - t) + t\sqrt{t+1} - 2t - 2$, т. е. $u\sqrt{t+1} - u - 2 - t = 0$. Таким образом, точка $(u, 0)$ входит в искомое множество, если полученное уравнение имеет одно решение. Удобно сделать замену $z = \sqrt{t+1} \geqslant 0$, приводящую к квадратному уравнению $z^2 - uz + u + 1 = 0$. Оно имеет единственное положительное решение, если $u + 1 < 0$. Если $u^2 - 4(u+1) = 0$, т. е. $u = 2 \pm 2\sqrt{2}$, то его решение единственно, однако при $u = 2 - 2\sqrt{2}$ оно отрицательно. Исследование квадратного уравнения можно провести по-другому, записав его в виде $u = \frac{z^2+1}{z-1}$ и построив график $y = \frac{z^2+1}{z-1}$ при $z \geqslant 0$ (рис. 181).

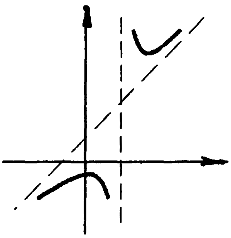
Рис. 181

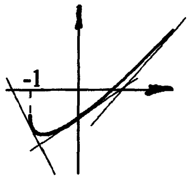

Рис. 182

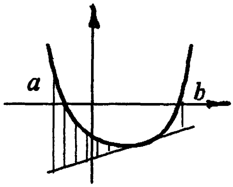

Рис. 183

Заметим, наконец, что сам ответ понятен из геометрических соображений, если мы посмотрим на график данной функции (рис. 182).

г) *Ответ:* $x_0 = \frac{1}{2}$. Интересно, что вычисления проще проводить для произвольной выпуклой функции f. Площадь заштрихованной на рис. 183 фигуры определяется по формуле $S(t) = \int\limits_a^b f(x)dx - (b-a)(f(t) - tf'(t) + f'(t)\frac{a+b}{2})$, так что $S'(t) = (b-a)(f'(t) - f'(t) - tf''(t) + f''(t)\frac{a+b}{2}) = (b-a)f''(t)(\frac{a+b}{2} - t)$, откуда и следует, что $t = \frac{a+b}{2}$ — точка минимума функции S.

4. а) $c^2 = \sqrt[3]{7} < a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$, так как $\sqrt[3]{7} < 2 < \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

б) *Ответ:* нет, не существует. Имеем: $21^{21} = 20^{21}(1+\frac{1}{20})^{21} > 20^{21}\cdot 2$ (неравенство Бернулли) $> 20^{21}+19^{21}$.

в) Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. Если $a \neq b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n+c^n} = \lim \frac{(a/b)^n}{1+(c/b)^n} = \infty$, в частности, $a^n > b^n + c^n$, начиная с некоторого номера k, что противоречит неравенству треугольника.

г) Так как $\cos\varphi_n = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{1+\sqrt[n]{16}-\sqrt[n]{4}}{2\sqrt[n]{4}} \to \frac{1}{2}$ при $n\to\infty$, то $\varphi_n \to \frac{\pi}{3}$. Далее, положив $t = \sqrt[n]{4} > 1$, получим, что $\cos\varphi_n = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}-1)$ — монотонная на $[1;+\infty)$ функция.

5. а) Проведем вычисления в общем виде, считая, что точки A, B, C соответствуют комплексным числам z_1, z_2, z_3, где $z_1+z_2+z_3=0$: $\sum_{i=1}^{3}|z-z_i|^2 = \sum_{i=1}^{3}(z-z_i)(\bar z-\bar z_i) = 3|z|^2+\sum_{i=1}^{3}|z_i|^2 - z\sum_{i=1}^{3}\bar z_i - \bar z\sum_{i=1}^{3} z_i = 3+\sum_{i=1}^{3} z_i^2 = \mathrm{const}$.

б) *Ответ*: см. рис. 184. Множество $\mathcal{D}$, заданное неравенством $|z-\frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$, является кругом, диаметр которого совпадает с отрезком $[0; 1]$ вещественной оси. Так как $z(2i-1)+(1-z)(i-1) = iz+i-1$, то искомое множество получается из $\mathcal{D}$ путем его поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ (умножение на i) и параллельного переноса на вектор, соответствующий $i-1$.

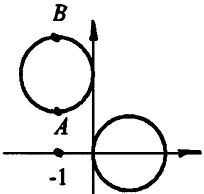

Рис. 184

в) *Ответ:* E соответствует $z=1$, треугольник — произвольный. Если z_1, z_2, z_3 — вершины лежащего на окружности S равностороннего треугольника, то $z_1+z_2+z_3=0$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{3}|z-z_i|^2 = 3|z|^2+3$ (см. пункт а)) и $\max|z|$ при $z\in\mathcal{D}$ реализуется в точке $z=1$.

г) *Ответ:* да, верно. Множество точек указанного в задаче вида, как следует из рассуждения пункта б), является кругом с диаметром $[z_k; z_j]$. Три круга, построенные на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах, накрывают этот треугольник хотя бы потому, что он тупоугольный.

Вариант 56

1. **б)** $\frac{1}{3}; 3\sqrt{3}; 27; \sqrt{3}$. **г)** $0 < |a| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

2. **а)** $\frac{\pi k}{2}; \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** $(-\frac{2}{3} + 2k; 2k) \cup (2k; 2k + \frac{2}{3})$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $0 < |a| < \frac{2}{3}$. **г)** 0.

Вариант 57

3. **а)** $a \leqslant -\frac{1}{2}$. **б)** $y = -\frac{1}{2}(x + 7)$; $y = -\frac{4}{5}(x + 7)$. **в)** $(3; +\infty) \cup \{-6\}$. **г)** $x_0 = \frac{1}{2}$.

4. **б)** Нет, не существует. **г)** $\varphi_n \to \frac{\pi}{3}$.

Вариант 58

1. **а)** *Ответ:* 2; $\frac{1}{2}$. Положим $a = 2x^2 + \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{x}$, $c = 4x + \frac{1}{x}$. Тогда $c = ab$, и данное уравнение примет вид

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\log_2 a + \log_2 b},$$

откуда

$$\begin{cases} \log_2 a = 0, \\ \log_2 b \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \log_2 a \geqslant 0, \\ \log_2 b = 0, \end{cases}$$

таким образом,

$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{2} = 1, \\ \frac{2}{x} \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{2} \geqslant 1, \\ \frac{2}{x} = 1. \end{cases}$$

б) *Ответ:* $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}; 2-\sqrt{5}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. Поскольку функция f на своей области определения — луче $[1; \infty)$ — является возрастающей, то данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$1 \leqslant \frac{4 - x^2}{1 + x^2} \leqslant \frac{7}{2} - x,$$

откуда $|x| \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{2})(x^2 - 4x - 1) \leqslant 0$.

в) *Ответ:* $2^{1/(a-1)}$ при $a \leqslant \frac{1}{2}$, $a > 1$; при остальных a решений нет. Имеем: $2x^a = 4x$, $x \geqslant \frac{1}{4}$, откуда $x = 2^{1/(a-1)}$ и $\frac{1}{a-1} \geqslant -2$, или $\frac{2a-1}{a-1} \geqslant 0$.

г) Нетрудно понять, что функция f выпукла вверх (проверьте, что $f'' < 0$). Поэтому интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$, равный площади подграфика этой функции, больше площади заштрихованной на рис. 185 трапеции, т. е. $\int_a^c f(x)\,dx > \frac{1}{2}(c-a)(f(a)+f(c))$. Осталось заметить, что $f(a)+f(c) = \sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 c} \geqslant \sqrt{\log_2 a + \log_2 c} = \sqrt{\log_2 b^2} = \sqrt{2}f(b)$.

2. **а)** *Ответ:* $\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Удобно использовать формулу $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

б) *Ответ:* $(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi k] \cup (2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k) \cup [\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \pi+2\pi k)$. Достаточно записать данное неравенство в виде $\frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{\sin 2x} \geqslant 0$ и исследовать знаки числителя и знаменателя.

в) *Ответ:* $b \geqslant 3\sqrt{3}$. Функция f будет убывающей на интервале $(0; \frac{\pi}{3})$, если на этом интервале $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{b\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}(\operatorname{tg}^3 x - b) \leqslant 0$, или $b \geqslant \operatorname{tg}^3 x$ при $x \in (0; \frac{\pi}{3})$, т. е. $b \geqslant \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{3}$.

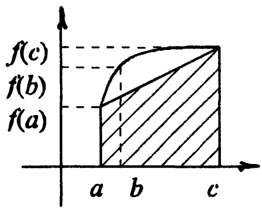

Рис. 185

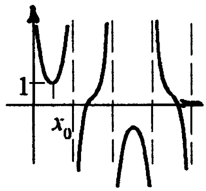

Рис. 186

г) График функции f при $a, b > 0$ показан на рис. 186. Уравнение $f(x) = 1$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ три решения, если $1 = f(x_0)$, где x_0 — точка минимума данной функции. Имеем (см. пункт в)): $\operatorname{tg}^3 x_0 = \frac{b}{a}$, откуда $f(x_0) = \frac{a}{\cos x_0} + \frac{b}{\sin x_0} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

В формулировке задачи 3г появилось одно хорошо известное уравнение: $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ (в частном случае $c = 1$). Кривая, задаваемая им, называется астроидой (рис. 187, *а*). Расмотрим задачу о поиске касательной к астроиде, проходящей через данную точку $A(a, b)$.

Нетрудно видеть, что точка M с координатами $(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0; 2\pi]$, лежит на астроиде, более того, любая точка на ней имеет такие координаты. Прямые вычисления показывают, что уравнение касательной к астроиде в точке M имеет вид

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1.$$

Поэтому число точек на астроиде, касательные в которых проходят через точку A, равно числу решений приведенного уравнения на отрезке $[0; 2\pi]$!

Каков геометрический смысл полученного нами ответа? Оказывается, что таких касательных две, если точка A лежит вне астроиды или в ее вершинах, четыре, если эта точка лежит внутри, и три, если она лежит на астроиде, но не совпадает с одной из ее вершин (см. рис. 187, *б, в*).

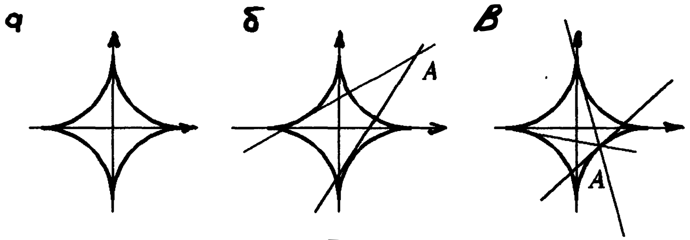

Рис. 187

3. Прежде чем излагать формальное (и очень простое) решение этой задачи, заметим, что данное в ее условии рекуррентное соотношение имеет ясный геометрический смысл. Именно: a_{n+1} есть длина хорды единичной окружности, опирающейся на дугу вдвое меньшей длины, чем та, на которую опирается хорда длиной a_n. Из этого наблюдения сразу виден смысл утверждения пункта г)!

а) Действительно, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}} = \sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}$. Осталось заметить, что $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}} \leqslant 2$.

б) *Ответ:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Так как $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, то $a_{n+1} < a_n$, более того, $a_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}}a_n < \ldots < \frac{1}{(\sqrt{2})^n}c \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

в) Если $a_{n+1}^2 \in \mathbb{Q}$, то $a_n^2 \in \mathbb{Q}$, но $a_2^2 = 2-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

г) Если $c = 2$, то $a_1 = 2\sin\frac{\pi}{2}$, нетрудно доказать по индукции, что $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$, значит, $2^n a_n = 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\to} 2\pi$.

4. а) *Ответ:* $\frac{1\mp\sqrt{3}+i(1\pm\sqrt{3})}{2}$. Для того чтобы получить третью вершину равностороннего треугольника ABC, можно повернуть вершину B на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат — первой вершины этого треугольника (рис. 188). По геометрическому смыслу умножения комплексных чисел для этого достаточно умножить v на число $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

б) Имеем: $4i - 3 = (1+2i)^2$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $\left(\frac{z}{1+2i}\right)^2 - \frac{z}{1+2i} + 1 = 0$, откуда $z = (1+2i)\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} = v\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. В силу пункта а) треугольник ABC равносторонний.

в) *Ответ:* нет, не могут, поскольку $\frac{w-u}{v-u} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

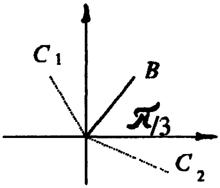

Рис. 188

г) Данное тождество можно записать в виде

$$(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 = 0,$$

обозначив для удобства $a = u-v$, $b = v-w$, $c = w-u$, получим, что $a+b+c = 0$, $a^2+b^2+c^2 = 0$, откуда $ab+bc+ca = 0$. Таким образом, числа a, b и c являются корнями уравнения $z^3 = \alpha$, так что $a = b\frac{i+\sqrt{3}}{2}$. В силу пункта а) треугольник ABC равносторонний.

5. а) *Ответ:* $-2; 6$. Если прямая ℓ — касательная, то уравнение $x^2 - (a-2)x + 4 = 0$ имеет одно решение, откуда и следует ответ.

б) *Ответ:* $S = \frac{16}{3}$. Имеем (рис. 189):

$$S = \int_{-2}^{0} (x+2)^2 dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2 dx.$$

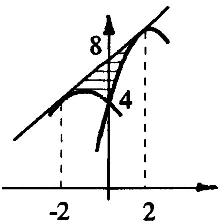

Рис. 189

в) *Ответ:* точка $C(-1,1)$. Пусть $d(x)$ — расстояние от точки графика с абсциссой x до данной точки M. Тогда $d^2(x) = (x+3)^2 + (\frac{5}{2} + 2x - x^2)^2$ и $\left(d^2(x)\right)' = 2(x+3) + 4(1-x)(\frac{5}{2} + 2x - x^2) = 4(x+1)(x-2)^2$, значит, $x = -1$ — точка, в которой достигается наименьшее значение этой функции.

г) *Ответ:* $\frac{32}{3}$ (при $a = 0$). Обозначим через x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) абсциссы точек пересечения графика функции f с осью абсцисс (см. рис. 190). Площадь S сегмента вычисляется по формуле $\int_{x_1}^{x_2}(4 + ax - x^2)\,dx = \frac{x_2-x_1}{6}(24 + 3a(x_1+x_2) - 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)) = \frac{1}{6}(a^2+16)^{3/2}$, откуда и следует ответ.

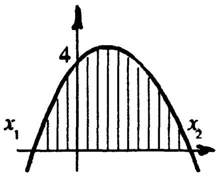

Рис. 190

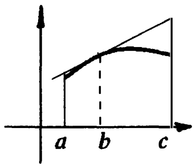

Рис. 191

Вариант 59

1. **а)** 2. **б)** $[-1;\sqrt{10}-4] \cup [\frac{1}{2};1]$. **в)** $(3\sqrt{3})^{1/(a+1)}$ при $a < -1$, $a \geqslant -\frac{1}{4}$; при остальных a решений нет. **г)** $\int_a^c f(x)\,dx \leqslant \frac{c-a}{2} f\left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{c-a}{2} f(b)$, см. рис. 191.

2. **а)** $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** $(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k] \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup [\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $b \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ И УТВЕРЖДЕНИЯ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

1. Аналитические методы

Графиком функции f называется множество на плоскости, заданное уравнением $y = f(x)$, т. е. множество всех точек плоскости, координаты которых имеют вид $(x, f(x))$, $x \in D$, где D — область определения этой функции.

Часто используемое соображение состоит в геометрической интерпретации решений уравнения $f(x) = g(x)$ как абсцисс точек пересечения графиков функций f и g. В частности, решения уравнения $f(x) = a$ суть абсциссы точек пересечения графика функции f и прямой $y = a$.

Далее, множество решений неравенства $f(x) < a$ совпадает с множеством абсцисс точек графика функции f, лежащих ниже прямой $y = a$. А для того чтобы найти множество значений функции f при $x \in E$, нужно рассмотреть часть графика этой функции, заданную условием $x \in E$. Ее образ на оси ординат и является искомым множеством $f(E)$ значений функции.

При исследовании вопроса о числе решений уравнения $f(x) = a$ (геометрически — о числе точек пересечения графика и прямой $y = a$) важны два свойства функции f — ее монотонность и ее непрерывность.

Функция называется *строго возрастающей (строго убывающей) на множестве* D, если из того, что $x_1 < x_2$, $x \in D$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). В каждом из этих случаев говорят, что f *монотонна на множестве* D.

Из данного определения сразу следует, что если f монотонна на множестве D, то она принимает каждое свое значение на этом множестве только один раз, другими словами, уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного решения $x \in D$.

Предположим, что функция f монотонна и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда из теоремы о промежуточном значении (см. далее) следует, что множество значений этой функции на этом отрезке является отрезком с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$. Если областью определения, на которой функция f непрерывна и, к примеру, возрастает, является полуоткрытый промежуток $[a; b)$, то опять-таки множество ее значений совпадает с промежутком $[f(a); B)$, где $B = \lim\limits_{x \to b,\, x < b} f(x)$. Отметим, что здесь B может быть не только вещественным числом, но и символом ∞.

Теорема (Больцано–Коши). *Пусть функция f задана и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Если $f(a)f(b) < 0$ (т. е. на концах этого отрезка функция f принимает значения разных знаков), то на интервале $(a;b)$ данная функция имеет корень, (т. е. существует такое число $c \in (a;b)$, что $f(c) = 0$).*

Сформулированное утверждение является одним из центральных при изложении основ математического анализа. С наглядно-геометрической точки зрения оно очевидно, однако его строгое доказательство требует точного определения понятия вещественного числа.

Следствие (теорема о промежуточном значении). *Если два числа A и B являются значениями заданной на некотором отрезке и непрерывной на нем функции, то любое число из отрезка с концами в точках A и B также является значением этой функции.*

В качестве примера применения этой теоремы докажем такое утверждение: если функция непрерывна и обратима на некотором отрезке, то она монотонна.

Предположив противное, можно сделать вывод, что на данном отрезке найдутся такие числа $a < b < c$, для которых значения $f(a), f(b), f(c)$ не идут в порядке возрастания (убывания). Пусть для определенности $f(a) < f(c) < f(b)$. Рассмотрим число $A \in (f(c); f(b))$. По теореме о промежуточном значении уравнение $f(x) = A$ будет иметь решения на каждом из интервалов $(a;b)$ и $(b;c)$, следовательно, данная функция не обратима.

Предположим, что в уравнении $f(x) = g(x)$ функции, стоящие в обеих его частях, монотонны. Если они обе, к примеру, возрастают, то о числе решений этого уравнения сказать вообще ничего нельзя. Если же одна из них возрастает, а другая убывает (на их общей области определения), то их разность $f-g$ есть строго монотонная функция, поэтому она не может иметь более одного корня.

Хорошо известно, что необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) дифференцируемой функции на некотором промежутке является выполнение на этом промежутке неравенства $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно, неравенства $f'(x) \leqslant 0$) при дополнительном условии, заключающемся в том, что эта производная не есть тождественный ноль ни на каком промежутке (каким бы малым он ни был).

При исследовании вопроса о числе решений уравнений бывает важно уметь сравнивать, так сказать, скорости роста различных функций. К примеру, показательная функция растет быстрее любого многочлена, который, в свою очередь, растет быстрее любой степени логарифма, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \text{ при } a>1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^\alpha}=0,$$

кроме того,

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} x^\alpha \ln x = 0 \text{ при } \alpha>0.$$

Заметим, что выполнение условия $f'(x)>g'(x)$ недостаточно для того, чтобы уравнение $f(x)=g(x)$ имело решение на $[a;+\infty)$, если даже $f(a)<g(a)$. Действительно, функция $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$ возрастает на луче $[0;+\infty)$, но не обращается на нем в ноль, хотя $f(0)=-1$.

Рассмотрим, однако, уравнение $f(x)=0$ и предположим, что $f'(x)\geqslant c>0$ при $x\in[a;b]$, $f(a)<0$ и $b>a-\frac{f(a)}{c}$. Тогда $f(b)>0$, поскольку $f(x)\geqslant f(a)+c(x-a)$, значит, функция f имеет корень на отрезке $[a;b]$ по теореме Больцано–Коши.

Следующее важное понятие — выпуклость. Функция f называется *выпуклой (выпуклой вверх)* на отрезке $[a;b]$, если для любых различных точек $x_1,x_2\in[a;b]$ и любого числа $\lambda\in[0;1]$ верно неравенство

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),$$

соответственно, неравенство

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)<f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

Нетрудно доказать (см. далее), что если функция f непрерывна, то это условие равносильно более простому:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

соответственно, что

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Справедливо следующее утверждение. Если функция f дважды дифференцируема, то она является выпуклой (выпуклой вверх) на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке справедливо неравенство $f''(x) \geqslant 0$ (соответственно, $f''(x) \leqslant 0$), при дополнительном условии, заключающемся в том, что эта вторая производная не есть тождественный ноль ни на каком промежутке (каким бы малым он ни был).

Заметим также, что выпуклая (выпуклая вверх) функция имеет не более одной точки экстремума. Докажите это самостоятельно.

Данное определение выпуклости имеет ясную геометрическую интерпретацию: дуга графика функции f лежит под стягивающей ее хордой этого графика.

Докажем теперь, что если функция дважды дифференцируема, то она выпукла тогда и только тогда, когда ее график лежит над любой ее касательной (рис. 192, *а*), что на аналитическом языке означает справедливость неравенства

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ при } x \neq x_0$$

(ясно, что если функция выпукла вверх, то знак этого неравенства следует поменять, таким образом, ее график будет лежать под любой своей касательной, рис. 192, *б*).

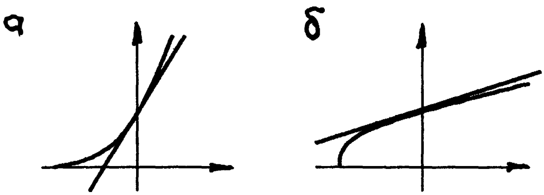

Рис. 192

Действительно, рассмотрим разность $\Delta(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Имеем: $\Delta'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Поскольку $f''(x) \geqslant 0$, то производная функции f является возрастающей, поэтому $\Delta'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $\Delta'(x) > 0$ при $x > x_0$. Следовательно, функция Δ убывает при $x < x_0$ и возрастает при $x > x_0$, т. е. точка x_0 — точка (строгого) минимума. Так как $\Delta(x_0) = 0$, то $\Delta(x) > 0$ при $x \neq x_0$.

Применение понятие выпуклости при исследовании числа решений уравнения связано со следующим утверждением.

Теорема. *Выпуклая (выпуклая вверх) функция имеет не более двух корней.*

Действительно, если $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, где $a < b < c$, то $f(b) < \alpha f(a) + (1-\alpha)f(c) = 0$ (здесь $\alpha = \frac{c-b}{c-a}$).

Рассмотрим один пример. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Так как $f''(x) = (\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-2} < 0$, то при $0 < \alpha < 1$ данная функция является выпуклой вверх на всей своей области определения, в частности, ее график лежит под касательной к нему, проведенной в точке с $x = 0$ (рис. 192, *б*), т. е. верно неравенство

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x, \ 0 < \alpha < 1,$$

если же $\alpha > 1$, то $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$, т. е. ее график лежит под этой касательной и сама эта функция является строго выпуклой (рис. 192, *а*) (см. далее неравенство Бернулли).

2. Преобразования множеств и уравнений

Говорят, что множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $f(x,y) = 0$ (неравенством $f(x,y) > 0$), если:

(i) координаты любой точки, принадлежащей данному множеству, удовлетворяют данному уравнению (неравенству);

(ii) для любой пары чисел (x,y), удовлетворяющей данному уравнению (неравенству), точка A с координатами (x,y) принадлежит множеству $\mathcal{M}$.

Теорема. *Пусть множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $f(x,y) = 0$, а множество $\mathcal{N}$ — уравнением $g(x,y) = 0$. Тогда:*

1) *уравнение $f(x,y)g(x,y) = 0$ задает объединение $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ этих множеств;*

2) *уравнение $f^2(x,y)+g^2(x,y) = 0$, а также система $\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ задают их пересечение $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.*

Приведем доказательство пункта 1). Если точка $A(x_0, y_0) \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, то $A \in \mathcal{M}$ или $A \in \mathcal{N}$, значит, по пункту (i) определения, $f(x_0,y_0) = 0$ или же $g(x_0,y_0) = 0$, поэтому $f(x_0,y_0)g(x_0,y_0) = 0$, т. е. пара чисел x_0, y_0 — координаты точки A — удовлетворяет уравнению $f(x,y)g(x,y) = 0$. Обратно, если $f(x_0,y_0)g(x_0,y_0) = 0$, то $f(x_0,y_0) = 0$ или $g(x_0,y_0) = 0$, тогда, в силу свойства (ii) определения, $A(x_0,y_0) \in \mathcal{M}$ или $A(x_0,y_0) \in \mathcal{N}$, т. е. $A \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$.

Теорема. *Пусть уравнение* $f(x,y)=0$ *задает множество* $\mathcal{M}$. *Тогда:*

1) *уравнение* $f(x-\alpha, y-\beta)=0$ *задает образ множества* $\mathcal{M}$ *при параллельном переносе на вектор* $\mathbf{a}(\alpha,\beta)$;

2) *уравнение* $f(2x_0-x, 2y_0-y)=0$ *задает его образ при центральной симметрии относительно точки* $A(x_0,y_0)$;

3) *уравнение* $f(\frac{x}{k},\frac{y}{k})=0$ *задает его образ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом* k;

4) *уравнение* $f(y,x)=0$ *задает его образ при осевой симметрии относительно прямой* $y=x$.

Отметим, что уравнение множества преобразуется совершенно одинаково относительно обеих входящих в него переменных. Этот факт может показаться странным, поскольку хорошо известно, что, к примеру, при сдвиге графика функции f на единицу в положительном направлении вдоль оси абсцисс получается график функции $y=f(x-1)$, если же сдвиг производится вдоль оси ординат, то образ — график $y=f(x)+1$. Однако, если записать уравнение графика этой функции в виде $y-f(x)=0$, то в обоих случаях с переменными производятся одинаковые операции: замена $t\mapsto t-1$.

В заключение докажем утверждение пункта 3). Точка M с координатами (x,y) принадлежит образу множества $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда точка K с координатами $(\frac{x}{k},\frac{y}{k})$ принадлежит самому этому множеству (поскольку данное преобразование переводит K в M), что, по определению, имеет место тогда и только тогда, когда координаты точки K, т. е. числа $\frac{x}{k}$ и $\frac{y}{k}$, удовлетворяют уравнению множества $\mathcal{M}$. Следовательно, M принадлежит образу исходного множества тогда и только тогда, когда $f(\frac{x}{k},\frac{y}{k})=0$.

3. Индукция

Предположим, что требуется проверить тождество

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

при всех натуральных n. Оно справедливо при $n=1$. Если оно верно при некотором натуральном n, то оно верно и для следующего за ним натурального числа $n+1$, поскольку

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемое тождество справедливо при всех $n\in\mathbb{N}$.

Другой пример. Докажем, что число $2^{2n-1}+4^{2n-1}$ делится на 3 при всех $n\in\mathbb{N}$. При $n=1$ имеем: $2^1+4^1=6$ — делится на 3. Разность

$$2^{2(n+1)-1}+4^{2(n+1)-1}-\left(2^{2n-1}+4^{2n-1}\right)=3\cdot 2^{2n-1}+15\cdot 4^{2n-1}$$

делится на 3, поэтому, если делится на 3 вычитаемое, то тем же свойством обладает и уменьшаемое. Отсюда делаем вывод, что рассматриваемое утверждение верно при всех $n\in\mathbb{N}$.

Изложенная схема рассуждения называется *методом математической индукции*, который часто применяется при доказательстве последовательности математических утверждений, формулируемых для произвольного натурального числа. Почему этот метод справедлив — вопрос достаточно тонкий, связанный с аксиоматикой натуральных чисел (см., к примеру, [6, глава 1]).

Приведем также формально более слабую, но равносильную изложенной, формулировку этого метода.

Пусть дана последовательность $A(1),A(2),\ldots,A(n),\ldots$ математических утверждений, первое из которых верно. Пусть из того, что верны утверждения $A(1),A(2),\ldots,A(n)$, следует, что верно и следующее за ними утверждение $A(n+1)$. Тогда все они справедливы (пример применения — решение задачи 14.3а).

Докажем "по индукции" неравенство Бернулли

$$(1+a)^n\geqslant 1+an,\ n\in\mathbb{N},\ a>-1.$$

При $n=1$ имеет место равенство. Далее,

$$(1+a)^{n+1}\geqslant(1+a)(1+an)=1+a(n+1)+a^2n\geqslant 1+a(n+1)$$

(первый переход сделан в силу индукционного предположения о справедливости неравенства $(1+a)^n\geqslant 1+an$).

Рассмотрим пример использования метода математической индукции, связанный с понятием *деления с остатком* для многочленов.

Для любых двух многочленов $p(x)$, $q(x)$ существуют такие многочлены $d(x)$ и $r(x)$, причем степень $r(x)$ меньше степени многочлена $q(x)$, что верно тождество $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по степени многочлена p. Пусть $d(x) = c_0x^k + \ldots + c_k$, $c_0 \neq 0$. Если p — многочлен степени 0, т. е. $p(x) = c$, то $p(x) = 0 \cdot q(x) + c$. Предположим, что утверждение доказано для многочленов степени, не превосходящей n, и рассмотрим многочлен $p(x) = b_0x^{n+1} + b_1x^n + \ldots + b_{n+1}$. Представимость его в требуемом виде следует из тождества

$$p(x) = b_0x^{n+1} + \ldots + b^{n+1} = \frac{b_0}{c_0}x^{n+1-k}q(x) + b_1'x^n + \ldots + b_{n+1}' =$$

(по индукционному предположению)

$$= \frac{b_0}{c_0}x^{n+1-k}q(x) + d(x)q(x) + r(x) = d_1(x)q(x) + r(x).$$

4. Целые числа

При решении задач на делимость чисел часто используется такое утверждение: если натуральные числа a и p не имеют общих делителей (такие числа называются *взаимно простыми*; обозначение $(a,p) = 1$), а числа b и p также взаимно просты, то и произведение ab взаимно просто с p. Попробуйте доказать это утверждение, не используя единственность представления натурального числа в виде произведения степеней простых чисел.

Оказывается, что имеет место следующее утверждение. Если d — наибольший общий делитель чисел a и b, то существуют такие целые числа n и k, что $an + bk = d$.

Если числа a и b взаимно просты, то приведенное утверждение можно усилить:

$$(a, b) = 1 \iff \exists\, n, k \in \mathbb{Z}, \text{ такие, что } an + bk = 1.$$

Действительно, если $an + bk = 1$, а d — общий делитель чисел a и b, то он является и делителем их комбинации $an + bk$, значит, d — делитель числа 1, т. е. $d = 1$.

Вернемся к тому, с чего мы начали. Пусть $(a,p)=1$ и $(b,p)=1$, тогда существуют такие целые n, k, n_1, k_1, что

$$an+pk=1 \quad \text{и} \quad bn_1+pk_1=1,$$

откуда $ab(nn_1)+p(ank_1+bkn_1+pkk_1)=1$, значит, и $(ab,p)=1$.

Следствием доказанного является так называемая *основная теорема арифметики*: всякое натуральное число может быть единственным образом представлено в виде произведения натуральных степеней различных простых чисел.

Будем говорить, что целые числа a и b *сравнимы по модулю натурального числа* m, если разность $a-b$ делится на число m; обозначение $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

Прямо из определения деления с остатком следует, что каждое натуральное число сравнимо по модулю m со своим остатком от деления на m. Совсем легко доказать следующие свойства сравнений:

если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ и $b \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$, то $a \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$;

если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ и $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, то $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$ и $a+c \equiv b+d(\mathrm{mod}\, m)$.

Понятие сравнения по модулю удобно использовать, к примеру, при нахождении остатков от деления степеней чисел.

К примеру, $7 \equiv 7(\mathrm{mod}\, 19)$, $7^2=49 \equiv 11(\mathrm{mod}\, 19)$, $7^3 = 7\cdot 7^2 \equiv 7\cdot 11(\mathrm{mod}\, 19) \equiv 1(\mathrm{mod}\, 19)$. Каков остаток от деления на 19 числа 7^{1996}? Представив $1996 = 3\cdot 665+1$, получим, что $7^{1996}=(7^3)^{665}\cdot 7 \equiv 1^{665}\cdot 7 = 7(\mathrm{mod}\, 19)$.

На этом языке легко получить признаки делимости на 3, 9, 11. Так как $10 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 11)$, то

$$\begin{aligned}\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0} &= a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_0 \equiv \\ &\equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1}a_{n-1}+\ldots+a_0(\mathrm{mod}\, 11).\end{aligned}$$

В частности, число делится на 11, если разность суммы цифр, стоящих на четных позициях в его десятичной записи, и суммы цифр, стоящих на нечетных позициях, делится на 11. Признаки делимости на 3 и 9 еще проще, поскольку $10 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$ и $10 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, так что

$$\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0} \equiv a_0+\ldots+a_n(\mathrm{mod}\, 3) \text{ и } (\mathrm{mod}\, 9).$$

Если $(a,n)=1$, то найдется такое число k, что $ak+bn=1$, т. е. $ak-1$ делится на n, значит, $ak \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$. Отсюда следует еще одно свойство сравнений:

если $(c,n)=1$ и $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, n)$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$.

Докажем теперь, что если $(a, n) = 1$, то найдется натуральная степень числа a, сравнимая с единицей по модулю n.

Действительно, рассмотрим числа $a, a^2, \ldots, a^{n+1}$. Поскольку остатков от деления на n всего n штук, то найдутся две различные степени, имеющие одинаковые остатки, пусть $a^l \equiv a^{l'} \pmod n$, $l > l'$, тогда, поскольку $(a^{l'}, n) = 1$, то $a^{l-l'} \equiv 1 \pmod n$.

Верна следующая

Теорема (малая теорема Ферма). *Если p — простое число и $(a,p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.*

Ее обобщением является

Теорема (Эйлер). *Если $(a,n) = 1$, $\varphi(n)$ — число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним (включая единицу), то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.*

Теорема Ферма следует из такого простого наблюдения: поскольку $(a,n) = 1$, то набор остатков $d_1, d_2, \ldots, d_{p-1}$ от деления ak на p, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, совпадает с набором $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, поэтому, перемножив сравнения $ak \equiv d_k \pmod p$, получим, что $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p$, откуда, так как числа $(p-1)!$ и p взаимно просты, и следует требуемое сравнение.

5. Числа рациональные и иррациональные

Первый очевидный факт: корень из натурального числа либо является натуральным числом, либо иррационален. Всем также хорошо известно, что $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ — иррациональные числа. Однако для того, чтобы доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально, требуется дополнительное рассуждение. Если предположить, что $t = \sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, то $3 = t^2+2-2t\sqrt{2}$, таким образом, $\sqrt{2} = \frac{t^2-1}{2t} \in \mathbb{Q}$ — противоречие.

Полученное утверждение можно обобщить. К примеру, если $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$, то $a = b = c = 0$.

Поскольку существуют сколь угодно малые рациональные и иррациональные числа, то в любом интервале $(a; b)$ имеются как рациональные, так и иррациональные числа. Отсюда, в частности, следует, что всякое иррациональное число является пределом последовательности, состоящей из рациональных чисел.

Часто при решении алгебраических уравнений степени больше двух приходится заниматься подбором корня. Возникающий при этом перебор можно облегчить, если использовать следующий факт. Если коэффициенты многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

являются целыми числами и рациональное число $\frac{p}{q}$ (мы предполагаем, что $(p, q) = 1$, т. е. что дробь несократима) является его корнем, то p — делитель a_n (свободного члена этого многочлена), а q — делитель коэффициента a_0 при его старшей степени.

Действительно, если $a_0(\frac{p}{q})^n + a_1(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, то $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_nq^n = 0$, поэтому a_nq^n делится на p, значит, a_n делится на p (так как числа p и q взаимно просты).

Второе утверждение доказывается аналогично. Таким образом, хотя, к примеру, многочлен $32x^5 - 40x^3 + 10x - 1$ имеет пять вещественных корней $x_k = \cos(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5})$, лишь один из них — $x_4 = \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$ — является рациональным числом. В частности, число $\cos\frac{\pi}{15}$ иррационально.

Не следует думать, что всякое вещественное число является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Наоборот, в некотором вполне определенном смысле, чисел, являющихся корнями таких многочленов (они называются *алгебраическими*), столько же, сколько рациональных, а не являющихся таковыми — гораздо больше. Труднее бывает доказать, что данное конкретное число — не алгебраическое. Примером таких чисел являются π и e, их неалгебраичность была доказана в прошлом веке. Мы докажем более простой факт — иррациональность e.

Обычно число e определяется как предел последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$, нам потребуется его представление в виде суммы ряда

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Если предположить, что $e = \frac{p}{q}$, то

$$q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \ldots - \frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

Осталось заметить, что в левой части этого равенства стоит натуральное число, в то время как число, стоящее в его правой части, меньше единицы, так как

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots = \frac{1}{q}.$$

6. Классические неравенства

Неравенство Бернулли (см. пп. 1, 3)

$$(1+a)^n \geqslant 1 + an \quad \text{при } n \in \mathbb{N},\ a > -1.$$

Неравенство Коши–Буняковского

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Для доказательства достаточно заметить, что квадратный (относительно t) многочлен $p(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - b_i t)^2$ неотрицателен, значит, его дискриминант неположителен.

Неравенство Коши

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},\ a_i \geqslant 0.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ (формально: сделайте замену $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$). Доказательство приведем по индукции. Если не все числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ равны друг другу, то среди них найдется большее единицы и меньшее ее, пусть $x_n < 1 < x_{n+1}$. Тогда $(x_{n+1} - 1)(1 - x_n) > 0$, $x_n + x_{n+1} > 1 + x_n x_{n+1}$ и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} > x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1 \geqslant n + 1$$

(по индукционному предположению, примененному к числам $x_1, x_2, \ldots, x_n x_{n+1}$).

Неравенство Коши можно обобщить:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \geqslant a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}, \quad \text{при } a_i, \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Один (не самый хороший) способ его доказать связан с рассмотрением вначале случая $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, а затем предельного перехода для произвольных неотрицательных вещественных чисел α_i. Частный случай последнего неравенства — это неравенство Юнга.

Неравенство Юнга (см. также решение задачи 5.4в)

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab, \ a, b \geqslant 0, \ p, q > 0, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Неравенство Чебышева: если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то (см. решение задачи 8.4б)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Во многих случаях справедливость неравенств, аналогичных неравенству Коши, связана с выпуклостью некоторой функции. Мы вначале докажем по индукции, что из того, что при всех x_1, x_2 из некоторого промежутка справедливо неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

следует справедливость неравенства

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} > f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right)$$

при любых числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из того же промежутка (не все из которых равны друг другу).

Использованная далее идея была предложена О. Коши для доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Заметим прежде всего, что рассматриваемое нами неравенство справедливо, если число n является степенью двойки, $n = 2^m$. Далее, пусть m — такое число, что $n < 2^m$. Положим $\xi = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ и рассмотрим набор чисел y_i, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$, где $y_i = x_i$ при $i = 1, \ldots, n$ и $y_i = \xi$ при $i = n + 1, \ldots, 2^m$. Поскольку

$$\xi = 2^{-m}((2^m - n)\xi + n\xi) = 2^{-m}((2^m - n)\xi + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= 2^{-m}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{2^m}),$$

то $f(\xi) < 2^{-m}((2^m - n)f(\xi) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))$, откуда и следует требуемое неравенство. Ясно, что тогда верно и неравенство

$$f(rx_1 + (1 - r)x_2) < rf(x_1) + (1 - r)f(x_2), \ r \in \mathbb{Q}, \ r \in (0; 1).$$

Докажем, что в последнем неравенстве можно убрать ограничение на рациональность коэффициента r.

Пусть $\lambda \in (0;1)$, а r_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — сходящаяся к числу λ последовательность рациональных чисел. Поскольку

$$f(r_n x_1 + (1 - r_n)x_2) < r_n f(x_1) + (1 - r_n)f(x_2),$$

а функция f непрерывна, то

$$f(r_n x_1 + (1 - r_n)x_2) \underset{n\to\infty}{\to} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

значит, по свойству предельного перехода в неравенствах, имеем

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Осталось доказать, что последнее неравенство в действительности обязано быть строгим, это можно вывести из определения выпуклости.

Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Поскольку

$$\frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab} \leqslant \ln\frac{a+b}{2},$$

то, по доказанному, справедливо и неравенство

$$\ln\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n} \leqslant \leqslant \ln\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

а поскольку функция $\ln x$ еще и монотонна, то из последнего неравенства следует неравенство Коши.

7. Многочлены

Пусть $p(x)$ — многочлен, a — некоторое число. Разделим $p(x)$ на $x - a$ с остатком: $p(x) = d(x)(x - a) + r$. Подставив в это тождество $x = a$, получим, что $r = p(a)$. В частности, число a является корнем многочлена p тогда и только тогда, когда многочлен $p(x)$ делится на $x - a$.

Если $t_1, \ldots, t_n$ — корни многочлена $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ и все эти числа различны, то $p(x)$ делится на произведение

$(x-t_1)\dots(x-t_n)$, поэтому $p(x) = a_0(x-t_1)\dots(x-t_n)$. Раскрыв скобки в правой части этого тождества и приравняв коэффициенты при степенях x справа и слева, получим обобщение известных формул Виета для квадратного уравнения:

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + \ldots + t_nt_{n-1} = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\ldots$$

$$t_1t_2\ldots t_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

В частности, для кубического уравнения $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ имеем

$$t_1 + t_2 + t_3 = -a_1,$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = a_2,$$

$$t_1t_2t_3 = -a_3.$$

Число $x = a$ называется *корнем кратности* k многочлена $p(x)$, если этот многочлен делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$. Поэтому, если $t_1,\ldots,t_3$ — корни многочлена p, кратности которых равны, соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_s$, то $p(x) = a_0(x-t_1)^{k_1}(x-t_2)^{k_2}\ldots(x-t_s)^{k_s}$. В связи с этим часто говорят, что кратный корень считается столько раз, какова его кратность.

Оказывается, что понятие кратного корня многочлена связано с его свойствами как функции. Именно, верно следующее утверждение:

Число a является корнем кратности 2 многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(a) = p'(a) = 0$, а $p''(a) \neq 0$.

Доказательство основано на простом вычислении: если $p(x) = (x-a)q(x)$, то $p'(x) = q(x) + (x-a)q'(x)$, поэтому $p'(a) = q(a)$. Закончите рассуждение самостоятельно.

Так называемая *основная теорема высшей алгебры* (нетривиальное утверждение, доказываемое средствами математического анализа или топологии) утверждает, что всякий непостоянный многочлен имеет (комплексный) корень. Используя индукцию, нетрудно показать, что многочлен степени n имеет ровно n (комплексных) корней, если каждый из них считать столько раз, какова его кратность.

Рассмотрим многочлен $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Интуитивные соображения говорят, что его корни не могут быть велики при не слишком больших значениях его коэффициентов. Точнее, можно написать различные зависящие от коэффициентов многочлена оценки сверху на модули его корней. К примеру, если r — наибольший модуль корня, то $r \leqslant \max\limits_{i=1,\ldots,n-1} |a_i| + 1$. Положим для удобства $m = \max|a_i|$, тогда, если $|x| > r$, то

$$|x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n| \geqslant |x|^n - (|a_1||x|^{n_1} + \ldots + |a_n|) \geqslant$$
$$\geqslant |x|^n - m(1 + |x| + \ldots + |x|^{n-1}) = |x|^n - m\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} =$$
$$= \frac{|x|^{n+1} - (m+1)|x|^n + m}{|x| - 1} = \frac{|x|^n(|x| - (m+1)) + m}{|x| - 1} > 0.$$

При решении систем, состоящих из так называемых симметрических уравнений, часто используют замену $u = x + y$, $v = xy$. Многочлен $p(x, y)$ двух переменных называется *симметрическим*, если он совпадает с многочленом $p(y, x)$, полученным из исходного перестановкой переменных, т. е. если в многочлене $p(x, y)$ совпадают коэффициенты при одночленах вида $x^k y^l$ и $x^l y^k$. Оказывается, что симметрический многочлен является многочленом от $x + y$ и xy, т. е. существует такой многочлен $d(u, v)$, что $p(x, y) = d(x + y, xy)$.

Для этого достаточно доказать представимость в указанном виде *многочлена Ферма* $x^n + y^n$, что легко может быть доказано по индукции. (Воспользуйтесь тождеством $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$.)

Справедливо и аналогичное утверждение о представимости симметрических многочленов от большего числа переменных в виде многочленов от так называемых *элементарных симметрических многочленов*, появляющихся при выражении коэффициентов многочлена через его корни по формулам Виета. К примеру, для многочленов Ферма от трех переменных:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x + y + z)^4 - 4(x + y + z)^2(xy + yz + zx) +$$
$$+ 2(xy + yz + zx)^2 + 4xyz(x + y + z).$$

Приведем несколько красивых условных алгебраических тождеств. Если $a+b+c=0$, то

$$a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2,$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

вообще, если $s_n=a^n+b^n+c^n$ и $a+b+c=0$, то

$$s_{n+3}=abcs_n+\frac{1}{2}s_2s_{n+1}.$$

Применим утверждение о числе корней алгебраических уравнения к задаче о пересечении кривых на плоскости, заданных алгебраическими уравнениями. Общая задача об определении числа точек пересечения алгебраических кривых $p_n(x,y)=0$ и $q_k(x,y)=0$, где p_n и q_k — многочлены произвольных степеней n и k, далеко не проста. Однако, если линейное выражение $ax+by+c$ не является множителем многочлена $p_n(x,y)$ (степени n по совокупности переменных x и y), то кривая, заданная уравнением $p_n(x,y)=0$, имеет с прямой $ax+by+c=0$ не более n общих точек (см. задачу 52.1г). Также нетрудно доказать, что кривые, заданные уравнениями второй степени $p_2(x,y)=0$ и $q_2(x,y)=0$, имеют (в общем случае) не более четырех точек пересечения.

8. Бином Ньютона

Если в выражении $(x+1)^n$ раскрыть скобки, то получится некоторый многочлен, коэффиценты которого обозначаются через C_n^k и называются *биномиальными коэффициентами*:

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k.$$

Ясно, что $C_n^0=C_n^n=1$. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^kx^k=(x+1)(x+1)^n=(x+1)\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k=$$

$$=x^{n+1}+x\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kx^k+\sum_{k=1}^{n}C_n^kx^k+1=$$

$$=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)x^k+1,$$

то $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ при $k = 1, 2, \dots, n$ и $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^0 = 1$. Полученная рекуррентная формула позволяет довольно быстро находить биномиальные коэффиценты при не очень больших n, обычно их располагают в виде так называемого *треугольника Паскаля*:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

Подставив в тождество, являющееся определением биномиальных коэффициентов, по очереди значения $x = 1$ и $x = -1$, получим

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad \text{и} \quad \sum_{k \text{ четно}} C_n^k = \sum_{k \text{ нечетно}} C_n^k.$$

Явный вид чисел C_n^k будет получен далее. Заметим, однако, что доказательства соотношений между различными наборами биномиальных коэффициентов часто удобнее проводить, используя их определение (см. решение задачи 12.4б).

9. Комбинаторика и вероятность

В самом упрощенном виде комбинаторная задача состоит в подсчете числа элементов некоторого конечного множества. Приведем два основных принципа подсчета:

если два множества конечны и не пересекаются, то число элементов в их объединении равно сумме числа элементов каждого из них;

число всевозможных упорядоченных пар (a, b), где a — элемент первого множества, а b — элемент второго, равно произведению числа элементов этих множеств.

Естественно, что эти принципы могут быть перенесены на случай произвольного конечного числа множеств:

если множества $A_i, i = 1, 2, \dots n$, попарно не пересекаются, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|;$$

число всевозвожных упорядочных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равно произведению $|A_1||A_2|\ldots|A_n|$ (здесь и далее $|A|$ — число элементов конечного множества A).

Первый из этих принципов легко обобщить на случай пересекающихся множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1, \cdots, i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

В случае $n = 2$ получаем формулу $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, доказательство которой очень просто; общая формула доказывается по индукции.

Множество, число элементов которого требуется найти, часто имеет словесное описание. Рассмотрим несколько классических комбинаторных задач.

1) Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых четны?

Число $\overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ есть упорядоченный набор $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$, где $a_4 \in \{2, 4, 6, 8\}$ и $a_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ при $i \leqslant 3$, поэтому всего имеется $4 \cdot 5^4 = 25000$ таких чисел.

2) Сколькими способами можно выложить в один ряд n различных предметов?

С формальной точки зрения, речь идет о числе упорядоченных наборов $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, где $a_{i_1} \in A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_n}\}$, $a_{i_2} \in A \setminus \{a_{i_1}\}$, $a_{i_3} \in A \setminus \{a_{i_1}, A_{i_2}\}$ и т. д., что не совсем соответствует второму комбинаторному принципу подсчета, так как множества, которому принадлежит элемент a_3, зависит от элементов, выбранных на предыдущем шаге. Однако число элементов множества, из которого выбирается a_s, ни от чего не зависит и равно $n - s + 1$. Поэтому ответ: $n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ (читается "n-факториал"). Таким образом, мы доказали, что число *перестановок из n элементов* равно $n!$.

Обобщим эту задачу. Число способов, которыми можно выложить в ряд k предметов из n данных различных (т. е. число упорядоченных наборов $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k})$), называется *числом размещений из n элементов по k*. Оно равно $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Числом сочетаний из n по k называется число способов выбрать k предметов из n данных различных (т. е. число всех k-элементных подмножеств множества из n элементов). Отличие этой задачи от предыдущей в том, что в данном случае нас интересует число неупорядоченных наборов (к примеру, $\{1,2\} = \{2,1\}$). Для ее решения используем еще один простой, но несколько менее наглядный комбинаторный принцип.

Сопоставим каждому набору $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ ("способу выбора") множество всех упорядоченных наборов, составленных из его элементов. Как следует из предыдущего, число элементов в каждом из таких множеств (при фиксированных $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$) равно $k!$. Итак,

$$\{1,2,\dots,k\} \mapsto \{(1,2,\dots,k),\dots,(k,k-1,\dots,1)\},$$
$$\dots$$
$$\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\} \mapsto \{(a_{i_1},\dots,a_{i_k}),\dots,(a_{i_k},\dots,a_{i_1})\},$$
$$\dots$$
$$\{n-k+1,\dots,n-1,n\} \mapsto \{(n-k+1,\dots,n-1,n),\dots,$$
$$(n,n-1,\dots,n-k+1)\}.$$

Каждое из правых множеств состоит из $k!$ элементов, а всего число элементов в этих множествах равно числу размещений из n по k, т. е. $n(n-1)\dots(n-k+1)$. Следовательно, чтобы получить число неупорядоченных наборов, нужно разделить второе число на первое, в результате получаем $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. Обозначим временно это число через S_n^k. Ясно, что $S_n^0 = S_n^n = 1$, нетрудно видеть также, что $S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + S_n^k$. Действительно, все наборы по k элементов из $n+1$ данных можно разбить на два типа: к первому типу отнесем те наборы, которые содержат первый данный элемент (таковых S_n^{k-1}), ко второму — те, которые его не содержат (их S_n^k).

Таким образом, мы получили, что для чисел сочетаний верны те же соотношения, что и для биномиальных коэффициентов, откуда по индукции находим:

$$C_n^k = S_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Последняя из элементарных задач — о разбиении. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде упорядоченной суммы k натуральных чисел? Ответ: C_{n-1}^{k-1} способов.

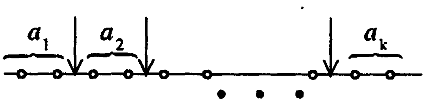

Рис. 193

Отметим на прямой n точек. Выберем $k-1$ промежуток с концами в паре соседних точек и вобьем "колышек" в его середину. Пусть a_1 — число точек слева от самого левого колышка, a_2 — число точек между самым левым колышком и следующим за ним, и т. д. (рис. 193). Таким образом, каждому набору из $k-1$ промежутка сопоставлено упорядоченное представление $n = a_1 + \ldots + a_k$. Нетрудно видеть, что это сопоставление взаимно однозначно.

Однако не следует думать, что ответ во всякой комбинаторной задаче выражается через числа сочетаний или размещений (см., к примеру, задачу 2.5, посвященную свойствам и определению *чисел Эйлера*).

В разговоре о *вероятности* того или иного события основные понятия — это *равновновероятность событий* и их *независимость*, которые мы будем понимать чисто интуитивно.

К примеру, мы считаем, что исходы — герб или решка — при бросании симметричной монеты равновероятны, поэтому вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$. Если монету бросить два раза подряд, то ясно, что исход второго броска не зависит от того, что выпало в результате первого из них — герб или решка, т. е. эти события независимы. Поэтому вероятность появления, к примеру, двух гербов при бросании двух монет равна $\frac{1}{4}$.

В качестве определения *вероятности события* при конечном числе равновероятных исходов принимается отношение $\frac{k}{n}$ числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов некоторого испытания.

Найдем, основываясь на этом определении, вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков будет равна семи. Пусть a_i — число очков, выпавших на i-м кубике. Ясно, что все исходы (a_1, a_2) равновероятны. Сколько существует пар (a_1, a_2), таких, что $a_1 + a_2 = 7$? Шесть: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$.

Из данного определения вероятности нетрудно вывести следующее правило, которое часто бывает удобно использовать при конкретных подсчетах. Если p_1, p_2 — вероятности двух независимых событий, то вероятность одновременного осуществления обоих этих событий равна p_1p_2 (см. задачу 12.4в).

Во многих случаях бывает нужно найти вероятность события в случае бесконечного множества возможных исходов. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие между исходами испытания и точками некоторого множества G на плоскости, причем процесс выбора точки этого множества происходит случайным образом. Мы можем сделать предположение, что вероятность попадания точки в некоторое множество не зависит от его формы, а зависит лишь от его площади. Конечно, в каждом конкретном случае правомерность такого заключения должна быть проверена экспериментально (это проверка правомерности применения данной математической модели). Поэтому, если нас интересует вероятность наступления некоторого события, которому при имеющемся соответствии сопоставлено подмножество $X \subset G$, то вероятность этого события равна отношению площади множества X к площади всего множества G (см. решения задач 13.4в и 14.4в).

10. Комплексные числа

Комплексные числа изучаются во всех математических классах. В данном пункте основное внимание будет уделено применениям комплексных чисел, но вначале кратко (и формально) изложим основные определения и необходимые формулы.

Рассмотрим точки $z(x, y), w(u, v)$ координатной плоскости (подчеркнем, что z и w — это обозначения точек). Пусть $z + w$ — точка с координатами $(x+u, y+v)$, а точка zw имеет координаты $(xu - yv, xv + yu)$. Оказывается, что введенные таким образом операции обладают обычными свойствами сложения и умножения (можете прямо проверить, что, к примеру, $z(w+t) = zw+zt$). Пусть точка i имеет координаты $(0, 1)$, тогда, по определению умножения, $i^2 = i \cdot i = (-1, 0)$. Будем далее называть множество точек плоскости с введенными для них операциями сложения и умножения *комплексными числами* и отождествлять точки оси абсцисс с вещественными. Тогда $z(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$, здесь $x, y \in \mathbb{R}$, а i — введенное выше комплексное число.

Модулем $|z|$ комплексного числа называется расстояние от точки z до нуля (т. е. до начала координат), так что $|z| =$

$\sqrt{x^2+y^2}$. Нетрудно проверить, что

$$(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2), \text{т. е. } |zw|^2=|z|^2|w|^2,$$

поэтому $|zw|=|z||w|$.

Всякое (отличное от нуля) комплексное число можно записать в виде

$$z=|z|\frac{z}{|z|}=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(так как $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2=1$) и, используя определение их произведения и формулы сложения для синуса и косинуса, получить, что

$$zw=|z||w|(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

Из последней формулы, в частности, следует *формула Муавра*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

и *геометрическая интерпретация умножения* комплексных чисел.

Фиксируем число $w=|w|(\cos\theta+i\sin\theta)$ и рассмотрим преобразование плоскости: $z\mapsto wz$. Это преобразование является композицией поворота на угол θ вокруг нуля и гомотетии с коэффициентом $k=|w|$, в частности, оно есть преобразование подобия (см., к примеру, задачи 50.4в и 55.5б).

Комплексно-сопряженным к числу $z=x+iy$ называется число $\overline{z}=x-iy$, значит, если $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то $\overline{z}=|z|(\cos\varphi-i\sin\varphi)$. Полезно отметить, что $z\overline{z}=|z|^2$, таким образом, уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом R можно записать в виде $(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0)=R^2$, или

$$z\overline{z}-z\overline{z}_0-\overline{z}z_0+z_0\overline{z}_0=R^2.$$

Далее, уравнение прямой $ax+by+c=0$ в этих обозначениях будет иметь вид $a\frac{z+\overline{z}}{2}+b\frac{z-\overline{z}}{2i}+c=0$, или $z\overline{w}_0+\overline{z}w_0+2c=0$, где $w_0=a+bi$, а число c вещественное.

В терминах комплексных чисел удобно записывается преобразование, называемое *инверсией* относительно окружности, которое сопоставляет точки M плоскости такую точку M', лежащую на луче $[OM)$ (здесь O — центр), что $OM \cdot OM' = R^2$ (R — радиус окружности). Очевидно, что инверсия сопоставляет числу z число $R^2/\overline{z}$.

Для простоты исследуем свойства инверсии относительно единичной окружности с центром в начале координат. Предположим, что точка z лежит на прямой $z\overline{w}_0 + \overline{z}w_0 + 2c = 0$. Если $w = \frac{1}{\overline{z}}$ — ее образ, то $z = \frac{1}{\overline{w}}$, поэтому $\frac{\overline{w}_0}{\overline{w}} + \frac{w_0}{w} + 2c = 0$, откуда $2cw\overline{w} + w\overline{w}_0 + \overline{w}w_0 = 0$. Таким образом, если $c = 0$ (т. е. если исходная прямая проходила через начало координат), то ее образ — прямая (конечно, без нуля), а при $c \neq 0$ образ — окружность без начала координат.

Как было сказано в п. 7, всякий непостоянный многочлен с (комплексными) коэффициентами имеет (комплексный) корень. Предположим, что коэффициенты исходного многочлена вещественны. Тогда если z_0 — его корень, то и число $\overline{z}_0$ является корнем данного многочлена ($a_0\overline{z}_0^n + a_1\overline{z}_0^{n-1} + \ldots + a_n = \overline{a_0 z_0^n + \ldots + a_n} = 0$). Далее, произведение $(x - z_0)(x - \overline{z}_0) = x^2 - x(z_0 + \overline{z}_0) + z_0\overline{z}_0$ является многочленом с вещественными коэффицентами. Поэтому всякий многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов степени не выше двух, коэффициенты которых также вещественны.

Рассмотрим многочлен $x^k - 1$. Из формулы Муавра следует, что его корнями являются числа $z_j = \cos\frac{2\pi j}{k} + i\sin\frac{2\pi j}{k}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Легко заметить, что эти числа расположены в вершинах правильного k-угольника (то же утверждение справедливо для корней многочлена $x^k - c$, где c — произвольное комплексное число). Кроме того, $z_j = z_1^j$, т. е. эти корни являются степенями одного из них, называемого *первообразным корнем* из единицы.

Имеем: $z_i z_{k-i} = (\cos\frac{2\pi i}{k} + i\sin\frac{2\pi i}{k})(\cos\frac{2\pi i}{k} - i\sin\frac{2\pi i}{k}) = 1$ и $z_i + z_{k-i} = 2\cos\frac{2\pi i}{k}$. Таким образом, получаем разложение

$$x^k - 1 = \begin{cases} (x^2 - 1)\prod\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}-1}(x^2 - 2\cos\frac{2\pi i}{k}x + 1), & \text{если } k \text{ четно,} \\ (x - 1)\prod\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}-1}(x^2 - 2\cos\frac{2\pi i}{k}x + 1), & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Рассмотрим разложение $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x^2 - 2\cos\frac{i\pi}{n}x + 1)$, запишем его в виде

$$x^{2n-2}+\ldots+1=\prod_{i=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\frac{i\pi}{n}x+1\right)$$

и подставим $x=1$ в последнее равенство. Получаем

$$n=\prod_{i=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right)=2^{2(n-1)}\sin^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

откуда

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Кроме того, воспользовавшись формулой Муавра и биномом Ньютона, находим

$$\cos n\varphi+i\sin n\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^{n-k}\varphi\, i^k\sin^k\varphi=$$
$$=\sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^lC_n^{2l}\cos^{n-2l}\varphi\sin^{2l}\varphi+$$
$$+i\sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^lC_n^{2l+1}\cos^{n-2l-1}\varphi\sin^{2l+1}\varphi,$$

откуда следуют выражения для косинусов и синусов кратных углов.

В заключение вернемся к геометрической интерпретации и сформулируем условие подобия двух треугольников, вершинами которых являются, соответственно, тройки a, b, c и x, y, z комплексных чисел.

Для подобия необходимо и достаточно пропорциональности двух сторон и равенства стягиваемых ими углов, что равносильно равенству комплексных чисел: $\frac{y-x}{z-x}=\frac{b-a}{c-a}$, $(y-x)(c-a)=(b-a)(z-x)$, или же $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$.

ЗАДАЧИ 1996–2000 ГОДОВ
(условия, ответы, комментарии)

Контрольные работы для 10-х классов

1995/96

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = x^2 + \dfrac{54}{x}$.
   а) Решите неравенство $f(x) \leqslant 27$.
   б) Найдите все такие значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет три различных корня.
   в) Найдите наименьший член последовательности с общим членом $a_n = f(n)$.

2. а) Постройте график функции $y = \dfrac{2x-1}{|x|-1}$.
   б) Решите уравнение $x^5 + x^3 = 270$.
   в) Найдите наибольший член последовательности $a_n = 23 \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 9^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. а) Докажите, что при всех натуральных n число $9^n - 3^n + 2n$ делится на 4.
   б) Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1}$. Вычислите a_{1995}.
   в) Найдите все такие натуральные n при которых справедливо неравенство $3^{n-1} > 2n^2 + n$.

4. а) Докажите, что если числа x, y и $2\sqrt{x} + 19\sqrt{y}$ являются рациональными, то рациональны и числа $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$.
   б) Докажите, что число $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ иррационально, но является корнем многочлена с целыми коэффициентами.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество, заданное неравенством $\dfrac{x-y}{x^2+y^2-1} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

1. а) $[-6;0) \cup \{3\}$. **б)** *Ответ*: $(-\infty;-6) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$. Уравнение $f(x) = f(a)$ можно преобразовать к виду $(x-a)(x+a-\frac{54}{ax}) = 0$. Уравнение $ax^2 + a^2x - 54 = 0$ имеет два различных корня, если $a(a^3 + 6^3) > 0$, т. е. если $a \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$. Однако возможно, что одним из корней этого уравнения является число a, что действительно имеет место, если $2a^3 = 54$, т. е. если $a = 3$.

в) *Ответ*: $a_3 = f(3) = 27$. Действительно, из результата решения пункта а) следует, что $f(n) > 27 = f(3)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

2. а) См. рис. 194.

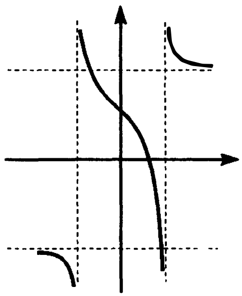

Рис. 194

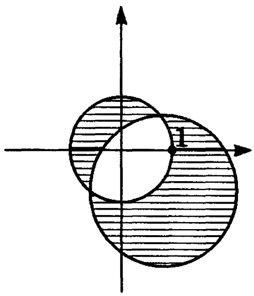

Рис. 195

б) $x = 3$. Поскольку функция $f(x) = x^5 + x^3$ монотонна на всей прямой, то данное уравнение имеет не более одного корня. **в)** $a_3 = 25$. Имеем: $a_n = f(3^{n-2})$, где $f(x) = 23x - 2x^2$. Так как функция f принимает наибольшее значение при $x = \frac{23}{4}$, то надо выбрать наибольший из членов a_3, a_4 данной последовательности.

3. **а)** Так как $3 \equiv -1 \pmod 4$, то $3^n \equiv (-1)^n \pmod 4$, а $9^n \equiv 1 \pmod 4$. Поэтому, если $n = 2k$, то $9^n - 3^n + 2n \equiv 1 - 1 = 0 \pmod 4$. Аналогично, если $n = 2k + 1$, то $9^n - 3^n + 2n \equiv 1 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod 4$. **б)** $a_{1995} = \frac{1}{1995}$. Нетрудно доказать по индукции, что $a_n = \frac{1}{(n-1)a_1+1}$. **в)** $n \geqslant 5$. Прямое вычисление показывает, что неравенство неверно при $n \leqslant 4$ и верно при $n = 5$. Далее по индукции: $3^n > 6n^2$, а $2(n+1)^2 + (n+1) = 2n^2 + 5n + 3 < 6n^2$ при $n \geqslant 5$.

4. а) Если $r = 2\sqrt{x} + 19\sqrt{y}$, то, к примеру, $4\sqrt{x} = r^2 + 4x - 381y \in \mathbb{Q}$. **б)** Если $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} = r \in \mathbb{Q}$, то $2 = r^3 + 15r - (3r^2 + 5)\sqrt{5}$, откуда $\sqrt{5} = \frac{r^3+15r-2}{3r^2+5} \in \mathbb{Q}$, противоречие. Далее, возведя в квадрат последнее равенство, получим, что $r = \sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ является корнем многочлена степени 6. **в)** См. рис. 195. Данное неравенство можно преобразовать к виду $\frac{(x-1)^2+(y-1)^2-3}{x^2+y^2-1} \geqslant 0$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{16}{x} - x^2$.
   а) Решите неравенство $f(x) + 12 \geqslant 0$.
   б) Найдите все такие значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет три различных корня.
   в) Найдите наибольший член последовательности с общим членом $a_n = f(-n)$.

2. а) Постройте график функции $y = \dfrac{x+2}{2|x|-1}$.
   б) Решите уравнение $x^7 + x = 130$.
   в) Найдите наименьший член последовательности $a_n = 2 \cdot 4^{n-3} - 13 \cdot 2^{n-3}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. а) Докажите, что число $5^{n-1} + 7^{n-1} - 2n$ делится на 4 при всяком натуральном n.
   б) Известно, что $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1-a_n}$. Вычислите a_{1996}.
   в) Найдите все такие натуральные n при которых справедливо неравенство $2^n > 3n^2 - n$.

4. а) Докажите, что если числа x, y и $96\sqrt{x} + \sqrt{-y}$ являются рациональными, то рациональны и числа $\sqrt{x}$, $\sqrt{-y}$.
   б) Докажите, что число $\sqrt[3]{5} + \sqrt{2}$ иррационально, но является корнем многочлена с целыми коэффициентами.
   в) Изобразите на координатной плоскости множество, заданное неравенством $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

1. **а)** $\{-2\} \cup (0; 4]$. **б)** $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (4; +\infty)$. **в)** $a_2 = -12$.
2. **а)** См. рис. 196. **б)** $x = 2$. **в)** a_5.
3. **б)** $a_{1996} = -\frac{2}{3989}$. **в)** $n \geqslant 8$. **4.** **в)** См. рис. 197.

1996/97

Вариант 1

1. Докажите, что
   а) число $456799^3 - 456799^2 - 4$ делится на 456797;
   б) при любом $n \in \mathbb{N}$ десятичная запись числа $2^{2^{n+1}} + 1$ оканчивается цифрой 7;
   в) число $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ рационально;

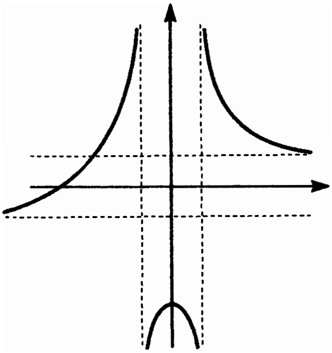

Рис. 196

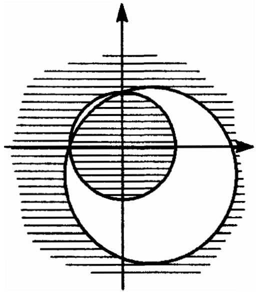

Рис. 197

г) на отрезке с концами в точках $A(-25, 19)$ и $B(26, -15)$ координатной плоскости лежит не более 19 точек с целочисленными координатами.

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+5}$.
   а) Найдите промежутки монотонности функции f.
   б) Найдите все a при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение.
   в) Найдите все a при которых $f(x) = f(a-x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.
3. а) Решите уравнение $(2x^2+3)^2 = x(4x^2+35x+6)$.
   б) Решите неравенство $|x^2+x-1| < |x^2-1| + |x|$.
   в) Найдите такие значения a, при которых сумма квадратов чисел x и y, являющихся решениями системы

$$\begin{cases} x+y = a-1, \\ xy = 2-a, \end{cases}$$

— наименьшая.

4. Найдите
   а) все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2, \\ x+|y| = a, \end{cases}$$

имеет два решения;

б) наименьшее значение x^2+y^2, если $x+|y| \geqslant \sqrt{2}$.

в) наибольшее значение $x + |y|$, если $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

1. **а)** Поскольку $x^3 - x^2 - 4 = (x-2)(x^2+x+2)$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ число $n^3 - n^2 - 4$ делится на $n - 2$. **б)** Заметим, что десятичная запись числа $2^{4k} = 16^k$ оканчивается цифрой 6. Поскольку число 2^{n+1} делится на 4, то последняя цифра числа $2^{2^{n+1}}$ — это 6. **в)** Положим $t = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Тогда $t^3 = 14 - 3t$, следовательно t — один из корней уравнения $x^3 + 3x - 14 = 0$. Далее, $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2+2x+7)$, поэтому единственным корнем последнего уравнения является число 2. **г)** Прямая, проходящая через данные точки A и B, задается уравнением $y = -\frac{1}{3}(2x+23)$. Для того, чтобы число y было целым, надо, чтобы $2x + 23$ делилось на 3, т. е. чтобы $2x \equiv 1 \pmod 3$, что имеет место если $x \equiv 2 \pmod 3$. Осталось заметить, что на отрезке $[-25; 26]$ имеются 18 целых чисел, имеющих остаток 2 при делении на 3.

2. **а)** Функция f убывает на луче $(-\infty; 1]$ и возрастает на луче $[1; +\infty)$. Результат очевиден, если переписать выражение, задающее данную функцию, в виде $f(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2+4}$. **б)** *Ответ*: $[\frac{1}{2}; 1)$. Используя преобразование предыдущего пункта, перепишем уравнение $f(x) = a$ в виде $(x+1)^2 = \frac{4a-2}{1-a}$. Это уравнение имеет решения, если $\frac{4a-2}{1-a} \geqslant 0$, откуда и следует ответ. **в)** *Ответ*: $a = -2$. Опять-таки, запишем уравнение $f(x) = f(a-x)$ в виде $(x+1)^2 = (a-x+1)^2$, или $2x + 1 = (a+1)^2 - 2(a+1)x$. Последнее равенство должно выполняться при всех $x \in \mathbb{R}$, откуда и следует ответ.

3. **а)** *Ответ*: $-\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}; 3$. Сделайте замену $t = \frac{2x^2+3}{x}$. **б)** *Ответ*: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$. Заметим, что неравенство $|a+b| < |a| + |b|$ верно, если числа a и b имеют противоположные знаки (в противном случае левая и правая части этого неравенства равны). В данном случае получаем, что $x(x^2 - 1) < 0$, откуда и следует ответ. **в)** *Ответ*: $a = 2\sqrt{2} - 1$. Имеем: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 3$. Ясно, что полученное выражение принимает наименьшее значение при $a = 0$, однако при этом значении a исходная система решений не имеет! Мы должны найти наименьшее значение выражения $a^2 - 3$ при дополнительном условии существования решений данной системы, т. е. при условии $a^2 + 2a - 7 \geqslant 0$, откуда и следует ответ.

4. **а)** *Ответ*: $\{2\} \cup (-2; 2)$. Удобно воспользоваться графической интерпретацией решений системы уравнений с двумя неизвест-

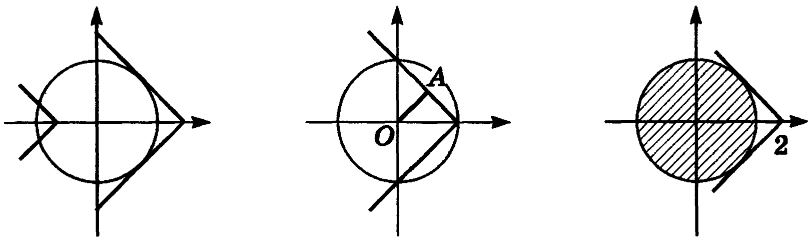

Рис. 198

ными (см. рис. 198). Изображенная на этом рисунке окружность, которая задана первым уравнением данной системы, имеет две общие точки с "галочкой", заданным ее вторым уравнением, тогда и только тогда, когда вершина этой галочки лежит в интервале $(-2; 2)$ оси абсцисс или когда ее стороны касаются окружности. Последний случай имеет место при $a = 2$. **б)** *Ответ*: 1. Действительно, наименьшее значение квадрата расстояния до начала координат от точек, лежащих в множестве, изображенном на рис. 6, равно квадрату длины отрезка OA. **в)** *Ответ*: 2 (см. рис. 198, *в*).

Вариант 2

1. Докажите, что
   а) число $876599^3 + 876599^2 + 4$ делится на 876601;
   б) при любом $n \in \mathbb{N}$ десятичная запись числа $3^{2^{n+1}} + 1$ оканчивается цифрой 2;
   в) число $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ рационально;
   г) на отрезке с концами в точках $A(-25, 29)$ и $B(13, -28)$ координатной плоскости лежит не более 21 точки с целочисленными координатами.

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2+4x+9}{x^2+4x+5}$.
   а) Найдите промежутки монотонности функции f.
   б) Найдите все a при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение.
   в) Найдите все a при которых $f(x) = f(a-x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

3. а) Решите уравнение $2(3x^2+1)^2 = x(15x^2+52x+5)$.
   б) Решите неравенство $|x^2+x-3| \geqslant |x^2-1| + |x-2|$.

в) Найдите такие значения a, при которых сумма квадратов чисел x и y, являющихся решениями системы

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = \frac{a^2}{2} - 2, \end{cases}$$

— наибольшая.

4. Найдите

а) все b, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ x - |y| = b, \end{cases}$$

имеет два решения;

б) наименьшее значение $x^2 + y^2$, если $x - |y| \leqslant -\sqrt{8}$.

в) наименьшее значение $x - |y|$, если $x^2 + y^2 \leqslant 3$.

1. в) Это число равно двум. **г)** Всего имеется двадцать таких точек. **2. а)** Функция возрастает на луче $(-\infty; -2]$ и убывает на луче $[-2; +\infty)$. **б)** $(1; 5]$. **в)** $a = -4$. **3. а)** $-1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 2$. **б)** $[-1; 1] \cup [2; +\infty)$. **в)** $a = -1 - \sqrt{10}$. **4. а)** $\{-\sqrt{6}\} \cup (\sqrt{3}; \sqrt{3})$. **б)** 2. **в)** $-\sqrt{6}$.

1997/98

Вариант 1

1. Найдите:

а) с точностью до 0,05 значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}} \quad \text{при} \quad a = 3 - \sqrt{2};$$

б) множество значений $x + y$, если $x^2 + y^2 \leqslant 2x + 1$;

в) последнюю цифру числа 2^{2^n}, $n \in \mathbb{N}$;

г) все значения a, для которых неравенство $\frac{(2a+1)x-(a+1)}{x-1} > 0$ верно при всех $x \geqslant 2$.

2. Дана функция $f(x) = x + \frac{4}{|x-\sqrt{2}|}$.

а) Найдите в зависимости от a число корней уравнения $f(x) = a$.

б) Докажите, что если $x \leqslant 0$, а $y \geqslant 4$, то $f(x) \leqslant f(y)$.

в) Найдите наименьший член последовательности $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Остаток при делении многочлена $p(x)$ на $x^3+x^2-10x+8$ равен $x^2 - x + 1$. Найдите:

а) $p(1)$ и $p(-4)$;

б) остаток от деления $p(x)$ на $x^2 - 3x + 2$;

в) такой многочлен $p(x)$, одним из корней которого является $\sqrt{2}$.

1. а) *Ответ*: 4,82. Положим $t = \sqrt{a-1} = \sqrt{2-\sqrt{2}} < 1$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+2t+1}} + \frac{1}{\sqrt{t^2-2t+1}} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{1-t}$$
$$= \frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{2-a} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1) \approx 4{,}82.$$

б) *Ответ*: $[-1; 3]$. По условию задачи требуется найти множество всех значений t. для которых имеет решение система

$$\begin{cases} x + y = t, \\ x^2 + y^2 \leqslant 2x + 1. \end{cases}$$

Исключив y, получим неравенство $2x^2 - 2(t+1)x + t^2 - 1 \leqslant 0$, которое имеет решение, если $t^2 - 2t - 3 \leqslant 0$. Другое решение данной задачи следует из рис. 199. **б)** 4 при $n = 1$, 6 при $n \geqslant 2$. **г)** $a > -\frac{1}{3}$.

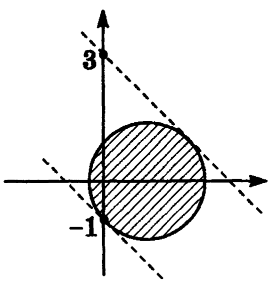

Рис. 199

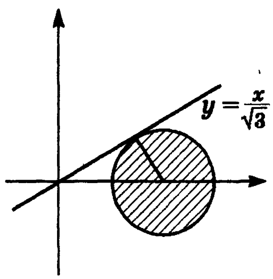

Рис. 200

2. **а)** Три решения при $a > 4+\sqrt{2}$, два — при $a = 4+\sqrt{2}$, одно решение при $a < 4+\sqrt{2}$. **б)** Поскольку данная функция возрастает на каждом из лучей $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$, то достаточно проверить, что $f(0) < f(4)$. **в)** a_3.

3. **а)** $f(1) = 1$, $f(-4) = 21$. **б)** $2x - 1$. **в)** К примеру, $p(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x^3+x^2-10x+8)+x^2-x+1$.

Экзаменационные работы для 10-х классов

1996 год

Вариант 1

1. а) Найдите промежутки монотонности функции $y = x^2(x-3)^2$.
   б) Найдите наибольшее значение отношения y/x, если $x^2 + y^2 + 3 \leqslant 4x$.
   в) Найдите все возможные значения $\sin 2x$, если $\operatorname{tg} x \geqslant k > 0$.
   г) Докажите неравенство $\log_2 n \leqslant (n+1)/2$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Дана функция $f(x) = 3\operatorname{tg}^2 x - a\cos^2 x + 1$.
   а) Пусть $a = 8$. Решите уравнение $f(x) = 0$.
   б) Пусть $a = 8$. Решите неравенство $f(x)/\sqrt{2+x-x^2} \geqslant 0$.
   в) Найдите все $a > 0$, при которых уравнение $f(x) = 0$ имеет решение.

3. Дана функция $f(x) = \log_2^2(a-x) - 8\log_{0,25}(a-x)$.
   а) Пусть $a = 2$. Решите уравнение $f(x) = 5$.
   б) Найдите все a, такие что $x = 0$ является одним из решений неравенства $f(x) \geqslant 5$.
   в) Пусть $a = 1/4$. Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $f(x) = f(y)$.

4. Дан многочлен $p(x) = x^4 - 2x^3 + x$.
   а) Разложите многочлен p в произведение многочленов степеней не выше двух с целыми коэффициентами.
   б) Решите уравнение $p(x) = 6$.
   в) Найдите множество значений $p(x)$ при $x \in [-1; 1]$.

1. **а)** *Ответ*: Функция убывает на $(-\infty; 0]$ и $[\frac{3}{2}; 3]$, возрастает на $[0; \frac{3}{2}]$ и $[3; +\infty)$. Запишем формулу для данной функции в виде $y = (x^2 - 3x)^2$ (т. е. в виде композиции $y = g(f(x))$ функций $f(x) = x^2 - 3x$ и $g(x) = x^2$). Если $a \leqslant b \leqslant 0$, то $a^2 - 3a \geqslant b^2 - 3b \geqslant 0$, откуда $(a^2 - 3a)^2 \geqslant (b^2 - 3b)^2$, таким образом, данная функция возрастает на луче $(-\infty; 0]$. Если $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \frac{3}{2}$, то $0 \geqslant a^2 - 3a \geqslant b^2 - 3b$, откуда $(a^2 - 3a)^2 \leqslant (b^2 - 3b)^2$, таким образом, функция убывает на отрезке $[0; \frac{3}{2}]$. Остальные случаи разбираются аналогично. **б)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Задачу можно решить при помощи графических соображений (см. рис. 200).

Дадим также формальное алгебраическое решение. Число t является значением отношения $\frac{y}{x}$, если имеет решение неравенство $x^2 + t^2x^2 + 3 \leqslant 4x$, или $(t^2+1)x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$. Следовательно, $4 - 3(t^2+1) = 1 - 3t^2 \geqslant 0$, откуда и следует ответ. **в)** *Ответ*: $(0; 1]$ при $0 < k \leqslant 1$; $(0; \frac{2k}{k^2+1}]$ при $k > 1$. Поскольку $\sin 2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2\,x + 1}$, то все, что надо сделать — это найти множество значений функции $f(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ на луче $[k; +\infty)$. Оталось заметить, что функция f возрастает от 0 до 1 на отрезке $[0; 1]$ и убывает от 1 до 0 на луче $[1; +\infty)$ (докажите это). **г)** Докажите неравенство $n^2 \leqslant 2^{n+1}$, равносильное данному.

2. **а)** *Ответ*: $\frac{1}{4}(\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Замена $t = \cos^2 x$ приводит к уравнению $8t^2 + 2t - 3 = 0$. б) $(-1; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; 2)$. **в)** *Ответ*: $a \geqslant 1$. После замены $t = \cos^2 x$ получим уравнение $at^2 + 2t - 3 = 0$, которое должно иметь решение $t \in (0; 1]$. Пусть $g(t) = at^2 + 2t - 3$. График функции g — парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $g(0) = -3$, то g имеет корень в промежутке $(0; 1]$ тогда и только тогда, когда $g(1) = a - 1 \geqslant 0$.

3. **а)** $0; \frac{63}{32}$. б) $a \geqslant 2$, $0 < a \leqslant \frac{1}{32}$. **в)** См. рис. 201.

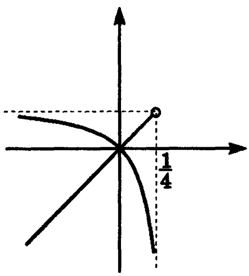

Рис. 201

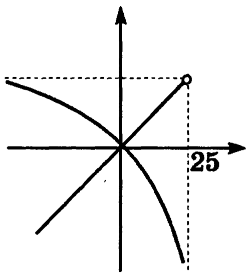

Рис. 202

4. **а)** $x^4 - 2x^3 + x = x(x-1)(x^2 - x - 1)$. **б)** $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$. **в)** *Ответ*: $[-\frac{1}{4}; 2]$. Если $x \in [-1; 1]$, то $u = x^2 - x \in [-\frac{1}{4}; 2]$ и $u^2 - u \in [-\frac{1}{4}; 2]$.

Вариант 2

1. а) Найдите промежутки монотонности функции $y = x^2(x+5)^2$.
   б) Найдите наибольшее значение отношения x/y, если $x^2 + y^2 + 3 \leqslant 4y$.
   в) Найдите все возможные значения $\sin 2x$, если $\operatorname{ctg} x \geqslant k > 0$.
   г) Докажите неравенство $\log_3 n \leqslant n/3$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Дана функция $f(x) = 3\operatorname{tg}^2 x - a\cos^2 x - 1$.
   а) Пусть $a = 4$. Решите уравнение $f(x) = 0$.
   б) Пусть $a = 4$. Решите неравенство $f(x)/\sqrt{3 - 5x - 2x^2} \leqslant 0$.
   в) Найдите все $a > 0$, при которых уравнение $f(x) = 0$ имеет решение.
3. Дана функция $f(x) = \log_5^2(a - x) + 2\log_{1/\sqrt{5}}(a - x)$.
   а) Пусть $a = 6$. Решите уравнение $f(x) = -3$.
   б) Найдите все a, такие что $x = 0$ является одним из решений неравенства $f(x) \leqslant -3$.
   в) Пусть $a = 25$. Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $f(x) = f(y)$.
4. Дан многочлен $p(x) = x^4 + 2x^3 - x$.
   а) Разложите многочлен p в произведение многочленов степеней не выше двух с целыми коэффициентами.
   б) Решите уравнение $p(x) = 20$.
   в) Найдите множество значений $p(x)$ при $x \in [-1; 1]$.

1. а) Функция убывает на $(-\infty; -5]$ и $[-\frac{5}{2}; 0]$, возрастает на $[-\frac{5}{2}; 0]$ и $[0; +\infty)$. б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. в) $(0; 1]$ при $0 < k \leqslant 1$; $(0; \frac{2k}{k^2+1}]$ при $k > 1$. **2.** а) $\frac{1}{4}(\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. б) $(-3; -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$. в) $a > 0$. **3.** а) $1; -119$. б) $5 \leqslant a \leqslant 125$. в) См. рис. 202. **4.** а) $x^4 + 2x^3 - x = x(x+1)(x^2 + x - 1)$. б) $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21})$. в) $[-\frac{1}{4}; 2]$.

1997

Вариант 1

1. Подчеркнем, что решения следующих задач должны быть вполне обоснованы.
   а) Найдите на координатной плоскости точку, сумма расстояний от которой до точек $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ и $C(5, 0)$ является наименьшей.

б) Может ли число $(\sqrt{3}-1)^p$, где p — ненулевое рациональное число, само быть рациональным?

в) Докажите, что на отрезке $[0;\pi]$ существует бесконечно много таких значений x, для которых

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos 1997x \geqslant 998.$$

г) Докажите неравенство $\log_3 7 + \log_7 28 > 3$.

2. Дана функция $f(x) = (a^2+2)\cos 4x - 4a(\cos^4 x + \sin^4 x) + 1$.

а) Пусть $a = 1$. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[10;20]$.

б) Пусть $a = -5$. Решите неравенство $f(x) < 0$.

в) Найдите все a, при которых функция f положительна на всей числовой оси.

3. Дана функция $f(x) = 4\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$.

а) Найдите все натуральные k, при которых функция $p(t) = f(t^k)$ есть многочлен.

б) Решите уравнение $f(x) = 1/4$.

в) Докажите, что при любом $a > 0$ уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.

4. Дана функция $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{1-x}}{3^x + 3^{-x}}$.

а) Решите уравнение $f(x) = 39/41$.

б) Какое из чисел больше, $f(\log_2 5)$ или $f(\log_2 3)$?

в) Найдите множество значений данной функции.

1. а) *Ответ*: $B(2,0)$. Пусть $d(x,y)$ — заданная сумма расстояний. Поскольку $d(x,y) = \sqrt{(x+2)^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x-5)^2+y^2}$, то ясно, что точка, для которой эта сумма минимальна, лежит на оси абсцисс, так что $y = 0$. Имеем, $d(x,0) = |x+2| + |x-2| + |x-5|$. Ясно, что искомое значение x лежит на отрезке $[-2;5]$, так что $d(x,0) = 7 + |x-2|$. **б)** Нетрудно доказать по индукции, что для любого натурального k имеет место равенство $(\sqrt{3}+1)^k = a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{N}$, таким образом, число $(\sqrt{3}+1)^k$ иррационально. Пусть $p = \frac{k}{n} > 0$. Если число $(\sqrt{3}-1)^{k/n}$ рационально, то является рациональным и число $(\sqrt{3}-1)^k = 2^n(\sqrt{3}+1)^{-k}$, что противоречит доказанной выше

иррациональности числа $(\sqrt{3}+1)^k$. **в)** Если $x \in [0; \frac{\pi}{3\cdot 1997}]$, то каждое слагаемое не меньше $\frac{1}{2}$. **г)** Так как $7^2 > 3^3$, то $7 > 3^{3/2}$, значит, $\log_3 7 > \frac{3}{2}$. Аналогично доказывается, что $\log_7 28 > \frac{3}{2}$.
2. Так как $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, то $f(x) = (a^2 - a + 2)\cos 4x + 1 - 3a$. **а)** *Ответ*: Шесть корней. При $a = 1$ получаем уравнение $\cos 4x = 1$, так что $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Неравенства $10 \leqslant \frac{\pi k}{2} \leqslant 20$ выполнены для $k = 7, 8, \ldots, 12$. **б)** *Ответ*: $(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. Указанные значения являются решениями неравенства $\cos 4x < -\frac{1}{2}$. **в)** *Ответ*: $\emptyset$. Для того, чтобы неравенство $(a^2 - a + 2)\cos 4x + 1 - 3a > 0$ было справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $-a^2 + a - 2 - 3a + 1 > 0$, или $a^2 + 2a + 1 < 0$.
3. **а)** $k = 6n$, $n \in \mathbb{N}$. **б)** *Ответ*: $x = \frac{1}{64}$. Замена $x = t^6$ приводит к уравнению $16t^3 + 4t^2 - 1 = 0$, в котором удобно сделать еще одну замену $u = 2t$. получив в итоге уравнение $2u^3 - u^2 - 1 = 0$. Поскольку $2u^3 - u^2 - 1 = (u-1)(2u^2 + 2u + 1)$, то $u = \frac{1}{2}$. **в)** Если $a > 0$ и $4t^3 - t^2 = a$, то $t > \frac{1}{4}$. Наконец, нетрудно видеть, что кубическая функция $y = 4t^3 - t^2$ строго монотонна на луче $[\frac{1}{4}; +\infty)$.
4. Имеем $f(x) = g(3^x)$, где $g(t) = \frac{t^2-3}{t^2+1}$. **а)** $x = 2$. **б)** *Ответ*: $f(\log_2 5) > f(\log_2 3)$. Из равенства $g(t) = 1 - \frac{4}{t^2+1}$ следует, что функция g возрастает на луче $(0; +\infty)$, следовательно функция f возрастает на всей числовой прямой. Осталось заметить, что $\log_2 5 > \log_2 3$. **в)** $(-3; 1)$.

Вариант 2

1. Подчеркнем, что решения следующих задач должны быть вполне обоснованы.
   а) Найдите на координатной плоскости точку, сумма расстояний от которой до точек $A(0, -3)$, $B(0, -2)$ и $C(0, 5)$ является наименьшей.
   б) Может ли число $(\sqrt{5}-2)^p$, где p — ненулевое рациональное число, само быть рациональным?
   в) Докажите, что на отрезке $[0; \pi]$ существует бесконечно много таких значений x, для которых
$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 1997x \leqslant 999.$$
   г) Докажите неравенство $\log_3 8 + \log_8 29 > 3$.

2. Дана функция $f(x) = 2(a^2-1)\cos 4x + (15a-36)(\cos^4 x + \sin^4 x)$.
   а) Пусть $a = 2$. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[8; 16]$.
   б) Пусть $a = 4$. Решите неравенство $f(x) > 0$.
   в) Найдите все a, при которых функция f отрицательна на всей числовой оси.

3. Дана функция $f(x) = \sqrt[4]{x} - 4\sqrt[3]{x}$.
   а) Найдите все натуральные k, при которых функция $p(t) = f(t^k)$ есть многочлен.
   б) Решите уравнение $f(x) = -1/8$.
   в) Докажите, что при любом $a < 0$ уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.

4. Дана функция $f(x) = \dfrac{2^{x+1} - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.
   а) Решите уравнение $f(x) = 31/17$.
   б) Какое из чисел больше, $f(\log_3 5)$ или $f(\log_3 2)$?
   в) Найдите множество значений данной функции.

1. а) $B(0,-2)$. **2. а)** Пять корней. **б)** $(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $-\frac{19}{2} < a < 2$. **3. а)** $k = 12n$, $n \in \mathbb{N}$. **б)** $\frac{1}{4096}$. **4. а)** 2. **б)** $f(\log_3 5) > f(\log_3 2)$. **в)** $(-1; 2)$.

Контрольные работы для 11-х классов

1995/96

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\dfrac{x^2-2x-2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x^2-2x-2} = 0$.
   б) Решите неравенство
   $$\frac{x^2-2x-2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x^2-2x-2} < 0.$$
   в) Решите неравенство $\dfrac{x^2-(a+3)x+4}{\sqrt{x-2}} + 2\sqrt{x^2-ax-2} < 0$.

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+\frac{7}{4}}$.
   а) Найдите промежутки монотонности функции f.

б) Найдите точки, в которых касательная к графику $y = f(\sin x)$ параллельна оси абсцисс.

в) Сколько отрицательных решений в зависимости от a имеет уравнение $f(2^x) = a$?

3. а) Решите систему $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\alpha = 1 + \sqrt{2}\cos\beta, \\ \sqrt{2}\sin\alpha = 1 + \sqrt{2}\sin\beta. \end{cases}$

б) Решите систему $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 45, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 90. \end{cases}$

в) Найдите наибольшее значение отношения y/x, если $x^2 + y^2 + 3 \leqslant 4x$.

4. При каких значениях параметра a

а) прямая $y = x$ касается графика $y = a^x$;

б) функция $f(x) = (\frac{1}{2})^{2x^3+3ax^2-12a^2x+1}$ возрастает на отрезке $[1; 2]$;

в) при всяком b прямая $y = b$ пересекает график $y = x - 3ax + 2a\sin x + 1$ в единственной точке?

1. а) *Ответ*: $x = 3$. Сделайте замену $x = \sqrt{\frac{x^2-2x-2}{x-2}}$ и не забудьте учесть, что область определения данного уравнения — это луч $[1 + \sqrt{3}; +\infty)$. **б)** $[1 + \sqrt{3}; 3)$. **в)** $[\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+8}); a + 1)$ при $a > 1$, при $a \leqslant 1$ решений нет.

2. а) *Ответ*: Функция f возрастает на отрезке $[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$, убывает на лучах $(-\infty; -\frac{3}{2}]$ и $[\frac{1}{2}; +\infty)$. Действительно,

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + x - \frac{3}{4})}{(x^2 + 2x + \frac{7}{4})^2} = -\frac{(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})}{(x^2 + 2x + \frac{7}{4})^2}.$$

б) *Ответ*: Точки графика с абсциссами $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Действительно, $\frac{d}{dx}(f(\sin x)) = f'(\sin x)\cos x = 0$, если $f(\sin x) = 0$, т. е. $\sin x = \frac{1}{2}$, или если $\cos x = 0$. **в)** *Ответ*: Одно решение при $a = \frac{2}{3}$ и $a \in (\frac{4}{7}; \frac{12}{19}]$, два — при $a \in (\frac{12}{19}; \frac{2}{3})$. Заметим прежде всего, что число отрицатеьных уравнений данного уравнения совпадает с числом решений на интервале $(0; 1)$ уравнения $f(t) = 0$. Теперь ответ следует из того, что $f(0) = \frac{4}{7}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$, $f(1) = \frac{12}{19}$, и того, что функция f возрастает до точки $\frac{1}{2}$ и убывает после нее.

3. а) *Ответ*: $(\alpha,\beta)=(\frac{7\pi}{12}+2\pi k, \frac{11\pi}{12}+2\pi n); (-\frac{\pi}{12}+2\pi k, -\frac{5\pi}{12}+2\pi n)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. Возведя в квадрат обе части данных уравнений и сложив полученные при этом уравнения, получим, что $\cos\beta+\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. Поэтому $\beta=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. Конечно, можно проделать аналогичное вычисление (со слегка преобразованными уравнениями), чтобы найти α. Однако при таком подходе мы не сможем выписать ответ, не сделав дополнительно проверки, поскольку каждое из полученных уравнений для α и β является лишь следствием исходной системы уравнений. Поэтому наиболее естественный подход — подставить найденные значения β в исходную систему для того, чтобы найти α. Если $\beta=\frac{7\pi}{12}+2\pi k$, то получим, что

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}),\\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}),\end{cases}$$

откуда и следует, что $\alpha=\frac{11\pi}{12}+2\pi n$. **б)** *Ответ*: $(x,y)=(-\sqrt{5},-4\sqrt{5})$. В этой задаче, так же как и в предыдущей, есть “ловушка”. Из системы следует, что $x^2-y\sqrt{xy}=2y^2-2x\sqrt{xy}$. Мы получили (положительно!) однородное уравнение, для решения которого естественно сделать замену $t=\sqrt{\frac{y}{x}}$ (ясно, что если (x,y) — решение исходной системы, то $x\neq 0$). Ловушка заключается в том, что случаи $x>0$, $x<0$ следует рассматривать отдельно, так как в первом из них, к примеру, $\frac{\sqrt{xy}}{x}=t$, между тем как во втором $\frac{\sqrt{xy}}{x}=-t$! При $x>0$ мы получим уравнение $2(1-t^3)=t^4-t^3$ с корнями $t=1;-2$. Ясно, что $t\neq-2$, так как по определению $t>0$. Корень $t=1$ также является посторонним, так как при $x=y$ левые части обоих уравнений системы обращаются в ноль. При $x<0$ получим уравнение $2(1+t^3)=t^4+t^3$ с корнями $t=-1;2$. Значит, $y=4x$, причем $x<0$, поэтому после подстановки выражения для y в первое уравнение системы, получим уравнение $18x^2=90$, откуда и следует ответ. **в)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис. 200).

4. а) *Ответ*: $a=e^{1/e}$. Прямая $y=x$ касается графика $y=f(x)$ функции f, если разрешима система $\frac{f(x)}{x}=1=f'(x)$. В данном случае эта система имеет вид $\frac{a^x}{x}=1=a^x\ln x$. **б)** *Ответ*: $a\leqslant-1$ или $a\geqslant 2$. Функция f возрастает на $[1;2]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке убывает функция $y=2x^3+3ax^2-12a^2x+1$, т. е. когда неположительна ее производная, т. е. $x^2+ax-2a^2\leqslant$

0. Решением этого неравенства является отрезок $[-2a;a]$, если $a \geqslant 0$, и отрезок $[a;-2a]$, если $a < 0$. Имеем: $[-2a;a] \supset [1;2]$, если $-2a \leqslant 1$ и $a \geqslant 2$, откуда $a \geqslant 2$, и $[a;-2a] \supset [1;2]$ при $a \geqslant 1$ и $-2a \geqslant 2$, откуда $a \leqslant -1$. **в)** *Ответ*: $a \leqslant \frac{1}{4}$ или $a \geqslant 1$. Производная функции $f(x) = x - 3ax + 2a\sin x + 1$ не принимает значения разных знаков, если $|1-3a| \geqslant 2|a|$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\dfrac{x^2-4x+1}{\sqrt{x-3}} - 4\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x^2-4x+1} = 0$.

   б) Решите неравенство
$$\frac{x^2-4x+1}{\sqrt{x-3}} - 4\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x^2-4x+1} < 0.$$
   в) Решите неравенство
$$\frac{x^2-(a+6)x+a+11}{\sqrt{x-3}} + 3\sqrt{x^2-(a+2)x+a-1} < 0.$$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+\frac{1}{2}}$.

   а) Найдите промежутки монотонности функции f.

   б) Найдите точки, в которых касательная к графику $y = f(\cos x)$ параллельна оси абсцисс.

   в) Сколько положительных решений в зависимости от a имеет уравнение $f(3^{x-1}) = a$?

3. а) Решите систему $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}\cos\beta, \\ \sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\beta - 1. \end{cases}$

   б) Решите систему $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 54, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 27. \end{cases}$

   в) Найдите наименьшее значение отношения x/y, если $x^2 + y^2 + 4y + 3 \leqslant 0$.

4. При каких значениях параметра a

   а) прямая $y = -x$ касается графика $y = a^x$;

   б) функция $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3+3ax^2-9a^2x+3}$ возрастает на отрезке $[1;2]$;

   в) при всяком b прямая $y = b$ пересекает график $y = x + 3ax + a\sin x - 2$ в единственной точке?

1. а) 4. **б)** $[2+\sqrt{3};4)$. **в)** $[\frac{1}{2}(a+2+\sqrt{a^2+8});a+2)$. **2. а)** Функция f возрастает на отрезке $[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}]$, убывает на лучах $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}]$ и $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty)$. **б)** Точки графика с абсциссами $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **в)** Одно решение при $a=\sqrt{2}-1$ и $a\in(0;\frac{6}{17}]$, два — при $a\in(\frac{6}{17};\sqrt{2}-1)$. **3. а)** $(\alpha,\beta)=(\frac{\pi}{12}+2\pi n,\frac{7\pi}{12}+2\pi k);(-\frac{7\pi}{12}+2\pi n,-\frac{\pi}{12}+2\pi k)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. **б)** $(x,y)=(-4\sqrt{3},-\sqrt{3})$. **в)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. а) $a=e^{-1/e}$. **б)** $a\leqslant-2$ или $a\geqslant\frac{2}{3}$. **в)** $a\leqslant-\frac{1}{2}$ или $a\geqslant-\frac{1}{4}$.

1996/97

Вариант 1

1. а) Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\sin 2y=\sin 2x, \\ 2\sin y\cos(x+y)+\sin x=0. \end{cases}$$

Найдите все α, при которых

б) $\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha})$;

в) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^n\alpha+2^n\sin^n\alpha)$;

г) $2\arcsin\alpha=\arccos(1-2\alpha^2)$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$.

а) Найдите растояние между параллельными оси абсцисс касательными к графику функции f.

б) Найдите множество значений функции $g(x)=f(2\sin x)$.

в) Найдите абсциссу точки пересечения с графиком функции f касательной к этому графику, проведенной в точке с абсциссой x_0.

3. Дана функция $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$.

а) Решите уравнение $f(x)=2x-10$.

б) Решите неравенство

$$\frac{f(x)-3x+16}{6-x}\geqslant 1.$$

в) Найдите все a, при которых существует решение уравнения $f(x)=f(x+a)$.

4. Решите уравнение (систему):

а) $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=6-\sqrt{x+8}$;

б) $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$;

в) $\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)y+x(y^2+1)=4xy. \end{cases}$

1. а) *Ответ*: $(x,y)=(\pi k, \frac{\pi l}{2}); (\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+\pi l)$, $k,l\in\mathbb{Z}$. Преобразуя второе уравнение системы, получаем, что $\sin(2y+x)=0$, откуда $x+2y=\pi k$. Подставляя $\operatorname{tg} x=-\operatorname{tg} 2y$, $\sin 2x=-\sin 2y$ в первое уравнение, имеем

$$\sin 4y+\sin 2y-\frac{\sin 2y}{\cos 2y}=0,$$

или

$$\frac{\sin 2y}{\cos 2y}(2\cos^2 y+\cos 2y-1=0),$$

откуда $\sin 2y=0$ или $\cos 2y=-\frac{1}{2}$. **б)** *Ответ*: $[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k]$. Данное уравнение можно записать в виде

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}(|\cos\alpha+\sin\alpha|+|\cos\alpha-\sin\alpha|),$$

откуда следует, что $\cos\alpha \geqslant -\sin\alpha$ и $\cos\alpha\geqslant\sin\alpha$. **в)** $(-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k]\cup[\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k)\cup(\pi+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k]$, $k\in\mathbb{Z}$. **г)** *Ответ*: $[0;1]$. Область определения данного уравнения — отрезок $[-1;1]$. Поскольку его правая часть положительна, то и $\arcsin\alpha\geqslant 0$, так что $\alpha\in[0;1]$. Обозначим через L и R, соответственно, значения левой и правой частей данного уравнения. Имеем, $L,R\in[0;\pi]$ в силу того, что $\alpha\in[0;1]$. Следовательно, равенство $L=R$ равносильно равенству $\cos L=\cos R$. Наконец,

$$\cos(2\arcsin\alpha)=1-2\sin^2(\arcsin\alpha)=1-2\alpha^2,$$
$$\cos(\arccos(1-2\alpha^2))=1-2\alpha^2.$$

2. а) $\frac{32}{3}$. **б)** $[-\frac{19}{3}; \frac{8}{3}]$. **в)** $3-2x_0$. *Первое решение.* Уравнение касательной к графику данной функции с абсциссой x_0:

$$y=(x_0^2-2x_0-3)x+x_0^2-\frac{2}{3}x_0^3+1.$$

Составив уравнение для абсцисс точек пересечения графика данной функции и касательной к нему, получим, что один из его

корней — это x_0 (причем это корень кратности два), а второй равен $3-2x_0$. *Второе решение.* Пусть $p(x)$ — некоторый многочлен. Нетрудно видеть, что уравнение $p(x) = p'(x_0)(x-x_0)+p(x_0)$ имеет x_0 своим корнем кратности два. Сумму корней многочлена $p(x) - p'(x_0)(x-x_0) - p(x_0)$ можно найти по (обобщенной) теореме Виета. В данном случае получаем, что $2x_0 + x_1 = 3$.
3. а) 8. **б)** $(-\infty;-1] \cup [4;6) \cup [8;+\infty)$. **в)** $|a| \geqslant 5$. Ответ очевиден из геометрических соображений (см. рис. 203).

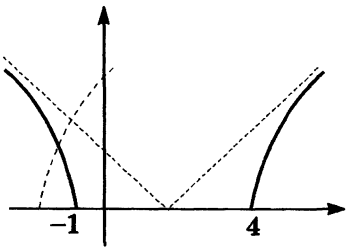

Рис. 203

4. а) *Ответ*: 1. Очевидно, что $x = 1$ является корнем уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 6$. То, что других корней уравнение не имеет, следует из строгой монотонности функции, заданной его правой частью. **б)** *Ответ*: Решений нет. Действительно, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geqslant 2$, а $\sqrt{4-x^2} \leqslant 2$, причем обе эти функции не могут одновременно быть равными двум. **в)** *Ответ*: $(x, y) = (1, 1)$. Из неравенств $x + \frac{1}{y} \geqslant 0$, $y + \frac{1}{x} \geqslant 0$ следует, что $x, y > 0$, поэтому $(x^2+1)y + (y^2+1)x \geqslant 2xy + 2yx = 4xy$, причем равенство имеет тогда и только тогда, когда $x = y = 1$.

Вариант 2

1. а) Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sin 2y + \sin 2x, \\ 2\cos y \sin(x+y) = \sin x. \end{cases}$$

Найдите все α, при которых

б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{1-\sin 2\alpha} + \sqrt{1+\sin 2\alpha})$;

в) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(2^{n/2}\cos^n\alpha + \sin^n\alpha)$;

г) $2\arccos\alpha = \arccos(2\alpha^2 - 1)$.

2. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.
   а) Найдите растояние между параллельными оси абсцисс касательными к графику функции f.
   б) Найдите множество значений функции $g(x) = f(1 + \cos x)$.
   в) Найдите абсциссу точки пересечения с графиком функции f касательной к этому графику, проведенной в точке с абсциссой x_0.
3. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$.
   а) Решите уравнение $f(x) + 2x + 8 = 0$.
   б) Решите неравенство
$$\frac{f(x) + 3x + 14}{x + 6} \leqslant 1.$$
   в) Найдите все b, при которых существует решение уравнения $f(x) = f(x - b)$.
4. Решите уравнение (систему):
   а) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x} = 3 - \sqrt{5 - x}$;
   б) $x^2 - x - 3 = \sqrt{1 - x^2}$;
   в) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{x^2 - y^2}, \\ x^3 + y^3 + 1 = 3xy. \end{cases}$

1. а) $(x, y) = (\pi k, \frac{\pi l}{2}); (\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \pm\frac{\pi}{3} + \pi l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **б)** $[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k) \cup (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. **г)** $[0; 1]$. **2. а)** $\frac{9}{2}$. **б)** $[-\frac{13}{6}; -\frac{1}{3}]$. **в)** $-\frac{3}{2} - 2x_0$. **3. а)** -7. **б)** $[-7; -6)$. **в)** $|b| \geqslant 5$. **4. а)** 1. **б)** Решений нет. **в)** $(x, y) = (1, 1); (-1, 0); (-2, 1)$.

1997/98

1. Найдите:
   а) корни функции $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} + 6x - x^2 - 11$;
   б) решения неравенства $\arcsin \frac{2}{x} \leqslant \frac{\pi}{6}$;
   в) производную многочлена $x(x - 1) \ldots (x - 24)$ при $x = 24$;
   г) [1] все значения a, для которых система
$$\begin{cases} y = a^x, \\ x = a^y \end{cases}$$

[1] Данная задача была включена в вариант по ошибке; составитель по считал ее существенно более простой, чем она есть на самом деле.

имеет единственное решение.

2. Дана функция $f(x) = \cos 3x + a\cos^2 x$.
   а) Найдите значения a при которых неравенство $|f(x)| \leqslant 10$ верно для всех действительных x.
   б) Найдите значения a при которых функция f монотонна на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.
   в) Пусть $a = 8$. При каких b уравнение $f(x) = b$ имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственное решение?
3. Дана функция $f(x) = x\sqrt{x+1}$.
   а) Решите уравнение $f(x) = -\frac{3}{8}$.
   б) Найдите уравнение касательной к графику функции f, проходящей через точку $A(-\frac{9}{4}, 0)$.
   в) Найдите все точки оси ординат, являющиеся серединами хорд графика функции f.

1. а) 3. **б)** $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. **в)** $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 24 = 24!$. **г)** *Ответ*: $a = e^{1/e}$ или $a \in [e^{-e}; 1]$. Поскольку вместе с решением (x_0, y_0) пара (y_0, x_0) также является решением данной системы, то ее единственное решение должно лежать на прямой $y = x$. Так как решения уравнения $a^x = x$ положительны, то оно равносильно уравнению $\frac{\ln x}{x} = \ln a$. Из графика функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (см. рис. 204, *а*) очевидно, что уравнение $f(x) = \ln a$ имеет единственное решение, если $a = e^{1/e}$ или же $a \in (0; 1)$. Однако найденные нами условия на a лишь необходимы для того, чтобы данная система имела единственное решение! Пока мы доказали, что при найденных значениях параметра a каждое из множеств $y = a^x$ и $x = a^y$ имеет единственную общую точку с прямой $y = x$. И все-таки, почему они не могут иметь и другие точки пересечения (не лежащие на этой прямой)? Пусть $a = e^{1/e}$. Тогда ясно, что $\frac{\ln x}{x} \leqslant \ln a$, причем равенство имеет место лишь при $x = e$. При $x \neq e$ имеем $\frac{\ln x}{x} < \ln a$, поэтому $x < a^x$, откуда следует, что множество $y = a^x$ лежит выше прямой $y = x$. Соответственно, симметричное ему относительно этой прямой множество $x = a^y$ лежит ниже прямой $y = x$ (рис. 204, *б*).

Теперь пусть $a \in (0; 1)$. Обозначим через c (единственное) решение уравнения $a^x = x$. Предположим, что $a^c \ln a < -1$, т. е. касательная к графику функции $y = a^x$ в точке его пересечения с прямой $y = x$ расположена круче прямой $y = -x$. Тогда при x, меньших c и близких к нему, кривая $x = a^y$ будет располагаться под кривой $y = a^x$ (рис. 204, *в*), следовательно, на интервале $(0; a)$ эти кривые будут иметь точку пересечения. Таким образом, система имеет по крайней мере три решения, если $c > -\frac{1}{\ln a}$, т. е. при $a^{-1/\ln a} > -\frac{1}{\ln a}$, или $a < e^{-e}$. Теперь докажите, что при $a \in [e^{-e}; 1]$ решение единственно.

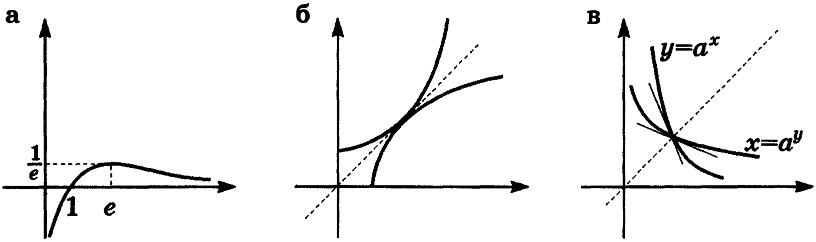

Рис. 204

2. а) *Ответ*: $|a| \leqslant 9$. Полагая $x = 0; \pi$, получаем, что должны выполняться неравенства $|1 + a| \leqslant 10$ и $|-1 + a| \leqslant 10$, следовательно, необходимо, чтобы $|a| \leqslant 9$. То, что $|f(x)| \leqslant 10$ при $|a| \leqslant 9$, — очевидно. **б)** *Ответ*: $a \leqslant -\frac{9}{2}$. Имеем $f(x) = g(\cos x)$, где $g(t) = 4t^3 + at^2 - 3t$. Найдем теперь все a, при которых функция g монотонна на отрезке $[0; 1]$. Производная $g'(t) = 12t^2 + 2at - 3$ должна сохранять знак на $[0; 1]$, так как $g(0) = -3$, то $12t^2 + 2at - 3 \leqslant 0$. График $y = g'(t)$ — парабола ветвями вверх, поэтому для выполнения неравенства $g'(t) \leqslant 0$ на $[0; 1]$ необходимо и достаточно, чтобы $g'(1) = 9 + 2a \leqslant 0$. **в)** $b \in (7; 9] \cup \{-\frac{4}{9}\}$.

3. а) *Ответ*: $x = -\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{13}+1}{8}$. Замена $t = \sqrt{x+1}$ приводит к уравнению $t^3 - t + \frac{3}{8} = 0$, у которого следует взять лишь его неотрицательные корни. **б)** *Ответ*: $y = -\frac{1}{4}(x + \frac{9}{4})$. Абсцисса точки касания искомой касательной — решение уравнения $f'(x) = \frac{f(x)}{x+\frac{9}{4}}$. **в)** *Ответ*: $[-\frac{2}{3}; 0)$. Точка $(t, 0)$ является серединой хорды графика тогда и только тогда, когда имеет решения система

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = t, \\ \frac{a\sqrt{a+1}+b\sqrt{b+1}}{2} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы получаем, что $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b) = 0$. Исключим случай $a = b$ (таким образом, мы исключаем из рассмотрения вырожденные хорды). Подставляя

$b = 2t - a$, приходим к уравнению $a^2 - 2at + 4t^2 + 2t = 0$, которое имеет решения при $-3t^2 - 2t \geqslant 0$.

Олимпиады выпускников

1996

Вариант 1

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение

$$x^{11} - ax + 1 = 0\,?$$

б) Пусть $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ($a_i \geqslant -1$). Докажите неравенство

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1) \leqslant e^s.$$

в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что если

$$\operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A) = 0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

г) Пусть $f(x) = \int\limits_0^x \sin^{1995} t\,dt$. Решите уравнение $f(x) = 0$.

2. а) Решите неравенство $\log_2 x + |\log_{2x} 2| \geqslant \frac{3}{2}$.

б) Верно ли, что при всех $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ справедливо неравенство $\cos^2 k + \cos^2 2k + \cos^2 3k \geqslant 1$?

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2 - 1} = ax + b$ ($b > 0$) имеет решение.

3. Про последовательность $\{x_n\}$ известно, что $x_1 = 1$ и если $x_n = \frac{p}{q}$, то $x_{n+1} = \frac{p+2q}{p+q}$.

а) Докажите, что каждая из дробей, появляющихся при определении членов этой последовательности, несократима.

б) Докажите, что последовательность $a_n = |x_n^2 - 2|$ монотонна.

в) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Про последовательность $\{q_n\}$ известно, что $q_1 = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$ и $q_{n+1} \leqslant q_1 + \ldots + q_n + 1$.

а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.

б) Докажите, что если последовательность q_n такова, что всякое натуральное числа представляется в виде суммы некоторых членов последовательности $\{q_n\}$ единственным образом, то

$$(1+x^{q_1})(1+x^{q_2})\dots(1+x^{q_n}) = 1+x+x^2+\dots+x^N.$$

в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.

1. а) *Ответ*: Один корень, если $a < \frac{11}{10}\sqrt[11]{10}$, два, если $a = \frac{11}{10}\sqrt[11]{10}$ и три корня, если $a > \frac{11}{10}\sqrt[11]{10}$. Пребразовав данное уравнение к виду $a = x^{10} + \frac{1}{x}$ и построив график функции $y = x^{10} + \frac{1}{x}$, получим ответ.
б) Исследовав функцию $y = e^x - x - 1$, нетрудно показать, что она неотрицательна при всех x, значит, $e^x \geqslant x + 1$. Осталось перемножить неравенства $a_i + 1 \leqslant e^{a_i}$ (обе части которых по предположению неотрицательны). **в)** Положим для удобства $x = A - B$, $y = B - C$ и $z = C - A$. Таким образом, $x + y + z = 0$ и $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 0$, откуда

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Если, к примеру, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(x+y) = -\operatorname{tg} z = 0$, то $z = C - A = 0$. **г)** $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как $f'(x) = \sin^{1995} x$, то функция f монотонна на каждом из отрезков $[\pi k; \pi(k+1)]$, значит, на каждом из них она имеет не более одного корня. То, что

$$f(2\pi k) = \int_0^{2\pi k} \sin^{1995} x\, dx = 0,$$

достаточно ясно.
2. а) $[2^{(1-\sqrt{41})/4}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [2; +\infty)$. **б)** *Ответ*: Да, верно. Данное неравенство можно, к примеру, преобразовать к виду

$$\cos 2k(\cos 2k + 1)(2\cos 2k - 1) \geqslant 0.$$

Осталось решить неравенство $\cos x(\cos x + 1)(2\cos x - 1) \geqslant 0$ и сравнить числа $2, 4, \ldots, 12$ с $\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.
в) *Ответ*: $|a| < 1$ или $|a| \leqslant b$. Действительно, поскольку график функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ есть верхняя половина гиперболы, то при $0 < b \leqslant 1$ прямая $y = ax+b$ пересекается с этим графиком тогда и только тогда, когда $|a| < 1$. Если же $b > 1$, то они пересекаются при $b \geqslant |a|$.
3. а) Если и $p+2q$, и $p+q$ делятся на d, то q, а, следовательно, и p, делятся на d. **б)** Имеем

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|(p+2q)^2 - 2(p+q)^2|}{(p+q)^2} =$$
$$= \frac{2q^2 - p^2}{(p+q)^2} = \frac{q^2}{(p+q)^2}|x_n^2 - 2| < |x_n^2 - 2|.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$, так как нетрудно видеть, что $x_n = \frac{p}{q} \geqslant 1$, откуда $|x_{n+1}^2 - 2| \leqslant \frac{1}{2}|x_n^2 - 2|$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 2$.
4. а) Индукционное предположение: в виде сумм чисел $q_1, \ldots, q_n$ представимо каждое натуральное число от 1 до $N_n = q_1+\cdots+q_n$. Тогда, добавляя число q_{n+1}, мы сможем представить еще числа от q_{n+1} до $N_n + q_{n+1} = N_{n+1}$. Поскольку по предположению $q_{n+1} \leqslant q_1 + \ldots + q_n + 1$, в требуемом виде представляются все числа от 1 до N_{n+1}. **б)** Раскрывая скобки в левой части, мы будем получать одночлены вида x^s, причем в силу условия на данный набор чисел q_k каждое $1 \leqslant s \leqslant N = q_1 + \ldots + q_n$ появится ровно один раз, поэтому коэффициент при каждом таком одночлене равен единице. **в)** $q_k = 2^{k-1}$. Из результатов предыдущих пунктов следует, что $q_k = q_1 + q_2 + \ldots + q_{k-1} + 1$.

Вариант 2

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение

$$ax^{13} + x - 1 = 0?$$

б) Пусть $p = b_1b_2\ldots b_n$ $(b_i > 0)$. Докажите неравенство

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant n + \ln p.$$

в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что если

$$\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

г) Пусть $g(x) = \int\limits_0^x \cos^n t\,dt$. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых функция g периодична.

2. а) Решите неравенство $|\log_3 x| + \log_{3x} 3 \leqslant \frac{5}{2}$.

б) Найдите все числа $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, для которых верно неравенство $\sin^2 k + \cos^2 2k + \sin^2 3k \geqslant 1$.

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2+1} = ax + b$ $(b < 0)$ имеет решение.

3. Про последовательность $\{c_n\}$ известно, что $c_1 = c > 0$ и $c_{n+1} = 2(\sqrt{c_n^2+4} - 2)/c_n$.

а) Докажите, что последовательность $\{c_n\}$ монотонна и вычислите ее предел.

б) Докажите, что если $c = 2$, то $\lim 2^n c_n = \pi$.

в) Сколько рациональных чисел может содержать такая последовательность?

4. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_4$ — вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром O.

а) Докажите, что $\overline{OA_0} + \overline{OA_1} + \ldots + \overline{OA_4} = 0$.

б) Докажите, что $(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = 5$.

в) Докажите, что многочлен $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ делится на многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

1. а) Один корень, если $a < -\frac{12^{12}}{13^{13}}$ или $a \geqslant 0$, два, если $a = \frac{12^{12}}{13^{13}}$, и три корня, если $\frac{12^{12}}{13^{13}} < a < 0$. **б)** Исследуйте функцию $y = x - 1 - \ln x$. **в)** Преобразуйте данное тождество к виду

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2} = 0.$$

г) Все нечетные n. **2. а)** $[\frac{1}{27}; \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; 3^{(3+\sqrt{33})/4}]$. **б)** $\{2, 3, 5, 6\}$. **в)** $|a| > 1$. **3. а)** Так как

$$0 < c_{n+1} = \frac{2c_n}{\sqrt{c_n^2+4}+2} \leqslant \frac{c_n}{2},$$

то последовательность $\{c_n\}$ монотонно стремится к нулю. **б)** Нетрудно видеть, что если $c_n = 2\operatorname{tg}\alpha$, то $c_{n+1} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Так как $c_1 = 2 = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, то $c_n = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} 2^n c_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi.$$

в) Сколько угодно. Если, к примеру число $c_{100} \in \mathbb{Q}$, то, поскольку $c_n = \frac{8c_{n+1}}{4-c_{n+1}^2}$, то $c_k \in \mathbb{Q}$ при всех $k = 1, \ldots, 100$.

4. а) Пусть z_k — комплексные числа, соответствующие точкам A_k единичной окружности, расположеные так, что $z_0 = 1$. Тогда $z_k = z_1^k$, а $z_1^5 = 1$. Утверждение задачи следует из того, что $1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = \frac{1-z_1^5}{1-z_1} = 0$. Заметим, что так как $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, то доказанное тождество имеет следующую тригонометрическую форму

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

б) Имеем $A_0A_1 = 2\sin\frac{\pi}{5}$ и $A_0A_2 = 2\sin\frac{2\pi}{5}$. После небольших преобразований получаем, что искомое тождество равносильно тождеству, указанному в конце решения предыдущего пункта.

в) Достаточно проверить, что каждый корень второго многочлена является корнем и первого. Корнями второго являются комплексные числа $z_k = z_1^k$, $k = 1, 2, 3, 4$, причем $z_k^5 = 1$. Таким образом, $z_k^{16} + z_k^{12} + z_k^8 + z_k^4 + 1 = z_k + z_k^2 + z_k^3 + z_k^4 + 1 = 0$.

1997

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
   б) Числа $p, q \in [0; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $x^2 + px + q$ имеет действительные корни.
   в) Докажите, что если не существует треугольника с длинами сторон a, b, c, то нет и треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n (n — натуральное).
   г) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.
2. а) Решите неравенство $\lg^2(x+1) \geqslant \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.
   б) Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x$.
   в) Найдите все b, при которых система неравенств
   $$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2, \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$
   имеет единственное решение.
3. Пусть $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

а) Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Q}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $a_i \in \mathbb{Q}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

б) Докажите, что из того, что $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, не следует, что $a_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

в) Пусть $q_i(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$, $q_0(x) = 1$. Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $p(x) = \sum b_i q_i(x)$, где $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

4. а) Какое из чисел больше, 2^{300} или 3^{200}?

б) Представьте число 1997 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых с максимально возможным произведением.

в) Докажите, что произведение нескольких положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит e^{800}.

1. а) *Ответ*: $[5; 10]$. Положим $t = \sqrt{x-1}$. Относительно новой переменной имеем уравнение $\sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 1$, или $|t-2| + |t-3| = 1$, которое можно решать, стандартным образом раскрывая модуль. Однако в данном случае никакое вычисление не требуется, поскольку это уравнение задает множество точек числовой прямой, сумма расстояний от которых до точек 2 и 3 равна единице. Таковыми являются все точки отрезка $[2; 3]$ и только они, поэтому $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$. **б)** Данное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $p^2 - 4q \geqslant 0$. По определению геометрической вероятности, искомая вероятность равна отношению площади множества точек единичного квадрата, координаты которых удовлетворяют неравенству, т. е. площади подграфика функции $y = \frac{x^2}{4}, x \in [0; 1]$, к площади самого этого квадрата. Таким образом, эта вероятность равна интегралу $\int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{12}$. **в)** Если треугольник с длинами сторон a, b, c не существует, то одно из этих чисел не меньше суммы двух других. Пусть $a \geqslant b + c$, тогда $a^n \geqslant (b+c)^n = b^n + \ldots + c^n \geqslant b^n + c^n$, поэтому не существует и треугольника с длинами сторон a^n, b^n, c^n. **г)** Прежде всего запишем данное условие в виде

$$\cos 2A + \cos 2B + 2\cos^2 C = 0.$$

Преобразуем далее: $2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C = 0$, $-\cos C(\cos(A+B) + \cos(A-B)) = 0$, или $2\cos C \cos A \cos B = 0$, откуда и следует, что один из углов треугольника — прямой.

2. а) *Ответ*: $[\sqrt{2}; 3]$. Область определения неравенства — луч $(1; +\infty)$. Поскольку $a^2 - ab - 2b^2 = (a-2b)(a+b)$, то

$$\lg^2(x+1) - \lg(x+1)\lg(x-1) - 2\lg^2(x-1) =$$
$$= (\lg(x+1) - 2\lg(x-1))(\lg(x+1) + \lg(x-1)) =$$
$$= (\lg(x+1) - \lg(x-1)^2)\lg(x^2-1) \geqslant 0,$$

значит,

$$\begin{cases} x+1 \geqslant (x-1)^2, \\ x^2 - 1 \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+1 \leqslant (x-1)^2, \\ x^2 - 1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Решением первой системы неравенств является отрезок $[\sqrt{2}; 3]$, решение второй — отрезок $[-\sqrt{2}; 0]$ — не лежит в области определения исходного неравенства. **б)** *Ответ*: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Выражение $4\cos x\cos 2x\cos 4x - \cos 7x$ при помощи преобразования произведения косинусов в сумму и наоборот может быть приведено к виду $\cos 3x(2\cos 2x + 1)$, откуда $\cos 3x = 0$ или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. **в)** *Ответ*: $b = -\frac{1}{4}$. Первое из неравенств системы задает множество точек, лежащих не ниже параболы $y = (x-b)^2$, второе — множество точек, лежащих, не левее симметричной ей относительно прямой $y = x$ параболы $x = (y-b)^2$. Ясно, что эти множества имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда первая парабола касается прямой $y = x$, поскольку тогда вторая парабола также касается этой прямой, причем в той же самой точке. Парабола $y = (x-b)^2$ касается прямой $y = x$, если квадратное уравнение $x = (x-b)^2$ имеет единственное решение. Приравняв нулю дискриминант этого уравнения, получим ответ.

3. а) В этой задаче, аболютно очевидной с точки зрения "высшей" математики (рассмотрите интерполяционный многочлен Лагранжа), потребовались некоторые ухищрения для поиска ее решения, не требующего введения новых понятий.

Запишем многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ в виде

$$p(x) = c_n x(x-1)\ldots(x-n+1) + c_{n-1}x(x-1)\ldots(x-n+2) + \ldots + c_0.$$

Очевидно, что достаточно доказать рациональность всех коэффициентов c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Подставляя в выписанное разложение последовательно числа $0, 1, \ldots, n$, получим систему равенств $p(0) = c_0$, $p(1) = c_1 + c_0$, $p(2) = 2c_2 + 2c_1 + c_0, \ldots,$

$p(k) = k!c_k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki}c_i, \ldots$, в которой все коэффициенты α_{ki} рациональны. Поскольку

$$k!c_k = p(k) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki}c_i,$$

то из условия рациональности значений $p(k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n$ следует рациональность коэффициентов c_k (ср. далее с решением пункта в)). **б)** Пример: $p(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$. **в)** Заметим прежде всего, что многочлены $q_i(x)$ обладают следующими свойствами:

$q_i(k) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, i-1$, $q_i(i) = 1$ и $q_i(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Последнее свойство достаточно проверить для $k \geqslant i$. Оно очевидно, поскольку $q_i(k) = C_k^i$.

Далее, для того, чтобы доказать совпадение многочленов степени n, достаточно показать, что совпадают их значения в $n+1$ точке. Поэтому достаточно доказать, что существуют такие $b_i \in \mathbb{Z}$, что $p(k) = \sum b_i q_i(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Рассуждение поведем по индукции. База очевидна, поскольку $b_0 = p(0)$. Предположим, что числа $b_0, \ldots, b_{k-1}$ являются целыми. Подставив $x = k$ в равенство $p(x) = \sum b_i q_i(x)$ и воспользовавшись отмеченными свойствами многочленов $q_i(x)$, получим, что

$$p(k) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i q_i(k) + b_k,$$

откуда и следует целочисленность коэффициента b_k.

4. а) 3^{200}. **б)** Число 1997 есть сумма одной двойки и 665 троек, таким образом максимальное значение произведения равно $2 \cdot 3^{665}$. Идея рассуждения: если $n = k + l$, где $k > l \geqslant 2$, то $n < kl$ (докажите это). Поэтому произведение $n_1 n_2 \ldots n_s$, в котором хотя бы одно из чисел n_i больше четырех, не может быть наибольшим. Так как $4 = 2 \cdot 2 = 2 + 2$, то четверки можно из рассмотрения исключить. Таким образом, наибольшее произведение натуральных чисел с заданной суммой следует искать среди произведений двоек и троек. Осталось заметить, что в силу утверждения предыдущего пункта двоек должно быть как можно меньше. **в)** Из неравенства Коши

$$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

следует, что произведение k положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит $(\frac{1997}{k})^k$, которое, в свою очередь, не превосходит наибольшего значения функции $f(t) = (\frac{a}{t})^t = e^{t(\ln a - \ln t)}$ (при $a = 1997$). Дифференцируя, получаем $f'(t) = f(t)(\ln a - \ln t - t\frac{1}{t}) = f(t)(\ln \frac{a}{t} - 1)$, следовательно наибольшее значение функции f, которое достигается при $\frac{a}{t} = e$, равно $e^{a/e} = e^{1997/e} \leqslant e^{800}$ (здесь мы воспользовались тем, что $e > 2,5$).

Вариант 2

1. а) Решите уравнение
$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} = 2.$$
   б) Числа $p, q \in [-1; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $px^2 + qx - 1$ имеет действительные корни.
   в) Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ также можно составить треугольник.
   г) Дан треугольник ABC. Докажите, что если $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.
2. а) Решите неравенство
$$\log_2^2 x + 3\log_2 x \log_2(x-2) + 2\log_2^2(x-2) \geqslant 0.$$
   б) Решите уравнение $4\sin x \cos 2x \cos 4x = \sin 7x$.
   в) Найдите все b, при которых система неравенств
$$\begin{cases} y + x^2 \leqslant b, \\ x + y^2 \leqslant b \end{cases}$$
   имеет единственное решение.
3. а) Решите уравнение $1 + x^2 + \ldots + x^{4k-2} = 2kx^{2k-1}$.
   б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны ± 1, то все его корни по модулю меньше двух.
   в) Известно, что $a < b < c$, $a + b + c = 6$ и $ab + bc + ca = 9$. Докажите, что $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.
4. а) Найдите все пары a, b комплексных чисел, таких что
$$|a| = |b| = 1 \text{ и } |a + b| = |a^2 + b^2|.$$
   б) Докажите, что если $|a| = |b| = |c| = 1$, то
$$|a + b + c| = |ab + bc + ca|.$$

в) Докажите, что если

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0, \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0, \end{cases} \text{ то } \sin 3x = \sin 3y = \sin 3z.$$

1. а) $[0;8]$. **б)** $\frac{13}{24}$. **2. а)** $x \in (2; 1+\sqrt{2}] \cup [\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}); 3)$. **б)** $x = \pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **в)** $b = -\frac{1}{4}$. **3. а)** *Ответ*: $x = 1$. Перепишите уравнение в виде $\sum\limits_{i=0}^{k-1} (x^i - x^{2k-i-1})^2 = 0$. **б)** Докажите, что если $|x| \geqslant 2$, то $|x|^k > |x|^{k-1} + \ldots + 1$. **в)** В силу обобщенных формул Виета, из данных уравнений следует, что числа a, b, c суть корни кубического многочлена $x^3 - 6x^2 + 9x - p$. Постройте обычным способом график кубической функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, взгляните на полученный рисунок и ... решение закончено! **4. а)** *Ответ*: $a = b\varepsilon$, где ε — кубический корень из 1. Запишите $z = \frac{a}{b}$ в виде $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, подставьте это выражение в заданное условие и решите полученное тригонометрическое уравнение. **б)** Раскройте скобки и преобразуйте выражения

$$|a+b+c|^2 = (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) \text{ и}$$
$$|ab+bc+ca|^2 = (ab+bc+ca)(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}).$$

в) Рассмотрим комплексные числа $a = \cos x + i\sin x$, $b = \cos y + i\sin y$, $c = \cos z + i\sin z$. Данные равенства для x, y, z равносильны одному равенству $a + b + c = 0$ для a, b, c. Поскольку модуль каждого из чисел a, b, c равен единице, то их аргументы отличаются на $\frac{2\pi}{3}$. Раз, к примеру, $x - y = \pm\frac{2\pi}{3}$, то $3x - 3y = \pm 2\pi$, откуда и следует, что $\sin 3x = \sin 3y$. Попробуйте найти элементарное решение, в котором комплексные числа не используются.

1998

Вариант 1

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

   б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

в) Докажите, что если $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то по крайней мере один из квадратных трехчленов $x^2 + p_ix + q_i$, $i = 1, 2$, имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = 2x + |\log_2 x + 2x| - \log_2 x$.
   б) Решите уравнение $\sqrt{2 - \cos 2x} = \sin x - \cos x$.
   в) Решите неравенство $\sqrt{|1 - 2x|} \geqslant 1 + ax$.
   г) Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10,000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет брать только проценты с накопленной за это время суммы? Банк дает 30% годовых, а $\lg 1{,}3 = 0{,}114$.

3. а) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что
$$\angle CAD + \angle EAD + \angle FAD = 90^\circ.$$
   б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = 2 \operatorname{arctg} \frac{x + y}{2}.$$
   в) Вычислите сумму
$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \ldots$$

4. а) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица, а два оставшихся равны друг другу.
   б) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица.
   в) Сколько различных (т. е. различимых по внешнему виду) каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?

1. а) Поскольку $S_{ABC} = S_{ACD}$, то точки B и D расположены на одинаковом расстоянии от прямой AC, следовательно, середина диагонали BD лежит на AC. Аналогично, середина AC

лежит на BD. Таким образом, точка пересечения обеих диагоналей делит каждую из них пополам. **б)** *Ответ*: $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Вместо того, чтобы пытаться выразить площадь проекции через площади граней пирамиды с использованием формулы $S_{\text{пр}} = S\cos\theta$, лучше посмотреть, что представляет из себя проекция данной пирамиды. Возможны два случая. В первом из них проекция является треугольником — проекцией одной из граней пирамиды, во втором она — четырехугольник, диагоналями которого являются проекции некоторых двух ее скрещивающихся ребер. Ясно, что в первом случае площадь проекции наибольшая, если мы проектируем нашу пирамиду на плоскость, параллельную той ее грани, которая имеет наибольшую площадь; в нашем случае это основание пирамиды и ее площадь $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Второй случай более интересен. Площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1, d_2 — это длины его диагоналей, а α — угол между ними. Ясно, что $d_1 \leqslant 1$, $d_2 \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\alpha \leqslant 1$, поэтому произведение всех этих величин не превосходит $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Осталось заметить, что поскольку скрещивающиеся ребра правильной пирамиды перпендикулярны друг другу, то при проектировании на параллельную им плоскость, площадь проекции равна $\frac{\sqrt{2}}{4}$, что меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **в)** Рассмотрим сумму дискриминантов данных квадратичных многочленов, $D_1 + D_2 = p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geqslant 2p_1p_2 - 4(q_1 + q_2) = 0$. Следовательно, хотя бы один из них неотрицателен.

2. а) См. рис. 205. Функция $y = \log_2 x + 2x$ — возрастающая и ее корень — $x = \frac{1}{2}$.

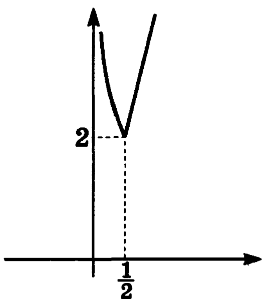

Рис. 205

б) *Ответ:* $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Возведя в квадрат, получим уравнение $\cos 2x - \sin 2x = 1$, из корней которого следует взять лишь те, для которых $\sin x \geqslant \cos x$. **в)** *Решение:* Заметим прежде всего, что записать верное решение этой задачи, не используя ее геометрической интерпретации, достаточно трудно, что видно хотя бы из ответа. Положим для краткости его записи: $x_1 = \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2}$, $x_2 = \frac{1-a+\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2}$, $x_3 = -\frac{2a+2}{a^2}$. Итак, ответ:

$$x \in (-\infty; 0] \quad \text{при } a > \sqrt{2}-1;$$
$$x \in (-\infty; 0] \cup [x_1; x_2] \quad \text{при } 0 < a \leqslant \sqrt{2}-1;$$
$$x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty] \quad \text{при } a = 0;$$
$$x \in [x_3; 0] \cup [x_1; +\infty) \quad \text{при } -1 \leqslant a < 0;$$
$$x \in [0; x_3] \cup [x_1; +\infty) \quad \text{при } -2 \leqslant a < -1;$$
$$x \in [0; +\infty) \quad \text{при } a < -2,$$

решение понятно из следующей серии графиков (см. рис. 206, *а-д*).

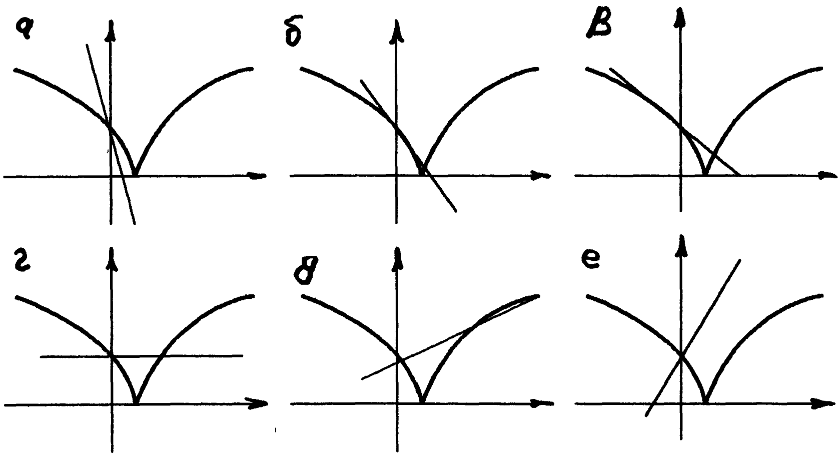

Рис. 206

г) 90 000 рублей[2]. Конечно, можно прямо подсчитать, сколько же денег на счету окажется у Ивана через 8 лет. Заметим, что

[2]Прочитав формулировку задачи, один из моих коллег сказал, что от-

проделать аналогичное вычисление при решении задачи 2г) следующего варианта будет более затруднительно, не говоря уже о том, что делать это без кульку лятора просто глупо.

Мы проведем вычисления в общем виде, воспользовавшись численными данными лишь на заключительном этапе решения. Итак, пусть a — вносимая Иваном ежегодно сумма, а α — начисляемый годовой процент. В первый год он внес a рублей, так что после начисления годовых процентов через год у него на счету будет $a + a\frac{\alpha}{100} = a(1+\frac{\alpha}{100})$ рублей. Удобно ввести дополнительное обозначение $q = 1 + \frac{\alpha}{100}$, так что если некто имел на счету в начале года s рублей, то после начисления процентов у него окажется sq рублей. Вернемся к Ивану. После того, как он в конце первого года внес снова свои a рублей, у него на счету стало их $a + aq$, далее, в конце второго года их станет (после очередного взноса) $a+(a+aq)q = a+aq+aq^2$. Теперь уже ясно, что сумма, скопившаяся на счету Ивана за 8 лет, равна $a + aq + \ldots + aq^8$, ежегодные проценты с которой составляют

$$(q-1)(a + aq + \ldots + aq^8) = a(q^9 - 1) \text{ рублей.}$$

В нашем случае $q = 1{,}3$, $q^9 = 1{,}3^9 = 10^{9\lg 1{,}3} > 10$, так как $9\lg 1,3 = 9 \cdot 0{,}114 > 1$. Поэтому имеется по крайней мере 90000 рублей ежегодного дохода в распоряжении Ивана и всех его будущих наследников.

3. а) Нетрудно видеть, что данное равенство равносильно тому, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$

которое верно, поскольку

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

б) Искомое множество есть объединение биссектрис координатных углов, т. е. множество, заданное уравнением $x^2 = y^2$. Ясно,

---

вет в ней — “ничего”, поскольку банк, который выплачивает такой процент, заведомо прогорит. И, как мы увидели на практике, он оказался прав. Но это уже совсем другая наука...

что точки, для которых $x = \pm y$, удовлетворяют данному уравнению. Для того, чтобы показать, что других точек нет, найдем значения тангенса каждой из частей данного уравнения. Имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy},$$
$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} \tfrac{x+y}{2}) = \frac{x+y}{1-(\frac{x+y}{2})^2},$$

откуда следует, что $x+y=0$ или $xy = (\frac{x+y}{2})^2$, т. е. $x-y=0$.

в) *Ответ:* $\frac{\pi}{2}$. Поскольку $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$, то $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 2$. Далее,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}) = \frac{2-\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{7}} = 3.$$

Теперь нетрудно догадаться и доказать по индукции, что сумма первых n слагаемых в данной бесконечной сумме равна $\operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$.

4. а-б) $\frac{1}{12}\sqrt{3}$. Прежде всего следует учесть, что имеются два различных варианта расположения единичных ребер. В первом из них в пирамиде имеются три таких ребра, исходящих из одной вершины. В этом случае очевидно, что пирамида имеет наибольший объем, если одно из этих ребер перпендикулярно двум другим, поэтому ее объем равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{12}\sqrt{3}$. Теперь рассмотрим второй случай. Рассмотрим пирамиду, в которой $AB = BC = CD = DA = 1$. Фиксируем ребро $AC = x$. Пирамида будет иметь наибольший объем, если плоскости граней ABC и ABD перпендикулярны друг другу. Поскольку высоты этих граней равны $h = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, то $V(x) = \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{4})$. Дифференцируя, получаем, что наибольшее значение объема достигается при $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$: $V_{\max} = \frac{1}{27}\sqrt{3} < \frac{1}{12}\sqrt{3}$. Для решения пункта а) задачи осталось заметить, что $BD = h\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = AC$.

в) Девять пирамид. Давайте вначале решим более простую задачу. Предположим, что зеленые и красные стержни имеют одинаковую длину. Составим таблицу, в которой в верхней строке указано число зеленых стержней, а в нижней — число различно окрашенных пирамид с таким числом зеленых стержней.

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	2	1	1

Не кажется ли вам странным число “4” в средней клетке этой таблиц? Действительно, три зеленых стержня могут: а) выходить из одной вершины; б) образовывать треугольник; и в) образовывать незамкнутую пространственную ломаную. Однако оказывается, что в последнем случае имеются две различимые конфигурации, так сказать, “правая” и “левая” (см. рис. 207)!

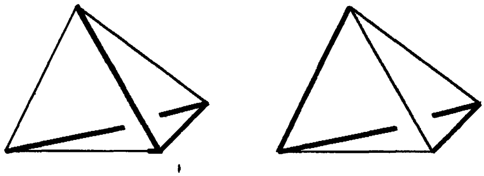

Рис. 207

Задача в ее исходной постановке отличается от только что разобранной тем, что в необходимо исследовать вопрос о существовании пирамиды с данными длинами ребер в каждом из рассмотренных выше случаев. К примеру, пирамида, в которой отрезки длины a образуют треугольник основания, а отрезки длины b выходят из вершины пирамиды, существует тогда и только тогда когда выполнено неравенство $a < b\sqrt{3}$. Поскольку в нашем случае $20\sqrt{3} > 34 > 33$, то существуют пирамиды как с зеленым, так и с красным основаниями.

Далее, пирамида, в которой одно ребро имеет длину a, о остальные — длину b, также существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $a < b\sqrt{3}$, поскольку для этого нужно, чтобы $CD < b$ (см. рис. 208).

Исследуем теперь возможность построения пирамиды, три ребра которой по 20 см каждый образуют незамкнутую ломаную. Также как и выше, рассмотрим общий случай: в пирамиде имеются по три ребра длины a и b, образующие трехзвенные ломаные. Рассмотрим две соседние грани пирамиды и развернем их на плоскость двумя способами. Нетрудно видеть, что для су-

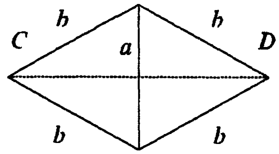

Рис. 208

ществования такой пирамиды необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства $CD' < a < CD$. Прямые вычисления показывают, что $a < CD$ при любых a и b, а второе неравенство равносильно тому, что $|a^2 - b^2| < ab$. В нашей задаче $33^2 - 20^2 = 13 \cdot 53 = 689 > 20 \cdot 33$, поэтому пирамиды, в которой три красных ребра образовывали бы незамкнутую ломаную, не существует. Кстати, последнее неравенство равносильно тому, что $\frac{2}{\sqrt{5}+1} < \frac{a}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Наконец, не реализуется еще один вариант расположения ребер данной длины (найдите его самостоятельно).

Вариант 2

1. а) Докажите, что если каждая из средних линий четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

   б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро — двум.

   в) Докажите, что если $a_i > 0$, $a_i c_i \geqslant b_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$, то

$$(a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 + c_3) \geqslant (b_1 + b_2 + b_3)^2.$$

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = \log_3 x - 3x - |\log_3 x + 3x|$.

   б) Решите уравнение $\sqrt{2 + \cos 2x} = \sin x + \cos x$.

   в) Решите неравенство $\sqrt{|x - \frac{1}{4}|} \leqslant \frac{1}{2} + ax$.

   г) Для того, чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 2 000\$. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по 20 000\$ в год из процентов, не трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых, а $\lg 1{,}1 = 0{,}0414$.

3. а) Найдите все треугольники, длины сторон и величины углов которых образуют арифметические прогрессии.

   б) Верно ли, что для всякой арифметической прогрессии из четырех положительных чисел существует выпуклый четырехугольник, длинами сторон которого являются эти числа?

   в) Найдите все четырехугольники, длины сторон и углы которых (взятые в циклических порядках) образуют арифметические прогрессии.

4. а) Найдите все целые k, при которых разрешимо уравнение

$$\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} = \sqrt{\tfrac{k}{10}}.$$

   б) Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$.

   в) Найдите все натуральные решения уравнения

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1998}.$$

1. б) 1. **в)** Решим задачу для произвольного числа n чисел a_i, b_i, c_i. Введем квадратные трехчлены $q_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x + c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как по условию $a_i > 0$ и $a_i c_i \geqslant b_i^2$, то $q_i(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} c_i \geqslant 0,$$

откуда и следует неравенство $\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} c_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

2. б) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** Ответ:

$$\begin{aligned}
&x \in [0 : +\infty) \quad \text{при } a > \sqrt{2} - 1;\\
&x \in [0; x_1] \cup [x_2; +\infty) \quad \text{при } 0 < a \leqslant \sqrt{2} - 1;\\
&x \in [0; 1] \quad \text{при } a = 0;\\
&x \in (-\infty; x_3] \cup [0; x_1] \quad \text{при } -1 \leqslant a < 0;\\
&x \in (-\infty; 0] \cup [x_3; x_1] \quad \text{при } -2 \leqslant a < -1;\\
&x \in (-\infty; 0] \quad \text{при } a < -2,
\end{aligned}$$

где $x_1 = \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{2a^2}$, $x_2 = \frac{1-a+\sqrt{1-2a-a^2}}{2a^2}$, $x_3 = -\frac{a+1}{a^2}$. **г)** Да, достаточно.

3. **а)** Только равносторонние треугольники. Поскольку сумма углов треугольника равна π, то из того, что они образуют арифметическую прогрессию, следует, что средний из них равен $\frac{\pi}{3}$. Если a — длина стороны, противоположной этому углу, то длины остальных сторон треугольника — $a \pm d$. По формуле косинусов

$$a^2 = (a+d)^2 + (a-d)^2 - a^2 - (a^2 - d^2),$$

откуда $d = 0$. **б)** Решение очевидно, если использовать такое "геометрически очевидное" утверждение. Если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geqslant a_n$, то существует замкнутая выпуклая ломаная, длины звеньев которой равны a_i. Попробуйте дать какое-нибудь обоснование этого утверждения. **в)** Квадраты и только они. Нетрудно видеть, что если углы четырехугольника образуют арифметическую прогрессию, то он — трапеция. Далее, если и длины его сторон образуют арифметическую прогрессию, то $KD = |CD - CK|$ (обозначения на рис. 209; отрезок CK параллелен стороне AB), откуда следует, что $K = D$, т. е. этот четырехугольник является прямоугольником.

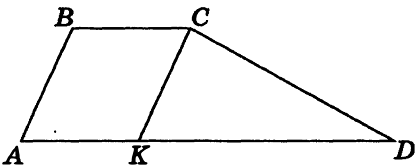

Рис. 209

4. **а)** *Ответ*: $k = 16, 17, \ldots, 31$. Не следует пугаться присутствующих в условии обратных тригонометрических функций. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то после замены $t = \arcsin x$ получим уравнение $\sqrt{t} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - t} = \sqrt{\frac{k}{10}}$, $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Полученное уравнение разрешимо, если число $\sqrt{\frac{k}{10}}$ входит в множество значений функции $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - t}$. Для его нахождения можно стандартным образом исследовать функцию при помощи производной, а можно воспользоваться оценками

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}, \ a, b \geqslant 0$$

(заметим, что эти неравенства обращаются в равенства, соответственно, при $a = 0$ или $b = 0$ и $a = b$). Следовательно, множеством значений функции f является отрезок $[\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\pi}]$. Значит решение исходного уравнения существует тогда и только тогда, когда $5\pi \leqslant k \leqslant 10\pi$, откуда и получаем ответ. **б)** *Ответ*: $(x, y) = (1998, 0); (0, 1998); (888, 222); (222, 888)$. Из равенства $\sqrt{y} = \sqrt{1998} - \sqrt{x}$ получаем, что $y = 1998 + x - 2\sqrt{1998x}$, откуда следует, что число $1998x$ должно быть полным квадратом, т. е. $x = 222l^2$. Аналогично, $y = 222m^2$, причем $l + m = 3$, $l, m \in \mathbb{Z}_+$. **в)** *Ответ*: $(x, y, z) = (222, 222, 222)$. Докажите вначале следующее утверждение.

Лемма. Если $a, b, u, v \in \mathbb{N}$ и $a\sqrt{u} + b\sqrt{v} \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{u}, \sqrt{v} \in \mathbb{N}$.

1999

Вариант 1

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \cos y = 0, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

   б) Существует ли многочлен $p(x) = x^9 + a_1x^8 + \ldots + a_9$, имеющий девять различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят $0{,}001$?

   в) Докажите неравенство
   $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 2 \ln 3 \ln 5 < \ln 2 \ln 3 + \ln 3 \ln 5 + \ln 5 \ln 2 + 1.$

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 - 24x} \leqslant 8$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + a)$ не имеет решений на отрезке $[0; 1]$.

   в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами $3, 6, 6$ см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

   г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны $1, 2, 3, 2$ см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$

   а) Докажите, что $3x_{n+1} = 7x_n - 2x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 1$.

   б) Известно, что $x_{1999} > 0$. Верно ли, что $x_{2000} > 0$?

в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

1. **а)** $(2\pi k, (-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n)$; $\pi+2\pi k, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\pi n$; $(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi n)$; $(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **б)** *Ответ*: Да, существует. Действительно, положим $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_9)$. Ясно, что если корни x_i достаточно малы, то и коэффициенты многочлена $p(x)$ малы. Можно написать явные оценки, но лучше провести следующее рассуждение.

Пусть $p(x) = (x - \frac{1}{n})(x - \frac{2}{n})\ldots(x - \frac{9}{n})$. Коэффициенты этого многочлена имеют вид $a_i = \frac{c_i}{n^i}$. Поскольку $a_i \to 0$ при $n \to \infty$, то найдется такое натуральное число n, что $|a_i| < 0,001$, $i = 1, 2, \ldots, 9$. **в)** Неравенство приводится к виду $(1-a)(b-1)(c-1) > 0$, где $a = \ln 2 < 1$, $b = \ln 3 > 1$, $c = \ln 5 > 1$ (поскольку $2 < e < 3 < 5$).

2. **а)** *Ответ*: $[-1; 0]$. Вместо того, чтобы решать иррациональное неравенство путем двукратного возведения в квадрат, можно поступить следующим образом. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2-8x} + \sqrt{x^2-24x}$. Поскольку на луче $(-\infty; 0]$ функции $y = x^2 - 8x$ и $x^2 - 24x$ — убывающие, то и функция f убывает на нем. Аналогично, f возрастает на луче $[24; +\infty)$. Далее, $f(0) = 0$, $f(-1) = 8$, а $f(24) = \sqrt{24 \cdot 16} > 8$. Таким образом, $f(x) \leqslant 8$ только при $x \in [-1; 0]$. **б)** *Ответ*: $(2\pi k; 2\pi(k+1) - 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем: $\cos x^2 = \cos(x+a)$ тогда и только тогда, когда $x^2 = x + a - 2\pi k$ или $x^2 = -(x+a) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. когда число а является значением на отрезке $[0; 1]$ (при некотором $k \in \mathbb{Z}$) одной из функций $y = x^2 - x + 2\pi k$ или $y = -(x^2+x) + 2\pi k$. Графики этих функций изображены на рис. 210, откуда и следует ответ.

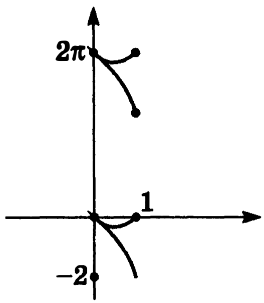

Рис. 210

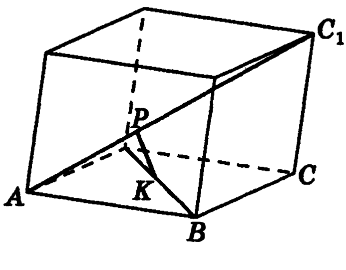

Рис. 211

в) *Ответ*: $\sqrt{2}$. Подчеркнем прежде всего, что основную часть решения данной задачи составляет геометрическое рассуждение. Именно, требуется доказать, что искомым расстоянием между диагональю BD грани $ABCD$ и диагональю AC_1 параллелепипеда является длина перпендикуляра, опущенного на AC_1 из точки K — центра $ABCD$ (рис. 211). Для этого достаточно доказать, что прямая KP, которая по построению перпендикулярна AC_1, также перпендикулярна и BD. Действительно, так как $AC \perp BD$ и $CC_1 \perp BD$, то прямая BD перпендикулярна плоскости (ACC_1), значит она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности, и прямой KP. Само вычисление чрезвычайно просто:

$$KP = AK\sin\alpha = AK\frac{CC_1}{AC_1} = 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} = \sqrt{2}.$$

Заметим, наконец, что если длины ребер параллелепипеда различны, то общий перпендикуляр к BD и AC_1 уже не будет пересекать BD в его середине. В этом случае проще всего использовать методы аналитической геометрии, чтобы получить следующую общую формулу $d = \frac{abc}{\sqrt{4a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.

г) $S_{\max} = 2\sqrt{3}$ — площадь трапеции. Пусть d — диагональ четырехугольника. Тогда $S = 3\sin\varphi + \sin\psi$, где $\cos\varphi = \frac{13-d^2}{12} = t$ и $\cos\psi = \frac{5-d^2}{4} = 3t-2$, так что

$$S(t) = 3\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-(3t-2)^2}.$$

Прямое дифференцирование показывает, что эта функция достигает своего наибольшего значение при $t = \frac{1}{2}$.

3. а) Нетрудно проверить, что заданное соотношение верно для последовательностей $a_n = 2^n$ и $b_n = 3^{-n}$. Поэтому $x_{n+1} = a\cdot a_{n+1} + b\cdot b_{n+1} = a(7a_n - 2a_{n-1}) + b(7b_n - 2b_{n-1}) = 7(a\cdot 2^n + b\cdot 3^{-n}) - 2(a\cdot 2^{n-1} + b\cdot 3^{-(n-1)}) = 7x_n - 2x_{n-1}$. **б)** *Ответ*: Нет, неверно. Легко понять, что найдутся такие a и b, при которых $x_{1999} = 1$, а $x_{2000} = -1$. **в)** *Ответ*: Нет, не существует. Предположим, что $2^n + 3^{-n} = a_0 + dk_n$, где $k_n \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что a_0 и d — рациональные числа; пусть q — их общий знаменатель. Осталось заметить, что в левой части равенства

$$3^{-n} = a_0 + dk_n - 2^n$$

стоит ненулевое число, стремящееся к нулю при $n \to \infty$, между тем как знаменатель числа, стоящего в его правой части, не больше q, поэтому оно не может стремиться к нулю.

Вариант 2

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \sin y = 0, \\ \cos x \cos y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

   б) Существует ли многочлен $p(x) = x^8 + a_1x^7 + \ldots + a_8$, имеющий восемь различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят $0,001$?

   в) Докажите неравенство
   $\ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 3 \ln 4 \ln 5 > \ln 3 \ln 4 + \ln 4 \ln 5 + \ln 5 \ln 3 + 1.$

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 48x} \geqslant 9$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + 2)$ имеет решения на отрезке [0; a].

   в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами 4, 2, 4 см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

   г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 2, 3, 4, 3 см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^{-n} + b \cdot 3^n$, $n = 0, 1, \ldots$

   а) Докажите, что $2x_{n+1} = 7x_n - 3x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 1$.

   б) Известно, что $x_{1999} < 0$. Верно ли, что $x_{1998} < 0$?

   в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0, x_1, \ldots$?

1. а) $(2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$; $\pi + 2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$; $(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \pi + 2\pi n)$; $(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, 2\pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **2. а)** $[-\infty; -48] \cup [1; +\infty]$. **б)** $a \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{8\pi - 7} - 1)$. **в)** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **г)** $S_{\max} = 6\sqrt{2}$ — площадь трапеции. **3. б)** Нет, неверно. **в)** Нет, не существует.

2000

Вариант 1

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3 и 5?

   б) Решите уравнение $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 2000$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$ (тем самым с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geqslant 5$.

б) Решите уравнение $\sqrt{a + 2\cos 2x} = a\cos x$.

в) Внутри угла величиной 60° с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [A'D']$, $L \in [B'C']$ и $M \in [BB']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $16 : 9$, $2 : 3$ и $1 : 2$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2, & \text{если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 9, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический "хвост", т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geqslant N$.

1. а) *Ответ*: Нет, не существует. Действительно, если $3 = 2q^k$ и $5 = 2q^n$, то $(\frac{3}{2})^n = (\frac{5}{2})^k$, т. е. $3^n = 5^k \cdot 2^{n-k}$, что невозможно. **б)** *Ответ*: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как левая часть уравнения может принимать лишь значения

$a \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, то осуществим перебор. *А*) Пусть $a = 2$. Тогда $\sin 2x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Имеем $3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$, так что $[2\cos 3x] < 2$ и этот случай невозможен. *Б*) Пусть $a = 1$: $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$. В первом случае $3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$. Из значений $\cos 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ нам подходит только $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($[\sqrt{2}] = 1$), поэтому число k должно быть четным. Во втором случае, наоборот, n — нечетно. Поэтому $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ или $x = \pi + \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$. *В*) Пусть $a = 0$: $x = \frac{\pi k}{2}$, $\cos 3x \in \{0, \pm 1\}$. Таким образом, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. *Г*) Пусть $a = -1$: $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n$. В этом случае $[2\cos 3x] = -2; 1$, так что решений нет. *Д*) Наконец, пусть $a = -2$. Тогда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, а число k должно быть четно. Таким образом, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

в) *Ответ*: 24 точки. Имеем: $(x+y)(x-y) = 2^4 5^3$. Так как числа $x+y$ и $x-y$, будучи целыми, имеют одинаковую четность, то $x = 2a$ и $y = 2b$, где $ab = 2^2 5^3$. Таким образом, количество решений данного уравнения совпадает с количеством чисел вида $\pm 2^s 5^t$, $s = 0, 1, 2$, $t = 0, 1, 2, 3$. **г**) *Ответ*: шансы первого игрока — 3 : 2, так как вероятность его победы почти равна $\frac{3}{5}$. Вероятность того, что все 40 партий закончатся вничью, равна $4^{-40} = 2^{-80} < 10^{-24}$, поэтому будем считать, что матч продолжается до первой победы. Вероятность победы игрока, который в первой партии играет белыми фигурами, равна сумме ряда

$$p + qr + pr^2 + qr^3 + \ldots = (p + qr)(1 + r^2 + r^4 + \ldots) = \frac{p + qr}{1 - r^2},$$

здесь $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ — вероятности его победы при игре белыми, соответственно, черными фигурами, $r = \frac{1}{4}$ — вероятность ничьи. *Второе решение*: Искомая вероятность является решением уравнения $x = p + rq + xr^2$.

2. а) *Ответ*: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; +\infty)$. После стандартных преобразований получим неравенство $\frac{(x^2-x-2)(x^2+5x+10)}{(x+2)^2} \geqslant 0$. **б**) *Ответ*: $x = \pm \arccos(-\frac{1}{\sqrt{a+2}}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in [-1; 0)$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 0$; $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{a+2}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$; $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 2$.

При $a = 2$ получаем уравнение $2|\cos x| = 2\cos x$, т. е. $\cos x \geqslant 0$. При $a = 0$ имеем $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Вообще, $\cos x = 0$ есть решение только при $a = 2$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $a\cos x > 0$. После замены $t = \cos x$ получим уравнение

$\sqrt{a+2(2t^2-1)} = at$, откуда $a-2 = (a^2-4)t^2$. Случай $a=2$ уже исследован, так что $t^2 = \frac{1}{a+2}$. Из условий $0 < \frac{1}{a+2} \leqslant 1$ получаем, что $a \geqslant -1$. Таким образом, $t = -\frac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a \in [-1;0)$ и $t = \frac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a > 0$.

в) *Ответ*: $2\sqrt{3}$. Имеем: $\frac{KL}{\sin\alpha} = 2R = AM$, так что $KL = 4\sin\frac{\pi}{3}$.

г) *Ответ*: Пять сторон. Если расположить начало системы координат в вершине C куба, а ее оси направить по его ребрам, то из условий на точки K, L, M следует, что их координаты равны $K(1, \frac{9}{25}, 1)$, $L(0, \frac{3}{5}, 1)$, $M(0, 1, \frac{1}{3})$. Для определения коэффициентов уравнения $ax + by + cz = 1$ плоскости (KLM) получаем систему

$$\begin{cases} a + \frac{9}{25}b + c = 1, \\ \frac{3}{5}b + c = 1, \\ b + \frac{1}{3}c = 1, \end{cases}$$

откуда $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{5}{6}$ и $c = \frac{1}{2}$. Найдем координаты точки P пересечения прямой AA' и плоскости KLM: $x = y = 1$, так что $z = -\frac{1}{15}$. Для контроля укажем отношения, в которых точки Q и S плоскости делят, соответственно, ребра AB и AD куба: $AQ : QB = 1 : 5$, $AS : SD = 1 : 25$.

3. а)-б) *Ответ*: четырнадцать последовательностей с начальными членами из множества $X_0 = \{1, 2, \dots, 9, 10, 12, \dots, 18\}$. То, что эти числа порождают периодические последовательности, проверяется непосредственно. Если $x_0 \in \{11, 13, 15, 17\}$, то $x_2 \in X_0$, поэтому такая последовательность непериодична, но ее хвост $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ периодичен. Пусть x_k — наименьший член некоторой последовательности, ясно, что число x_k нечетно. Если предположить, что $x_k > 9$, то $x_{k+2} = \frac{1}{2}(x_k + 9) < x_k$. Поэтому во всякой последовательности найдется член из множества X_0.

Вариант 2

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 3, 7 и 10?

   б) Решите уравнение $[2\sin 3x] = -2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

   в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 1944$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{8}$ (тем самым с вероятностью $\frac{3}{8}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 80 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $\dfrac{4}{(x-1)^2} \geqslant \dfrac{5}{x^2} - 4$.

б) Решите уравнение $\sqrt{a - 2\cos 2x} = a \sin x$.

в) На сторонах угла величиной 120° с вершиной в точке A на расстоянии 4 друг от друга лежат точки K и L. Пусть M — точка пересечения восстановленных в точках K и L перпендикуляров к соответствующим сторонам угла. Найдите расстояние от M до A.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [AB]$, $L \in [A'B']$ и $M \in [C'D']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $1:4$, $11:4$ и $8:7$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2, & \text{если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 7, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический "хвост", т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geqslant N$.

1. а) Нет, не существует. **б)** $x = \pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k; \frac{11\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** 24 точки. **г)** Шансы первого игрока — $7:4$; вероятность его победы почти равна $\frac{7}{11}$. **2. а)** $(-\infty; -1] \cup [\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$. **б)** $x = (-1)^k \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{a+2}}) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in [-1; 0)$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 0$; $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+2}} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при

$a \in (0;2) \cup (2;+\infty)$; $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 2$. **в)** $\frac{8}{\sqrt{3}}$. **г)** Пять сторон. **3. а)** Одиннадцать последовательностей с начальными членами из множества $\{1, 2, \ldots, 7, 8, 10, 12, 14\}$.

Задачи профильно-элитарного экзамена

1996

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{4^x - a \cdot 2^x}{2^x - 1}$.
   а) Пусть $a = -2$. Решите уравнение $f(x+1) = f(x)$.
   б) Пусть $a = \frac{7}{2}$. Решите неравенство $f(x) + f(-x) \leqslant 0$.
   в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на луче $(-\infty; 0)$.
   г) Найдите все a при которых существует b, такое что уравнение $f(x) = b$ не имеет решений.

2. Пусть $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$.
   а) Найдите все $x \in [1;2]$, для которых $f_5(x) \leqslant f_3(x)$.
   б) Решите уравнение $f_5(x) = 2f_3(x)$.
   в) Найдите все a, такие что уравнение $f_3(x) = f_3(a)$ имеет ровно два решения на отрезке $[0;\pi]$.
   г) Существует ли многочлен q, для которого $q(\sin x) = f_{1996}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

3А. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 7} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.
   а) Решите неравенство $f(x) \leqslant 1$.
   б) Найдите множество значений функции f.
   в) Докажите неравенство

$$\int_0^1 \frac{2}{f(x)}\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 3.$$

   г) Найдите все $k \in \mathbb{Z}$, такие что $f(k) \in \mathbb{Q}$.

3Б. Будем обозначать через $M(z)$ точку плоскости, соответствующую комплексному числу z. Рассмотрим точки $A_i(z_i)$, $i = 1, 2, 3$, где $z_1 \neq -z_2$ и $z_3 = \dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$.
   а) Докажите, что если $z_1, z_2 \neq 0$, то точки $B_i(z_i^{-1})$, $i = 1, 2, 3$, лежат на одной прямой.

б) Докажите, что если $z_2 = \overline{z}_1$ и $z_1 \neq z_2$, то треугольник OA_1A_3 — прямоугольный (O — начало координат).

в) Пусть $z_2 = \overline{z}_1$, $|z_1 - 2| \leqslant 1$. Найдите наибольшее значение отношения площадей треугольников OA_1A_3 и OA_1A_2.

г) Докажите, что точки A_i, $i = 1, 2, 3$, и O лежат на одной окружности.

3В. Положим $p_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$.

а) Докажите, что многочлен p_n имеет вещественные корни тогда и только тогда, когда число n нечетно.

б) Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные корни многочлена p_n. Докажите, что $(1 - z_1)(1 - z_2)\ldots(1 - z_n) = n + 1$.

в) Найдите все n, при которых многочлен p_n делится на $1+x^3$.

г) Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} p_k(x) = 2^n p_n(\tfrac{x+1}{2}).$$

1. **а)** $x = 1$. **б)** $[-1; 0) \cup (0; 1]$. **в)** *Ответ*: $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 1$. В этом и последующем пунктах полезно сделать замену $t = 2^x$ с тем, чтобы исследовать функцию $g(t) = \frac{t^2-at}{t-1}$; **г)** $a \leqslant 1$.

2. **а)** *Ответ*: $[1; \frac{3\pi}{8}] \cup [\frac{5\pi}{8}; 2]$. Используйте неравенства $\frac{\pi}{8} < 1 < \frac{3\pi}{8} < \frac{5\pi}{8} < 2 < \frac{7\pi}{8}$. **б)** *Ответ*: $x = \pi k; \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Приведите уравнение к виду $2\sin x \cos 4x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$. **в)** *Ответ*: $a = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; a \in (-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}) \cup (-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi k}{3})$. Уравнение $f_3(x) = b$ имеет на отрезке $[0; \pi]$ два решения, если $b = 1$ или же $-1 < b < 0$. Таким образом, $\sin 3a = 1$ или $-1 < \sin 3a < 0$. **г)** Если $q(\sin x) = \sin 1996x$, то $q(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sin(1996(\frac{\pi}{2} - x))$, т.е. $q(\cos x) = -\sin 1996x$. Осталось заметить, что функция $q(\cos x)$ четна, а $\sin 1996x$ — нечетна.

3А. **а)** $(-\infty; -\frac{7}{8}]$. **б)** *Ответ*: $(-1; 2]$. Полезно построить график данной функции — см. рис. 212.

в) Так как $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$ при $x \in [0; 1]$, то $(2 - f(x))(f(x) - 1) \geqslant 0$, откуда

$$\frac{2}{f(x)} + f(x) \leqslant 3.$$

Проинтегрировав полученное неравенство по отрезку $[0; 1]$, получим требуемое. **г)** *Ответ*: $k = -3; 1$. Если $f(k) \in \mathbb{Q}$, то из

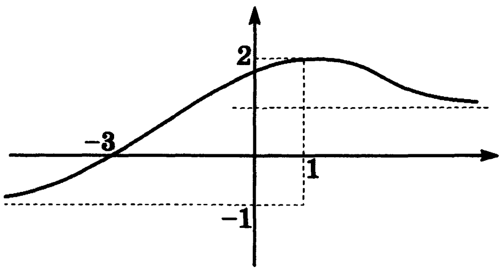

Рис. 212

равенства

$$f(k)(\sqrt{k^2+k+7}+\sqrt{k^2-k+1}) = 2k+6$$

следует, что $\sqrt{k^2+k+7}+\sqrt{k^2-k+1} \in \mathbb{Q}$, следовательно каждый из этих корней является рациональным числом. Однако корень из целого числа есть либо целое, либо рациональное, поэтому если $f(k) \in \mathbb{Q}$, то $f(k) \in \mathbb{Z}$. Из целых чисел в множестве значений функции f содержатся только 0, 1 и 2. Имеем: $f(x) = 0$ при $x = -3$, $f(x) = 1$ при $x = -\frac{7}{8}$, $f(x) = 2$ при $x = 1$.

3Б. **а)** Поскольку $z_3^{-1} = (z_1^{-1} + z_2^{-1})/2$, то точка B_3 — середина отрезка B_1B_2. **б)** Пусть $z_1 = a + bi$. Тогда $z_2 = a - bi$, по условию $a, b \neq 0$, и $z_3 = \frac{a^2+b^2}{a}$. Вектор $\overline{OA_1}$ имеет координаты (a, b), а вектор $\overline{A_1A_3}$ — координаты $(\frac{b^2}{a}, -b)$. Таким образом, $\overline{OA_1} \cdot \overline{A_1A_3} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$, т. е. эти вектора перпендикулярны ($\angle OA_1A_3 = 90^\circ$). **в)** *Ответ*: Наибольшее значение отношения площадей равно $\frac{2}{3}$. Имеем: $S_1 = S_{OA_1A_3} = \frac{1}{2}|\frac{b}{a}|(a^2+b^2)$, $S_2 = S_{OA_1A_2} = |ab|$, таким образом,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+(\frac{b}{a})^2}{2},$$

откуда следует, что отношение площадей наибольшее, когда является наибольшим модуль отношения b/a. Из рис. 200 очевидно, что $\max|\frac{b}{a}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

г) Достаточно показать, что отрезок A_2A_3 виден из точек O и A_1 под равными углами, т. е., что равны аргументы комплексных чисел $\frac{z_3}{z_2}$ и $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. Двойное отношение

$$\frac{z_2(z_3-z_1)}{z_3(z_2-z_1)}=\frac{z_2}{z_2-z_1}\frac{\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}-z_1}{\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}=\frac{z_2(z_1z_2-z_1^2)}{2(z_2-z_1)z_1z_2}=\frac{1}{2},$$

положительно, откуда, в силу свойства аргумента отношения комплексных чисел, следует требуемое.

3В. **а)** $p_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}=0$ если $x^{n+1}=1$, $x\neq 1$, таким образом, число $n+1$ должно быть четным. **б)** Если $z_1,\dots,z_n$ — корни многочлена p_n, то

$$p_n(x)=(x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n),$$

значит, $(1-z_1)(1-z_2)\dots(1-z_n)=p_n(1)=n+1$. **в)** $n=6k+5$, $k\in\mathbb{Z}$. Многочлен p_n делится на x^3+1, если все корни последнего многочлена, т. е. кубические корни из -1, являются и корнями p_n. Положим $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Как и выше, $p_n(\varepsilon)=0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon^{n+1}=1$, т. е. когда число $n+1$ делится на 6.

г) Доказательство проведем по индукции:

$$\begin{aligned}2^{n+1}p_{n+1}\left(\tfrac{x+1}{2}\right)&=2^{n+1}\left(p_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)+\left(\tfrac{x+1}{2}\right)^{n+1}\right)=\\&=2\cdot 2^n p_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)+(x+1)^{n+1}=\\&=2\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}p_k(x)+\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}x^k=\\&=2\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}p_k(x)+\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}p_k(x)-\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}p_k(x)=\\&=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}p_k(x)+\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}p_k(x)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+2}^{k+1}p_k(x).\end{aligned}$$

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+1}{4^x-2^x}$.
   а) Пусть $a=-\frac{5}{8}$. Решите уравнение $f(x-1)=f(x)$.
   б) Пусть $a=-\frac{21}{4}$. Решите неравенство $f(x)+f(-x)\geqslant 0$.

в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на луче $(0; +\infty)$.

г) Найдите все a, при которых существует b, такое что уравнение $f(x) = b$ не имеет решений.

2. Пусть $f_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Найдите все $x \in [1; 2]$, для которых $f_5(x) \geqslant f_3(x)$.

б) Решите уравнение $f_5(x) + 2f_3(x) = 0$.

в) Найдите все a, такие что уравнение $f_3(x) = f_3(a)$ имеет ровно два решения на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$.

г) Существует ли многочлен q, для которого $q(\sin x) = f_{1995}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

1. а) $x = 2; \log_2 \frac{4}{5}$. **б)** $[-2; 0) \cup (0; 2]$. **в)** $a \geqslant 0$ или $a \leqslant -1$. **г)** $a \geqslant -1$. **2. а)** $[1; \frac{\pi}{2}]$. **б)** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{13}-1}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $a = \frac{2\pi k}{3}; a \in (\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}) \cup (\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

1997

Вариант 1.

1. Дана функция $f(x) = \log_2^2 x + \log_x 4$.

а) Решите уравнение $f(x) = 3$.

б) Решите неравенство $f(x) \geqslant -1$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет единственное решение.

г) Определите число корней уравнения $f(x) = f(2x)$.

2. Дана функция $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 2a \sin x \cos x$.

а) Пусть $a = -13/8$. Найдите корни функции f.

б) Найдите все a, такие что $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$.

в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на отрезке $[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}]$.

г) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k\pi}{n})$.

3А. Последовательность $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, задана соотношениями $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, $x_0 = c$.

а) Найдите все c, при которых $x_2 > 0$.

б) Докажите, что если $c > 1$, то эта последовательность монотонна.

в) Найдите все непостоянные конечные арифметические прогрессии, образованные последовательными членами указанной последовательности.

г) Докажите, что существуют последовательности данного вида, имеющие сколь угодно большой период.

3Б. Известно, что ученик подготовил ответы не на все из 16 выносимых на зачет вопросов.

а) Сколько вопросов он выучил, если известно, что вероятность того, что он сможет ответить на оба из случайно выбранных им двух вопросов, не меньше, чем $\frac{7}{8}$?

б) Сколько вопросов он выучил, если известно, что вероятность того, что он сможет ответить только на один из случайно выбранных им двух вопросов, равна $\frac{1}{2}$?

в) В каком случае вероятность того, что он сможет ответить на один случайно выбранный им вопрос, больше, чем вероятность того, что ему удастся ответить на два (по его выбору) из случайно выбранных им трех вопросов?

г) Учитель распределил случайным образом вопросы по восьми билетам (по два вопроса в каждом). Какова вероятность того, что ученик в состоянии ответить хотя бы на один вопрос каждого из билетов, если известно, что он подготовил ответы на 10 вопросов?

3В. Дано число $\varepsilon \neq 1$, такое что $\varepsilon^3 = 1$. Сопоставим точкам $A(a), B(b), C(c)$ плоскости (здесь a, b, c — комплексные числа) числа $u = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ и $v = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon$.

а) Известно, что $a = 0$, $c = -2$, $u = 0$. Определите вид треугольника ABC.

б) Докажите, что числа u и v не изменятся, если треугольник ABC подвергнуть параллельному переносу.

в) Докажите, что треугольник ABC является равносторонним тогда и только тогда, когда $uv = 0$.

г) Найдите множество значений u для всех треугольников ABC, накрываемых кругом радиуса 1.

1. а) *Ответ*: $x = 2; \frac{1}{4}$. Действительно, сделав замену $t = \log_2 x$, мы получим, что $f(x) = t^2 + \frac{2}{t}$ (более формально: $f(x) = g(\log_2 x)$, где $g(t) = t^2 + \frac{2}{t}$). Данная замена приводит уравнение пункта а)

задачи к виду $t^2 + \frac{2}{t} = 3$, или $t^3 - 3t + 2 = 0$. Поскольку, как нетрудно видеть, $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$, то $t = 1$ или $t = -2$.
б) *Ответ*: $(0; \frac{1}{2}] \cup (1; +\infty)$. Проделав аналогичные преобразования, мы придем к неравенству

$$\frac{(t+1)(t^2-t+2)}{t} \geqslant 0,$$

откуда $t \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

При решении заданий пунктов в-г) удобно воспользоваться графической интерпретацией уравнения $f(x) = a$, для чего следует построить график функции g. Вначале попробуем обойтись без вычислений. Из формулы $g(t) = t^2 + \frac{2}{t}$ ясно, что

$$g(t) \to \pm\infty \text{ при } t \to \pm 0,$$

а при больших значениях $|t|$ график искомой функции близок к графику простой квадратичной функции. Таким образом похоже, что график функции g имеет такой вид, как это показано на рис. 213. Для того, чтобы в этом убедиться и заодно найти промежутки монотонности и точку минимума функции g, поступим стандартным образом.

Поскольку $g'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t^3-1)}{t^2}$, то $g'(t) \geqslant 0$ при $t \in [1; +\infty)$ и $g'(t) \leqslant 0$ при $t \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$. Значит, функция g возрастает на луче $[1; +\infty)$ и убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$. Точка A (см. рис. 213) имеет координаты $(1, 3)$. Кстати, из ответа к заданию пункта а) следует, что касательная $y = 3$ к графику в точке A имеет с этим графиком еще одну точку пересечения — $B(-2, 3)$.
в) *Ответ*: $\frac{1}{4} < a < 1$. Как и выше, сделаем замену $t = \log_2 x$ и положим дополнительно $b = f(a)$. Из графика функции g ясно, что уравнение $g(x) = b$ имеет единственное решение (а, значит, имеет единственное решение и уравнение $f(x) = b$) при $b < 3$, т. е. $f(a) < 3$. Снова обратившись к изображенному на рис. 213 графику функции g, получаем, что $-2 < \log_2 a < 0$.

Другой способ решения этой задачи связан с прямым исследованием (сводящегося к кубическому) уравнения $g(t) = g(c)$, которое, очевидно, имеет решение $t = c$. Поделив на $t - c$, получим квадратное уравнение, которое по условию или не имеет решений, или же имеет единственное решение $t = c$ (последний случай в действительности невозможен).

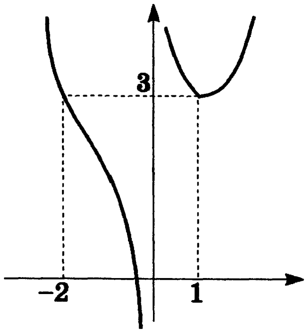

Рис. 213

г) *Ответ*: Один корень. Та же замена сводит уравнение $f(x) = f(2x)$ к виду $g(t) = g(t+1)$, из которого при помощи прямых пребразований получаем уравнение $t(t+1)(t+\frac{1}{2}) = 1$. Всякое кубическое уравнение имеет по крайней мере один действительный корень. Осталось показать, что в данном случае он действительно один, что опять-таки легче сделать при помощи исследования функции $y = t(t+1)(t+\frac{1}{2})$. (Кстати, удобно сделать дополнительную замену $u = t + \frac{1}{2}$, после чего уравнение примет вид $u(u^2 - \frac{1}{4}) = 1$.)

2. Вначале проделаем преобразования:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) =$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Далее для $f(x)$ будем использовать одно из следующих представлений: $f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + a\sin 2x$ или $f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x + a\sin 2x$.

а) *Ответ*: $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Сделав в уравнении $f(x) = 0$ замену $t = \sin 2x$ и воспользовавшись результатом проделанного преобразования, получим квадратное уравнение $6t^2 + 13t - 8 = 0$ с корнями $t = \frac{1}{2}$ и $t = -\frac{8}{3}$. Поскольку $|-\frac{8}{3}| > 1$, то $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

б) *Ответ*: $a = -\frac{5\pi}{16}$. Интегрируя, получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x\,dx = 0, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = 1,$$

поэтому $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = a + \frac{5\pi}{16}$. **в)** *Ответ*: $|a| \geqslant \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Поскольку функция $\sin 2x$ возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}]$, то монотонность f на нем равносильна монотонности квадратичной функции $g(t) = -\frac{3}{4}t^2 + at + 1$ на отрезке $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Следовательно, точка минимума $t = \frac{2a}{3}$ функции g не должна лежать внутри указанного отрезка, т. е. $|\frac{2a}{3}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **г)** *Ответ*: $\frac{5}{8}$. Самый простой способ решения этой задачи основан на том, что сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k\pi}{n})\frac{\pi}{n}$ является суммой Римана для интеграла $\int\limits_x^{x+\pi} f(x)\,dx$, следовательно, ее пределом является данный интеграл. Далее, поскольку подынтегральная функция π-периодична, то интеграл от нее по отрезку длины π не зависит от расположения этого отрезка на оси. Таким образом, искомый предел равен $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{5}{8}$.

Указанную сумму нетрудно вычислить и явно, использовав следующие два хорошо известных равенства:

$$\cos t + \cos(t+\alpha) + \ldots + \cos(t + (s-1)\alpha) = \frac{\sin\frac{s\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos(t + \tfrac{s-1}{2}\alpha),$$

$$\sin t + \sin(t+\alpha) + \ldots + \sin(t + (s-1)\alpha) = \frac{\sin\frac{s\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin(t + \tfrac{s-1}{2}\alpha).$$

3А. **а)** *Ответ*: $|c| < \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ или $|c| > \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Поскольку $x_2 = 2(2c^2-1)^2 - 1$, то искомые значения c — решения неравенства $(2c^2-1)^2 > \frac{1}{2}$, т. е. $2c^2 - 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $2c^2 - 1 < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **б)** Исходным моментом рассуждения является следующее преобразование: $x_{n+1} - x_n = 2x_n^2 - x_n - 1 = (x_n - 1)(2x_n + 1)$. Поэтому, если $x_n > 1$, то $x_{n+1} > x_n$. Для точного рассуждения можно воспользоваться методом математической индукции. Причем удобнее доказывать, что $x_n > 1$. По предположению $x_0 = c > 1$. Индукционный переход: из проведенного выше преобразования следует, что если $x_n > 1$, то $x_{n+1} > x_n > 1$. Поэтому все члены последовательности больше единицы, значит $x_{n+1} > x_n$, т. е. рассматриваемая последовательность — монотонно возрастающая. **в)** *Ответ*: Наибольшее число последовательных членов данной последовательности, которые могут образовывать конечную арифметическую прогрессию, равно трем, а первый из них должен быть равен $\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{13})$. Действительно, числа x_{n-1}, x_n, x_{n+1} являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, если $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$. Воспользовавшись равенствами $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ и $x_n = 2x_{n-1}^2 - 1$, получим, что $x_{n+1} - x_n = 2(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$, следовательно,

$$2(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_n - x_{n-1}.$$

Поскольку по условию прогрессия не должна быть постоянной, то $2(x_n + x_{n-1}) = 1$, откуда $4x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} - 3 = 0$, Тем самым $x_{n-1} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{13})$. Так как при найденных значениях x_{n-1} имеем $x_n \neq \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{13})$, то числа x_n, x_{n+1}, x_{n+2} не будут последовательными членами никакой арифметической прогрессии. **г)** Попробуйте понять, каким образом можно догадаться до следующего рассуждения. Если $c = \cos\frac{2\pi}{2^n+1}$, то $x_n = \cos\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1} = c$, причем $x_k \neq c$ при $0 < k < n$. Следовательно данная последовательность имеет число n (произвольное!) своим периодом.[3]

3Б. а) *Ответ*: $p = 15$. По определению вероятность успешного ответа равна отношению числа способов выбора двух вопросов из тех, ответы на которые ему известны, к числу способов выбора двух вопросов из 16 вынесенных на зачет. Число способов выбора двух предметов из k различных равна биномиальному коэффициенту $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ — *числу сочетаний из k по 2*. Таким образом, если ученик знает ответы на p вопросов (причем по условию $p < 16$), то вероятность его успешного ответа на оба поставленных вопроса равна

$$\frac{C_p^2}{C_{16}^2} = \frac{p(p-1)}{15 \cdot 16} \geqslant \frac{7}{8},$$

значит, $p^2 - p - 210 = (p - 15)(p + 14) \geqslant 0$, откуда и следует ответ. **б)** *Ответ*: $p = 6; 10$. Этот вопрос немногим сложнее предыдущего. Однако в нем имеется следующая психологическая трудность: неискушенному учащемуся может показаться очевидным, что в данных условиях ученик выучил ответы на половину из общего числа вопросов, и так и написать в своем

[3]См. другое решение в статье автора “Современная математика в школьных задачах” (*Соросовский образовательный журнал*, 2000, вып. 6, с. 110–116).

решении, сославшись на некую “симметрию”. Однако это “очевидное” — неверно.

Если ученик знает ответы на p вопросов, то выбрать пару вопросов, из которых ответ на один ему известен, а ответ на второй — нет, он может $p(16-p)$ способами. Поэтому

$$\frac{p(16-p)}{C_{16}^2} = \frac{1}{2} \text{ откуда } p^2 - 16p + 60 = 0.$$

в) *Ответ*: $0 < p < 8$. Вероятность того, что он знает один случайно выбранный им вопрос, равна $\frac{p}{16}$. Число вариантов выбора им трех вопросов, ответы по крайней мере на два из которых ему известны, равно $C_p^3 + C_p^2 \cdot C_{16-p}^1$. Поэтому условие задачи записывается неравенством

$$\frac{C_p^3 + C_p^2 \cdot C_{16-p}^1}{C_{16}^3} = \frac{p(p-1)(23-p)}{7 \cdot 15 \cdot 16} < \frac{p}{16}$$

т. е. (после преобразований) $p(p^2-24p+128) = p(p-8)(p-16) > 0$.
г) *Ответ*: $\frac{32}{143}$. Решим задачу в общем виде. Вначале подсчитаем число способов разбить $2n$ вопросов по n занумерованным билетам. Поскольку вопросы для первого билета можно выбрать C_{2n}^2 способами, для второго — C_{2n-2}^2 способами, и так далее, то общее число вариантов равно

$$\frac{2n(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\dots\frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n!(2n-1)!!\,.$$

Предположим теперь, что ученик знает ответы на p вопросов и найдем число “удачных” для него способов распределения $2n$ вопросов по n билетам (здесь, конечно, $p \geqslant n$). Расставим вначале n вопросов из p известных по n билетам; это можно сделать $A_p^n = \frac{p!}{(p-n)!}$ способами. Оставшиеся n вопросов произвольным образом расставляем по билетам, что можно осуществить $n!$ способами. В итоге имеем $\frac{p!n!}{(p-n)!}$ вариантов, однако необходимо учесть, что у нас окажется $p-n$ билетов, ответы на оба вопроса в каждом из которых ученику известны, и такие билеты мы сосчитали дважды. Поэтому число удачных вариантов равно $\frac{p!n!}{2^{p-n}(p-n)!}$, а искомая вероятность есть

$$\frac{p!}{2^{p-n}(p-n)!(2n-1)!!}.$$

Подставив $p = 10$, $n = 8$, получим ответ.

3В. Конечно, можно записать, что $\varepsilon = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, однако всюду в дальнейшем нам потребуются лишь следующие два свойства этого числа:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg}\varepsilon = \pm\tfrac{2\pi}{3}.$$

Первое из них следует из разложения $\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(1+\varepsilon+\varepsilon^2) = 0$, второе — из того, что ε — отличный от 1 кубический корень из 1.

а) Если $a = 0$ и $u = 0$, то $b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$, откуда $b = c(-\varepsilon)$. Следовательно, точка B получена из точки C поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат, совпадающего с вершиной A этого треугольника. Поэтому он — равносторонний. **б)** Пусть произведен параллельный перенос на вектор, определяемый комплексным числом z. Тогда

$$u' = a + z + (b + z)\varepsilon + (c + z)\varepsilon^2 = u + z(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = u.$$

Постоянство числа v проверяется аналогично. **в)** В силу предыдущего пункта мы вправе считать, что точка A совпадает с началом координат, так что $a = 0$. Если треугольник ABC — равносторонний, то точка B получается из точки C поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ в одном из двух направлений, значит одно из чисел b и c получается из другого умножением на $-\varepsilon$, поэтому либо $b = c(-\varepsilon)$, либо $c = b(-\varepsilon)$, т. е. $uv = 0$. Для доказательства обратного утверждения надо просто проследить, что все рассуждения можно провести в обратном направлении (ср. с решением первого пункта). **г)** *Ответ*: Круг радиусом 3 с центром в начале координат. Опять-таки в силу пункта б) мы вправе предположить, что единичный круг имеет O своим центром. Следовательно $|a|, |b|, |c| \leqslant 1$, откуда $|u| \leqslant 3$. Обратно, если положить $b = \varepsilon^2 a$, $c = \varepsilon a$, где $|a| \leqslant 1$, то $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 3a$, поэтому любое комплексное число u, где $|u| \leqslant 3$, является значением суммы $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2$ для некоторой тройки чисел $|a|, |b|, |c|$. модуль каждого из которых не превосходит единицы.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \log_x^2 3 + \log_{1/3} 3x^2$.

   а) Решите уравнение $f(x) = 2$.

б) Решите неравенство $f(x) \geqslant -2$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет три решения.

г) Определите число корней уравнения $f(\frac{x}{3}) = f(x)$.

2. Дана функция $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 2a\cos^2 x$.

а) Пусть $a = -\frac{7}{8}$. Найдите корни функции f.

б) Найдите все a, такие что $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 0$.

в) Найдите все a, при которых функция f монотонна на отрезке $[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}]$.

г) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k\pi}{n} - x)$.

1. **а)** $x = \sqrt{3}; \frac{1}{3}$. **б)** $(0;1) \cup (1;3]$. **в)** $a \in (0;\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3};1) \cup (1;\sqrt{3})$. **г)** Два корня. **2.** **а)** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** $a = -\frac{5\pi}{8(\pi+2)}$. **в)** $|a| \geqslant \frac{3}{2\sqrt{2}}$. **г)** $a + \frac{5}{8}$.

1998

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \log_{x+1} ax$.

а) Известно, что $x = 1$ — корень уравнения $f(x) = 3$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.

б) Пусть $a = \frac{9}{2}$. Решите неравенство $f(x) \geqslant f(\frac{1}{x})$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение.

г) Докажите, что если уравнение $f(x) = n+1$ (n — натуральное) имеет положительный корень, то $a > ne$.

2. Дана функция $f(x) = \sin ax \sin x$.

а) Пусть $a = 3$. Решите уравнение $\dfrac{f(2x)}{f(x)} = -2$.

б) Найдите все a, при которых $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx \geqslant 0$.

в) Пусть x_a — наименьший положительный корень уравнения $f(x) = \cos x$. Найдите наименьшее значение x_a.

г) Найдите все a, при которых $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ при всех $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

3А. Даны многочлены $p(x) = ax^{1998} + b$ и $q(x) = cx^{1917} + d$, $a \neq 0$.

а) Найдите наибольшее возможное число действительных корней уравнения $p(x) = q(x)$.

б) Пусть $a = 71$, $b = 3$, $c = 74$ и $d = 0$. Решите уравнение $p(x) = q(x)$.

в) Пусть $b = 0$, $c = 1$. Найдите все целые a, d, при которых число $p(n)$ делится на $q(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

г) Пусть $d = 0$. Найдите все целые a, b, c, при которых разность $p(n) - q(n)$ делится на $(n-1)^2$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

3Б. Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Двое людей по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй из них может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

3В. Дан многочлен $p(z) = z^3 + az + b$, $a, b, z \in \mathbb{C}$.

а) Пусть $a = -i$, $b = 1 - i$. Найдите корни многочлена $p(z)$ (и запишите их в алгебраической форме).

б) Найдите все пары (a, b), при которых один из корней многочлена $p(z)$ совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и в следующем пункте мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

в) Найдите все пары (a, b), при которых корни многочлена $p(z)$ лежат в вершинах равностороннего треугольника.

г) Докажите, что если $|p(z)| \leqslant 1$ при всех $|z| = 1$, то $a = b = 0$.

1. а) *Ответ*: $a = 8$, $x = \sqrt{5} - 2$. Ясно, что если $x = 1$ — корень, то $a = 8$. Далее, $8x = (x+1)^3$, поделив на $x - 1$, получим уравнение $x^2 + 4x - 1$, у которого следует взять только его положительный корень. **б)** *Ответ*: $[\frac{1}{2}; 1] \cup [2; +\infty)$. После несложных преобразований получаем неравенство $\log_{9/2} x(\log_{9/2} x - 2\log_{9/2}(x+1) + 1) \leqslant 0$. **в)** *Ответ*: $a < 0$; $a = \frac{27}{4}$. См. график функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x}$, $x > -1$. **г)** Наименьшее значение функции $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{x}$ на луче $(0; +\infty)$ равно $n(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > ne$.

2. **а)** *Ответ*: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Произведя сокращение, получим уравнение $2\cos 3x\cos x=-1$, или $\cos 2x(2\cos 2x+1)=0$. Осталось учесть, что $x\neq\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **б)** *Ответ*: $[0;2]\cup[2n-1;2n]$, где $n\geqslant 2$ или $n\leqslant -1$. Случаи $a=0$; ±1 надо рассмотреть отдельно; при других значениях a после интегрирования получаем неравенство $\frac{\sin(a\pi)}{a^2-1}\leqslant 0$. **в)** *Ответ*: $\frac{\pi}{4}$. Поскольку $f(x)\leqslant\sin x<\cos x$ при $x\in(0;\frac{\pi}{4})$, то наименьшим корнем может быть лишь $x=\frac{\pi}{4}$; к примеру, при $a=2$. **г)** *Ответ*: $[1;\frac{5}{3}]$. Прежде всего заметим, что множитель $\sin ax$ не должен обращаться в ноль на отрезке $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$, откуда следует, что $|a|\frac{\pi}{4}<\pi$, таким образом, $|a|<4$. Далее, подставив $x=\frac{\pi}{4}$, получаем, что должно иметь место неравенство $\sin\frac{a\pi}{4}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда следует, что $1+8k\leqslant a\leqslant 3+8k$, $k\in\mathbb{Z}$. Учитывая ограничение $|a|<4$, получаем, что $a\in[1;3]$. Наконец, исследовав аналогичным образом неравенство, получающееся при подстановке $x=\frac{\pi}{2}$, имеем в результате, что $a\in[1;\frac{5}{3}]$. Осталось показать, что для любого $a\in[1;\frac{5}{3}]$ неравенство $\sin ax\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ верно для всех $x\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$. Фиксируем некоторое x из данного отрезка и рассмотрим функцию $h(a)=\sin ax\sin x$, $a\in[1;\frac{5}{3}]$. Так как при этом $ax\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}]$, то функция h выпукла вверх, следовательно, ее наименьшее значение достигается на одном из концов отрезка $[1;\frac{5}{3}]$. Поэтому достаточно проверить неравенства $\sin^2 x\geqslant\frac{1}{2}$ (которое очевидно верно при $x\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$) и неравенство $\sin\frac{5x}{3}\sin x\geqslant\frac{1}{2}$. Замена $z=\cos\frac{2x}{3}$ в последнем неравенстве приводит к неравенству $2(2z^2-1)^2\leqslant z$, $z\in[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Нетрудно видеть, что функция $y=2(2z^2-1)^2$ выпукла, поэтому это неравенство достаточно проверить в крайних точках отрезка.

3. **а)** *Ответ*: Два корня. Действительно, нетрудно видеть, что функция $f(x)=ax^{1998}-cx^{1917}+b$ имеет не более одной точки, в которой меняется характер ее монотонности. **б)** *Ответ*: $x=1$. Если $f(x)=71x^{1998}-74x^{1917}+3$, то $f'(x)=71\cdot74\cdot27(x^{1997}-x^{1916})$, поэтому $x=1$ — точка минимума функции f, а $f(1)=0$. **в)** *Ответ*: $a\in\mathbb{Z}, d=0$. *Первое решение.* Возьмем простое число $n>d$. По условию n^{1998} должно делиться на $n^{1917}+d$, таким образом, число $n^{1917}+d$ должно иметь n своим делителем, чего быть не может. *Второе решение.* Пусть $an^{1998}=s(n)(n^{1917}+d)$, где $s(n)$ — целое. Ясно, что $s(n)\leqslant Mn^{81}$. Перейдем теперь к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $an^{81}-s(n)=ds(n)n^{-1917}$. Число, стоящее в его левой части — целое, между тем его правая часть стремится к нулю. Значит, $d = 0$. **г)** *Ответ*: $(a, b, c) = (71k, 3k, 74k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что достаточно потребовать, чтобы многочлен $p(x) - q(x)$ делился на $(x-1)^2$, таким образом, $x - 1$ должно быть корнем кратности, не меньшей двух многочлена $p(x) - q(x)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $p(1) = q(1)$ и $p'(1) = q'(1)$. Получаем, что $d = 1998a - 1917c$ и $1998a = 1917c$, откуда и следует ответ. Однако, то, что условие делимости на $(x-1)^2$ является также и необходимым, не столь уж очевидно. Докажите следующее утверждение (см. второе решение предыдущего пункта данной задачи).

Лемма. Пусть $p(x), q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, про которые известно, что число $p(n)$ делится на $q(n)$ для любого натурального n. Тогда многочлен $p(x)$ делится на $q(x)$ над $\mathbb{Q}$ (т. е. их частное является многочленом с рациональными коэффициентами).

3Б. а) *Ответ*: $\frac{1}{8}$. Действительно, вероятность того, что одна пара противоположных граней раскрашена в противоположные цвета, равнв $\frac{1}{2}$, а таких пар три. **б)** *Ответ*: Десять раскрасок. Действительно, имеется по одной раскраске с числом белых граней, равным 0,1,5 или 6, и по две раскраски, если таковых граней 2,3 или 4. **в)** Второй может действовать по следующему алгоритму: он раскрашивает грань, противоположную той, которую перед этим закрасил первый человек, причем он красит ее противоположным цветом. **г)** *Ответ*: $\frac{147}{1024}$. Если вам удалось получить это число, то “с вероятностью 1” вы рассуждали правильно!

3В. а) $-1, -i, 1+i$. **б)** *Ответ*: $b = 0$, a любое. По условию $z_1 + z_2 = 2z_3$, в силу формул Виета $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, поэтому $z_3 = 0$, значит, $b = 0$. **в)** *Ответ*: $a = 0$, $b \neq 0$. *Первое решение.* Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то центр треугольника совпадает с началом координат, поэтому $z_j = c(\cos\frac{2\pi j}{3} + \sin\frac{2\pi j}{3})$. Прямая проверка показывает, что $a = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$. *Второе решение.* Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то из условия, что эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольник, следует, что они являются корнями уравнения $z^3 = b_1$. Следовательно, они также и корни уравнения $az + b + b_1 = 0$, которое тем самым имеет по крайней три различных корня. Значит, $a = 0$. **г)** Пусть

$z = \cos\varphi + \sin\varphi$. Тогда

$$|p(z)|^2 = 1+|a|^2+|b|^2+(a_1\cos 2\varphi+a_2\sin 2\varphi)+(b_1\cos 3\varphi+b_2\sin 3\varphi) + (a\overline{b}z + \overline{a}b\overline{z}) \geqslant 1 + (a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi) + (b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi).$$

Осталось показать, что если $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, то найдется решение системы неравенств

$$\begin{cases} a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi \geqslant 0, \\ b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi \geqslant 0, \end{cases}$$

для которого хотя бы одно из этих неравенств является строгим (тогда $|p(z)| > 1$!). Действительно, если $a_1\cos 2\varphi_0 + a_2\sin 2\varphi_0 > 0$, то и $a_1\cos 2(\varphi_0+\pi) + a_2\sin 2(\varphi_0+\pi) > 0$. С другой стороны, при подстановке φ_0 и $\varphi_0+\pi$ во второе выражение получаем значения противоположных знаков.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \log_{1-x}\frac{a}{x}$.
   а) Известно, что $x = \frac{1}{2}$ — корень уравнения $f(x) = 2$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.
   б) Пусть $a = -\frac{3}{16}$. Решите неравенство $f(x) \geqslant f(\frac{1}{x})$.
   в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 2$ имеет единственное решение.
   г) Докажите, что если уравнение $f(x) = n$ (n — натуральное) имеет положительный корень, то $na < e^{-1}$.
2. Дана функция $f(x) = \cos ax \cos x$.
   а) Пусть $a = 2$. Решите уравнение $\dfrac{f(3x)}{f(x)} = 1$.
   б) Найдите все a, при которых $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx \geqslant 0$.
   в) Пусть x_a — ближайший к $\frac{\pi}{2}$ корень уравнения $f(x) = \sin x$. Найдите наименьшее значение $|x_a - \frac{\pi}{2}|$.
   г) Найдите все a, при которых $f(x) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ при всех $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$.

1. а) $a = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{4}(3-\sqrt{5})$. **б)** $[-3;-1] \cup [-\frac{1}{3};0)$. **в)** $a < 0$; $a = \frac{4}{27}$.
2. а) $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. **б)** $a \in [-2;2]$ или $|a| \in [2n-1; 2n]$, $n \geqslant 2$. **в)** $\frac{\pi}{4}$. **г)** $[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}]$.

1999

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2^x - ax$.

   а) Решите неравенство $f(3x) \geqslant f(2x) + f(x)$.

   б) Найдите все a, при которых уравнение $f(2x) = f(x)+f(x+1)$ имеет единственное решение.

   в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Решите уравнение $\sqrt{f(x)} + x = 0$.

   г) Пусть $a = 1$. Найдите с точность до 0,03 положительный корень уравнения $f(x) = 1024$.

2. Дана функция $f(x) = \cos^3 x + a\cos^2 x \sin x + b\cos x \sin^2 x + \sin^3 x$.

   а) Найдите a и b, если известно, что числа $\pm\frac{\pi}{4}$ являются корнями функции f.

   б) Пусть $a = b = -1$. Решите неравенство $f(x) \leqslant 0$.

   в) Пусть $b = -3$. Решите уравнение $f(x) = \cos 3x$.

   г) Найдите все пары (a, b), при которых период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$.

3А. Комплексное число $z = a + bi$ называется *гауссовым*, если a и b — целые числа. Говорят, что гауссово число z *кратно* числу w, если $z = wu$, где w и u — гауссовы числа. Пусть $\mathcal{K}$ — множество всех гауссовых чисел, кратных $1 + 2i$.

   а) Найдите все натуральные a, такие что $a \leqslant 20$ и $2 + ai \in \mathcal{K}$.

   б) Докажите, что если $z \in \mathcal{K}$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то z кратно $3 - i$.

   в) Существуют ли числа $u, v \in \mathcal{K}$, такие что $\arg\frac{u}{v} = \frac{\pi}{8}$?

   г) Докажите, что для всякого гауссова числа z найдется число $w \in \mathcal{K}$, такое что $|z - w| \leqslant 1$.

3Б. Будем считать, что Земля имеет форму шара радиусом $R = 6400$ км. Известно, что радиоволны, на которых ведется телевещание, распространяются по прямой. Предположим, что телепередатчик расположен на высоте h от земной поверхности. Обозначим через $l(h)$ расстояние по поверхности Земли от основания телебашни (или от той точки Земли, которая расположена ближе всего к ретрансляционному спутнику) до самой дальней точки, в которой возможен прием телепередачи.

   а) Найдите наименьшее значение h, при котором прием возможен во всех точках некоторого меридиана севернее 60° ю.ш. и южнее 60° с.ш., если спутник висит над экватором?

б) Докажите, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{l(h)}{\sqrt{2Rh}} = 1$.

в) Предположим, что передатчик размещен на Луне (т. е. на расстоянии 400 000 км от центра Земли). Покажите, что в этом случае $l(h)$ меньше четверти длины экватора по крайней мере на 100 км.

г) Для того, чтобы обеспечить связь между двумя пунктами, расположенными на расстоянии 1600 км друг от друга, решено построить радиорелейную линию. Докажите, что если высота мачт этой линии равна 31,25 м, то потребуются не менее 41 таких мачт.

3В. Пусть $p_n(x)$ — многочлен степени n.

а) Известно, что числа 3 и 7 являются корнями многочлена $p_2(x)$ и что $p_2'(3) = 11$. Найдите $p_2'(7)$.

б) Известно, что числа 1 и 2 являются корнями многочлена $p_3(x)$. Пусть $p_3'(1) = k$ и $p_3'(2) = l$, причем $kl > 0$. Докажите, что число, делящее отрезок $[1; 2]$ в отношении $k : l$, является третьим корнем этого многочлена.

в) Пусть $p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Найдите все a, при которых многочлен $p_3(x) + ax$ имеет ровно два действительных корня.

г) Пусть $p_{1000}(x) = x(x-2)\ldots(x-1998)$. Найдите все $a \geqslant 0$, при которых уравнение $p_{1000}(x) = a$ имеет 1000 различных действительных корней.

1. а) *Ответ*: $[\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$. Замена $t = 2^x$ приводит к неравенству $t^2 - t - 1 \geqslant 0$. **б)** *Ответ*: $a = \frac{9}{4}$; $a \leqslant 0$. Замена $t = 2^x$ приводит к уравнению $t^2 - 3t + a = 0$. Это уравнение имеет единственное положительное решение или когда дискриминант квадратичного трехчлена равен нулю, или же если одно из его решений неположительно. **в)** *Ответ*: -1. Возведя обе части в квадрат, получим уравнение $2^x = x^2 + \frac{x}{2}$ при дополнительном условии $x \leqslant 0$. Если $x \leqslant 0$, то функция $x^2 + \frac{x}{2}$ положительна при $x \leqslant -\frac{1}{2}$. Заметим, что на этом луче квадратичная функция убывает, а функция $y = 2^x$ возрастает, поэтому уравнение имеет не более одного корня, каковым и является $x = -1$.

г) *Ответ*: 10. Поскольку функция $y = 2^x - x - 1024$ выпукла, то она имеет не более двух корней, один из которых отрицателен, Ясно, что в интервале $(10; 11)$ есть положительный корень. Перепишем уравнение в равносильной форме $x = \log_2(x + 1024)$.

Имеем

$$x - 10 = \log_2(1 + \frac{x}{1024}) < \frac{x}{1024\ln 2} < \frac{11}{512\ln 4} < \frac{11}{512} < 0{,}03.$$

2. **а)** *Ответ*: $a = b = -1$. Подставив $x = \frac{\pi}{4}$, получим уравнение $a + b + 2 = 0$, подставив $x = -\frac{\pi}{4}$ — уравнение $a = b$. **б)** *Ответ*: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; [\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем:

$$\begin{aligned} &\cos^3 x - \cos^2 x \sin x - \cos x \sin^2 x + \sin^3 x = \\ &\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &(\cos x - \sin x)^2(\cos x + \sin x) \leqslant 0, \end{aligned}$$

откуда $\cos x = \sin x$ или $\cos x + \sin x \leqslant 0$. **в)** *Ответ*: πk при любом a; $\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \pi k$ при $a < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$, получаем уравнение $\sin x((a-1)\cos^2 x + 1) = 0$. Уравнение $\cos^2 x = \frac{1}{1-a}$ имеет решение лишь при $a \leqslant 0$. **г)** *Ответ*: $a = b = -3$. Действительно, если $a = b = -3$, то $f(x) = \cos 3x - \sin 3x$ — функция периода $\frac{2\pi}{3}$. Для того, чтобы показать, что других значений нет, рассмотрим уравнения $f(0) = f(\frac{2\pi}{3})$ и $f(\pi) = f(\frac{\pi}{3})$. В результате получим систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{8}(a+3) - \frac{3}{8}(b+3) = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{8}(a+3) + \frac{3}{8}(b+3) = 0, \end{cases}$$

из которой и следует ответ.

3А. **а)** *Ответ*: $a = 4; 9; 14; 19$. Пусть $z = \frac{2+ai}{1+2i}$. Тогда $z = \frac{1}{5}(2+ai)(1-2i) = \frac{1}{5}(2 + 2a + i(a-4)) \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда число $a - 4$ делится на 5. **б)** Имеем: $z = (x+iy)(1+2i) = x - 2y + i(y + 2x)$. Поскольку $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то $x - 2y = 2x + y$, так что $x = -3y$ и $z = -(3-i)(1+2i)y$. **в)** *Ответ*: Нет, не существуют. Если $z = \frac{u}{v}$, где $u, v \in \mathcal{K}$, то $z = a + ib$, где a и b — рациональные числа, поэтому и число $|z|^2$ рационально. Если $z = |z|(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$, то $z^2 = |z|^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, чего не может быть, так как число $\cos\frac{\pi}{4}$ иррационально.

г) Если $w \in \mathcal{K}$, то $w = (x+iy)(1+2i) = x(1+2i) + y(i-2)$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. Если $z \notin \mathcal{K}$, то найдется такое число $w \in \mathcal{K}$, что $z - w$ - это одно из чисел $i; 2i; -1+i; -1+2i$ (см. рис. 214), расстояние от

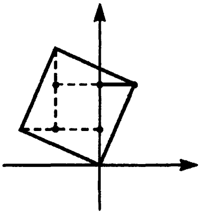

Рис. 214

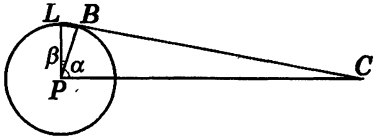

Рис. 215

каждого из которых до одной из вершин квадрата $OABC$ равно 1.

3Б. а) *Ответ*: $h \geqslant R = 6400$ км. Поскольку по условию $\alpha \geqslant 60°$ (см. рис. 215), то $PC = R + h = \frac{R}{\cos\alpha} \geqslant 2R$.

б) Имеем $l(h) = R\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{PL}{PC} = \frac{\sqrt{2Rh+h^2}}{R+h}$. Если $h \to 0$, то $\sin\alpha \to 0$ и $\alpha \to 0$. Поэтому

$$\lim_{h\to 0} \frac{l(h)}{\sqrt{2Rh}} = \lim_{h\to 0} \frac{R\sin\alpha}{\sqrt{2Rh}} = \lim_{h\to 0} \frac{R\sqrt{2Rh+h^2}}{(R+h)\sqrt{2Rh}} = 1.$$

в) В задаче требуется доказать, что длина дуги BL (рис. 215) не меньше 100 км. Имеем:

$$R\beta > R\sin\beta = R\cos\alpha = \frac{R^2}{PC} = \frac{2^{12}\cdot 10^4}{4\cdot 10^5} = \frac{2^{10}}{10} > 100.$$

г) Заметим, что $\sqrt{2Rh} = \sqrt{6400\cdot 624\cdot 10^{-4}} = \sqrt{2^6\cdot 5^4\cdot} = \sqrt{2^2\cdot 10^2} = 20$ км. Обозначим через s наименьшее расстояние между основаниями мачт. Ясно, что $s = 2l(h) = 2R\alpha$. Поскольку $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, то $2R\sin\alpha < 2R\alpha < 2R\operatorname{tg}\alpha$, таким образом

$$\frac{2R\sqrt{2Rh+h^2}}{R+h} < s < 2\sqrt{2Rh+h^2}.$$

Нетрудно прямо проверить, что число $2\sqrt{2Rh}$ тоже лежит в интервале между этими числами. Пусть $S = 1600$ км. Имеем:

$$\frac{S}{2\sqrt{2Rh+h^2}} < \frac{S}{s} < \frac{S(R+h)}{2R\sqrt{2Rh+h^2}}.$$

Оценим следующую разность:

$$\frac{S(R+h)}{2R\sqrt{2Rh+h^2}} - \frac{S}{2\sqrt{2Rh+h^2}} =$$

$$\frac{Sh}{2R\sqrt{2Rh+h^2}} \leqslant \frac{h\pi}{2\sqrt{2Rh+h^2}} < \frac{h\pi}{\sqrt{2Rh}} = \pi\sqrt{\frac{h}{2R}},$$

что значительно меньше единицы. Отсюда следует, что число участков на дуге длиной 1600 км между соседними мачтами не меньше, чем $\left[\frac{S}{2\sqrt{2Rh}}\right] = 40$. Таким образом, нужна по меньшей мере 41 такая мачта.

3В. а) *Ответ*: -11. Если $p_2(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, то $p_2'(x_2) = a(x_2-x_1) = -p_2'(x_1)$. б) Пусть $p_3(x) = q(x)(x-t)$, где $q(1) = q(2) = 0$. Поскольку $p_3'(1) = q'(1)(1-t)$ и $p_3'(2) = q'(2)(2-t)$, то $-\frac{k}{l} = \frac{1-t}{2-t}$, так что $\frac{t-1}{2-t} = \frac{k}{l}$. в) *Ответ*: $a = -\frac{15}{4}$. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения $x^3 - 3x^2 + ax - 1 = 0$, то его можно записать в виде $\frac{1}{x} + 3x - x^2 = a$. Исследуем функцию $f(x) = \frac{1}{x} + 3x - x^2$ и построим ее график. Поскольку

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 3 - 2x = -\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2},$$

то эта функция убывает на промежутках $[-\frac{1}{2}; 0)$ и $(0; +\infty)$, возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ и $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$. г) *Ответ*: $0 \leqslant a < (999!!)^2$. Докажем вначале два следующих утверждения.

1. Наибольшее значение многочлена $p_{1000}(x)$ на отрезке $[998; 1000]$ равно $p_{1000}(999) = (999!!)^2$.

2. Наибольшее значение многочлена $p_{1000}(x)$ на каждом из отрезков $[4k-2; 4k]$, $k = 1, 2, \dots, 499$ ($k \neq 250$) больше, чем $(999!!)^2$.

Доказательство 1: Сделав замену $t = x - 999$, получим, что $p_{1000}(x) = q(t) = (1-t^2)(9-t^2)\dots(999^2-t^2)$, поэтому многочлен $q(t)$ возрастает на $[-1; 0]$ и убывает на $[0; 1]$.

Доказательство 2: Нетрудно видеть, что $p_{1000}(4k-1) > p_{1000}(999)$. К примеру,

$$p_{1000}(1003) = 1003 \cdot 1001 \dots 1 \cdot (-1) \cdot (-995) = \\ \frac{1003 \cdot 1001}{997 \cdot 999} p_{1000}(999) > p_{1000}(999).$$

Теперь ответ следует из того, что многочлен $p_{1000}(x)$: неотрицателен на каждом из отрезков $[4k-2; 4k]$, $k = 1, 2, \dots, 500$; обращается в ноль в их концах; наименьшее из его наибольших значений на этих отрезках равно $(999!!)^2$.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = ax - 3^x$.

а) Решите неравенство $f(3x) \geqslant f(2x) + f(x)$.
б) Найдите все a, при которых уравнение $f(2x) = f(x) + f(x+1)$ имеет единственное решение.
в) Пусть $a = \frac{2}{3}$. Решите уравнение $\sqrt{-f(x)} = -x$.
г) Пусть $a = 1$. Найдите с точность до 0,01 положительный корень уравнения $f(x) = -729$.

2. Дана функция $f(x) = \cos^3 x - a\cos^2 x \sin x + b\cos x \sin^2 x - \sin^3 x$.
а) Найдите a и b, если известно, что числа $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ являются корнями функции f.
б) Пусть $a = b = -1$. Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.
в) Пусть $a = -3$. Решите уравнение $f(x) = \sin 3x$.
г) Найдите все пары (a, b), при которых период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$.

1. а) $(-\infty; \log_3 \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$. **б)** $a = 4$, $a \leqslant 0$. **в)** -1. **г)** 6.
2. а) $a = b = -1$. **б)** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. **в)** $\frac{\pi}{2} + \pi k$, при любом b; $\pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{1-b}} + \pi k$ при $b < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. **г)** $a = b = -3$.

2000

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \log_2(2^x + a)$.
а) При каком a прямая $y = \frac{x+1}{2}$ касается графика функции f?
б) Докажите, что $f(0) \leqslant \frac{a}{\ln 2}$.
в) Пусть $a = \frac{1}{2}$. Сколько решений (в зависимости от b) имеет уравнение $f(x) = \frac{x}{2} + b$?
г) Пусть $a > 0$ и $t > 0$. Докажите, что $\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| < 4a$.

2. Дана система $4\cos x - 3\cos y = a$, $4\sin x + 3\sin y = b$.
а) Решите систему при $a = b = 0$.
б) Решите систему при $a = 3, b = 4$.
в) Найдите наибольшее значение площади четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 1, 3, 1 и 4.
г) Изобразите на плоскости множество всех точек $M(a, b)$, таких что данная система имеет решение.

3А. Пусть $p(z) = z^2 + az + b$, $z \in \mathbb{C}$. В следующих далее формулировках мы для краткости будем отождествлять комплексные числа с их изображениями как точек плоскости.

а) Пусть $b = 1$. Верно ли, что при всех $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leqslant 2$, корни многочлена $p(z)$ лежат на единичной окружности?

б) Пусть $b = 1$, $a \in \mathbb{C}$ и $|a| \leqslant 1$. Найдите наименьшее значение модуля разности корней многочлена $p(z)$.

в) Пусть z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, — вершины квадрата с центром u. Докажите, что $\sum_{k=1}^{4} p(z_k) = 4p(u)$.

г) Пусть m — наибольшее значение $|p(z)|$ при $|z| = 1$. Докажите, что $|p(z)| \leqslant m$ при всех $|z| \leqslant 1$.

3Б. Рассматриваются последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых $x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$, $n \geqslant 1$.

а) Пусть $x_0 = \frac{1}{2}$. Вычислите x_{2000}.

б) Докажите, что если $x_0 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ монотонна.

в) Найдите множество C_0 всех чисел, которые не могут являться начальными членами x_0 таких (бесконечных) последовательностей.

г) Найдите множество начальных членов x_0 монотонных последовательностей $\{x_n\}$.

3В. Некоторое устройство может находится в одном из трех состояний (обозначаемых далее a, b и c). Если оно в некоторый момент находится, к примеру, в состоянии a, то через одну секунду оно перейдет в одно из состояний b или c (вероятность перехода в каждое из которых равна $\frac{1}{2}$). Обозначим через $p_n(x)$, где $x \in \{a, b, c\}$, вероятность того, что через n секунд устройство будет находится в состоянии x; в начальный момент оно находится в состоянии a.

а) Вычислите $p_3(x)$, $x \in \{a, b, c\}$.

б) Может ли при некотором n вероятность $p_n(x)$, $x \in \{a, b, c\}$, быть равной $\frac{1}{3}$?

в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = \frac{1}{3}$.

г) Докажите, что утверждение, сформулированное в предыдущем пункте, равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k \equiv i \pmod 3} C_n^k = \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, 2.$$

1. а) *Ответ*: $a = \frac{1}{2}$. Если прямая $y = \frac{x+1}{2}$ касается графика данной функции в точке с абсциссой t, то $f'(t) = \frac{1}{2}$ и $2f(t) = t + 1$, откуда $\frac{2^t}{2^t+a} = \frac{1}{2}$ и $2\log_2(2^t + a) = t + 1$. Из первого уравнения следует, что $a = 2^t$, значит $2(t + 1) = t + 1$, откуда $t = -1$. **б)** Неравенство $\log_2(1+a) \leqslant \frac{a}{\ln 2}$ равносильно известному неравенству $\ln(1+a) \leqslant a$, для доказательства которого введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = t - \ln(1 + t)$. Так как $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$, то $t = 0$ — точка минимума. Значит, $\varphi(t) \geqslant \varphi(0) = 0$. **в)** *Ответ*: одно решение при $b = \frac{1}{2}$, два — при $b > \frac{1}{2}$, не имеет решений при $b < \frac{1}{2}$. Сделав в данном уравнении замену $t = 2^{x/2}$ и перейдя к соответствующему показательному уравнению, в котором для краткости записи положим $c = 2^b$, получим уравнение $t^2 + \frac{1}{2} = ct$, у которого нам надо исследовать число его положительных решений. Дискриминант $c^2 - 2$ полученного уравнения положителен при $c > 2^{1/2}$. **г)** Имеем:

$$\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| = \left|\int_0^t (f(x) - x)\,dx\right| = \\ = \int_0^t \log_2(1 + a2^{-x})\,dx \leqslant \frac{1}{\ln 2}\int_0^t a2^{-x}\,dx = \\ = \frac{a}{\ln^2 2}(1 - 2^{-t}) < \frac{a}{\ln^2 2} < 4a,$$

так как $\ln 4 > 1$.

2. **а)** *Ответ*: Решений нет. Действительно, возведя в квадрат обе части каждого из уравнений системы $4\cos x = 3\cos y$, $4\sin x = -3\sin y$, и сложив полученные в результате уравнения, получим, что $4 = 3$. **б)** *Ответ*: $(x, y) = (\arcsin\frac{7}{25} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{7}{25} + 2\pi k); (\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Сложив уравнения, полученные в результате возведения в квадрат обоих уравнения данной системы, получим, что $\cos(x+y) = 0$. Если $x+y = \frac{\pi}{2}+2\pi n$, то

$$\begin{cases} 4\cos x - 3\sin x = 3, \\ 4\sin x + 3\cos x = 4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 25\cos x = 24, \\ 25\sin x = 7, \end{cases}$$

т. е. $x = \arcsin\frac{7}{25} + 2\pi n$. Если $x + y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, то

$$\begin{cases} 4\cos x + 3\sin x = 3, \\ -4\sin x + 3\cos x = 4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 25\cos x = 0, \\ 25\sin x = 25, \end{cases}$$

т. е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **в)** *Ответ*: $\frac{7}{4}\sqrt{3}$. Пусть α и β — противоположные углы четырехугольника. Для определенности считаем, что они являются вершинами двух треугольников с боковыми сторонами 1 и 4, 1 и 3 соответственно. Приравняв найденные по формуле косинусов выражения для квадрата длины общего основания этих треугольников, получим, что $17 - 8\cos\alpha = 10 - 6\cos\beta$, или $4\cos\alpha - 3\cos\beta = \frac{7}{2}$. Площадь s четырехугольника выразим по формуле $s = \frac{1}{2}(4\sin\alpha + 3\sin\beta)$, так что $4\sin\alpha + 3\sin\beta = 2s$. После преобразований, аналогичных проделанным в предыдущем пункте, получим, что $25 - 24\cos(\alpha+\beta) = 4s^2 + \frac{49}{4}$, так что $24\cos(\alpha+\beta) = \frac{51}{4} - 4s^2$. Следовательно $\frac{51}{4} - 4s^2 \geqslant -24$, откуда $s^2 \leqslant \frac{147}{16} = \frac{3\cdot 49}{16}$, так что $s \leqslant \frac{7}{4}\sqrt{3}$. Осталось заметить, что $\frac{7}{4}\sqrt{3}$ — это величина площади равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 4 и боковыми сторонами, равными 1. **г)** *Ответ*: Множество, заданное неравенствами $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 49$ (кольцо). Введем комплексные числа $z = 4(\cos x + i\sin x)$, $w = 3(-\cos y + i\sin y)$ и $c = a + ib$. Данное уравнение приобретает вид $z + w = c$ и поставленный вопрос можно переформулировать следующим образом: "При каком условии на c существуют такие комплексные числа z, $|z| = 4$, и w, $|w| = 3$, что $z + w = c$?". Ответ следует из геометрического представления сложения комплексных чисел как сложения векторов по "правилу треугольника" и из условий существования треугольника: такие числа z и w найдутся тогда и только тогда: когда $|z| - |w| \leqslant |c| \leqslant |z| + |w|$.

3А. а) *Ответ*: Да, верно. Если корни $z_{1,2}$ многочлена $p(z)$ действительны и лежат на единичной окружности, то $z_1 = z_2 = \pm 1$, так что $a = \pm 2$. Рассмотрим случай $|a| < 2$ и положим $a = 2\cos x$. Тогда $z_{1,2} = \cos x + i\sin x$, т. е. $|z_{1,2}| = 1$. **б)** *Ответ*: $\sqrt{3}$. Имеем: $|z_1 - z_2| = |\sqrt{a^2 - 4}| = \sqrt{|a^2 - 4|}$. Среди точек вида a^2 — произвольных точек единичного круга — ближайшей к точке 4 является точка 1. **в)** Предположим, что вершины занумерованы так, что обход квадрата совершается против часовой стрелки. Мы вправе считать, что $u = 0$. Тогда $z_1 + z_3 = z_2 + z_4 = 0$. Далее, так как $z_2 = iz_1$ и $z_4 = iz_3$, то $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2 = 0$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{4} p(z_k) = 4b = 4p(0)$. **г)** Если предположить противное, то точка u, в которой достигается наибольшее значение $|p(z)|$ в круге $|z| \leqslant 1$, не лежит на единичной окружности, в частности, $|p(u)| > m$. Рассмотрим квадрат, центром которого является точка u, а одна из вершин которого (обозначим ее z_1) лежит на единичной окружности. В силу выбора точки u верны неравенства $|p(z_k)| \leqslant |p(u)|$. С другой стороны, по доказанному в предыдущем пункте, $\sum_{k=1}^{4} p(z_k) = 4p(u)$, так что

$$|p(u)| = \frac{1}{4}\left|\sum_{k=1}^{4} p(z_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{4} |p(z_k)| \leqslant |p(u)|,$$

поэтому $|p(z_k)| = |p(u)|$, в частности, $|p(z_1)| = |p(u)|$. Отсюда следует, что $m < |p(u)| = |p(z_1)| \leqslant m$ — противоречие.

Замечание. В приведенном рассуждение использовалась вторая теорема Вейерштрасса для функций от двух переменных.

3Б. **а)** $x_{2000} = \frac{2001}{2002}$. Общую формулу $x_n = \frac{n+1}{n+2}$ легко доказать по индукции. **б)** Заметим прежде всего, что если $x_k < 1$, то $2 - x_k > 1$, поэтому $x_{k+1} = \frac{1}{2-x_k} < 1$. Следовательно, если $x_0 < 1$, то $x_n < 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что неравенство $x_{n+1} > x_n$ равносильно неравенству $x_n(2 - x_n) > 1$, которое очевидно верно, так как $x_n^2 - 2x_n + 1 = (x_n - 1)^2 > 0$. **в)** $\mathcal{C}_0 = \{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Число a не является начальным членом x_0 данной последовательности, если при вычислении по заданной формуле получаем, что $x_n = 2$ при некотором $n \in \mathbb{N}$; тогда x_{n+1} не существует! Чтобы найти все такие значения начальных членов, перепишем рекуррентное соотношение в виде $x_{n-1} = \frac{2x_n-1}{x_n}$ и, для удобства, занумеруем последовательность в обратном направлении, начиная от $y_0 = 2$, положив $y_{n+1} = \frac{2y_n-1}{y_n}$. Теперь нетрудно увидеть, а затем доказать по индукции формулу $y_n = \frac{n+2}{n+1}$. **г)** $(-\infty; 1]$. Если $x_0 = 1$, то последовательность стационарна; $x_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. В пункте б) доказано, что при $x_0 < 1$ мы также получаем монотонную последовательность. Если $x_0 > 2$, то $x_1 < 0 < x_2$, поэтому последовательность не монотонна. Итак, пусть $1 < x_0 < 2$, причем $x_0 \notin \mathcal{C}_0$. Нетрудно доказать, что если $\frac{n+1}{n} < x_0 < \frac{n}{n-1}$, то $x_{n-1} > 2$, так что $x_n < 0$, таким образом мы снова получаем не монотонную последовательность.

3В. **а)** $p_3(a) = \frac{1}{4}$, $p_3(b) = p_3(c) = \frac{3}{8}$. Рассмотрим дерево возможных переходов из состояния в состояние в течение первых трех секунд (рис. 216). Поскольку все возможные из восьми вариантов переходов равновероятны, то ответ следует из того, что в нижней строчке состояние a встречается два раза, а каждое из состояний b и c — по три.

б) Если k — это число раз, которое состояние x встречается в нижней строчке дерева возможных переходов за n секунд, то

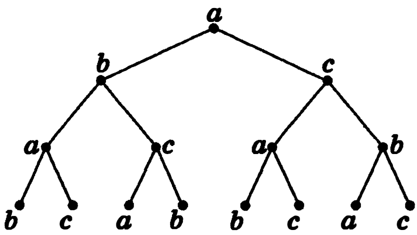

Рис. 216

$p_n(x) = \frac{k}{2^n} \neq \frac{1}{3}$. **в)** Положим для краткости записи $x_n = p_n(x)$. Тогда $x_n = \frac{1}{2}(1 - x_{n-1})$. Действительно, на n-й секунде устройство будет находится в состоянии x тогда и только тогда, когда на предыдущей секунде оно находилось в одном из двух других состояний (вероятность чего равна $1 - x_{n-1}$) из которых оно и перешло в x (с вероятностью $\frac{1}{2}$). Осталось заметить, что

$$\left|x_n - \tfrac{1}{3}\right| = \left|\tfrac{1}{2}(1 - x_{n-1}) - \tfrac{1}{3}\right| = \tfrac{1}{2}\left|x_{n-1} - \tfrac{1}{3}\right|,$$

поэтому $x_n - \frac{1}{3} \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Нетрудно доказать явную формулу для вероятностей $p_n(x)$. Именно

$$p_n(a) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right), \quad p_n(b) = p_n(c) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right).$$

г) Утверждение будет следовать, к примеру, из формулы

$$p_n(a) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \equiv 2n\,(3)} C_n^k$$

и ее аналогов для вероятностей $p_n(b)$ и $p_n(c)$. Докажем приведенную формулу (доказательство двух других аналогично).

Припишем переходам $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$ число $+1$, а переходам в обратном направлении — $a \mapsto c \mapsto b \mapsto a$ — число -1. Таким образом, последовательность переходов за n секунд кодируется последовательностью ± 1 длины n. Предположим, что в некоторой такой последовательности встречаются k штук $+1$. Нетрудно понять, что последнее состояние совпадает с первым тогда и только тогда, когда $k - (n - k) = 2k - n \equiv 0 \pmod 3$, или $2k \equiv n \pmod 3$, или $k \equiv 2n \pmod 3$. Осталось заметить, что вероятность каждой из последовательностей равна $\frac{1}{2^n}$, а число последовательностей, в которых $+1$ встречается k раз, равно C_n^k.

Вариант 2 (обязательные задачи)

1. Дана функция $f(x) = \log_3(3^x + a)$.
   а) При каком a прямая $y = \frac{x+1}{3}$ касается графика функции f?
   б) Докажите, что $f(0) \leqslant \frac{a}{\ln 3}$.
   в) Пусть $a = \frac{2}{3}$. Сколько решений (в зависимости от b) имеет уравнение $f(x) = \frac{x}{3} + b$?
   г) Пусть $a > 0$ и $t > 0$. Докажите, что $\left|\int_0^t f(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\right| < a$.
2. Дана система $4\cos x - \cos y = a$, $4\sin x + \sin y = b$.
   а) Решите систему при $a = b = 0$.
   б) Решите систему при $a = 4, b = -1$.
   в) Найдите наибольшее значение площади четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 3, 1, 3 и 4.
   г) Изобразите на плоскости множество всех точек $M(a, b)$, таких что данная система имеет решение.

1. а) $a = \frac{2}{3}$. **в)** Одно решение при $b = \frac{1}{3}$, два — при $b > \frac{1}{3}$, не имеет решений при $b < \frac{1}{3}$. **2. а)** Решений нет. **б)** $(x, y) = (-\arccos\frac{15}{17} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{15}{17} + 2\pi k); (2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **в)** $\frac{15}{4}\sqrt{3}$. **г)** Множество, заданное неравенствами $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25$ (кольцо).

Единый выпускной экзамен. Дополнительная задача

4. Три ребра треугольной пирамиды имеют длину 10, 20 и 30 см.
   а) Каков наибольший объем такой пирамиды?
   б) Сколько существует различных пирамид наибольшего объема? (Две пирамиды считаются одинаковыми, если одну из них можно совместить с другой, перемещая ее в пространстве.)
   в) Найдите наибольший радиус сферы, которую можно вписать в одну из пирамид наибольшего объема.
   г) Найдите наименьший радиус сферы, в которую можно поместить одну из пирамид наибольшего объема.

а) *Ответ*: $V_{\max} = 1000$ см^3. Три ребра данной длины либо выходят из одной вершины, либо образуют незамкнутую ломаную. В том и другом случае объем наибольший, если они попарно перепендикулярны. **б)** *Ответ*: 8 пирамид (учитывая их ориентацию!). **в)** *Ответ*: $r = \frac{10}{3}$. В силу формулы $r = \frac{3V}{S}$, наибольший радиус вписанной сферы имеет пирамида с наименьшей полной поверхностью. В силу неравенства

$$ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} < ab + bc + c\sqrt{a^2 + b^2} + a\sqrt{b^2 + c^2}$$

наименьшую полную поверхность имеет пирамида, в которой ребра данной длины исходят из одной вершины. **г)** *Ответ*: $R = \frac{25}{7}\sqrt{26}$. Нетрудно видеть, что радиус описаной сферы одинаков у всех пирамид наибольшего объема. Однако в случае, когда ребра данной длины образуют незамкнутую ломаную, одно из других ребер совпадает с диаметром сферы. Если же три ребра исходят из одной вершины, то можно доказать, что эта вершина лежит внутри сферы, экватор которой описан около треугольника, образованного тремя оставшимися ребрами этой пирамиды.

ДОПОЛНЕНИЕ
Уроки обобщающего повторения (на примере темы “Квадратичная функция”)
Е. Н. Лысова

В преподавании математики во многих школах по-прежнему преобладает формальный подход, связанный с отработкой конкретных методов решений. Характерный недостаток структуры многих учебников и задачников состоит в изолированности упражнений друг от друга, а когда слишком долго отрабатывается преобразование или правило, представления учащихся поневоле пребывают в фазе необобщенных “элементарных знаний”.

Однако характер мыслительных процессов учащихся резко изменится, если в качестве клеточек учебного процесса вместо разрозненных заданий использовать совокупности задач. Причем логически различные элементы каждой совокупности должны обладать в то же время такой общностью, которая обеспечивает данной совокупности такие качества, как системность и целостность, устойчивость к сохранению во времени и быстрое проявление в памяти. Таким образом, происходит совместное и одновременное рассмотрение взаимосвязанных действий, операций, функций, что, в свою очередь, способствует более глубокому обобщению пройденного материала.

В качестве примера рассмотрим набор заданий, который можно (и целесообразно!) использовать при проведении обобщающего урока по завершению изучения темы “Квадратичная функция”. Повторим раздел “Множество значений квадратичной функции”. Итак,

а) найдите наименьший член последовательности $a_n = n^2 - 5n + 9$, $n \in \mathbb{N}$;

б) определите наименьшее расстояние от точки $A(\frac{18}{5}, 3)$ до точек прямой $y = \frac{\sqrt{11}}{5}x + 3$;

в) укажите длину наименьшего отрезка, параллельного оси Oy и соединяющего параболы $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 - 10x + 21$;

г) известно, что график функции $y = -x^2 + px + q$ проходит через точки $P(2, -3)$ и $Q(3, -3)$, найдите все значения a, при которых прямая $y = a$ пересекается с этим графиком;

д) найдите множество значений функции $y = x^4 - 5x^2 + 9$;

е) укажите все значения, которые могут принимать корни уравнения $5x^2 - x^4 - 9 = a$, если $a \in [-9; -3]$;

ж) определите все значения a, при которых парабола $y = x^2 + a$ пересекается с графиком функции $y = x^4 - 4x^2 + 9$;

з) постройте график функции h, где $h(a)$ — наименьшее значение функции $y = (x^2 + a)^2 - 5(x^2 + a) + 9$.

На первых порах учащимся бывает трудно и даже подчас невозможно без посторонней помощи понять существующие взаимосвязи между различными задачами. С другой стороны, математическая суть (внутренняя структура) каждой из задач, границы применимости используемых методов решений и их внутренней логики могут быть полнее осознаны при более подробном рассмотрении и сопоставлении предложенных задач.

Важную роль в этом процессе играют предлагаемые учителем специально составленные вопросы и задания. Школьникам полезно не просто угадывать верные ответы, а логически обосновывать их и даже стараться записывать проводимые рассуждения.

Итак, рассмотрим функцию g, где $g(x) = x^2 - 5x + 9$.

Вопросы и задания	**Ответы**
1. Каково множество значений функции g?	Графически: см. рис. 218 ; аналитически: число a входит в множество значений функции g, если уравнение $g(x) = a$ имеет решение. Квадратное уравнение $x^2 - 5x + 9 - a = 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$. Отсюда находим, что $a \geqslant \frac{11}{4}$. Получаем ответ: $[\frac{11}{4}; +\infty)$.
— При каких значениях a прямая $y = a$ пересекается с графиком функции g?	Это вопрос о нахождении множества значений функции g.
— При каких значениях b прямая $y = x + b$ пересекается с параболой $y = x^2 - 4x + 9$?	Этот вопрос равносилен первым двум.
— Приведите свой вопрос, равносильный первым трем.	...
2. Укажите связь между последовательностью $\{a_n\}$ из пункта а) и функцией g.	$a_n = g(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
— Верно ли, что последовательность $\{a_n\}$ имеет единственный наименьший член?	Нет, так как $\min\{a_n\} = \min g(n) = g(2) = g(3) = 3$ (см. рис. 218).

— Приведите три (качественно!) различных квадратных трехчлена $f(x)$, чтобы последовательность $b_n = f(n)$ имела единственный наименьший член.	a) Так будет, во-первых, если абсцисса вершины параболы $x_0 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим, к примеру, $f_1(x) = x^2 - 4x + 5$, тогда $\min\{b_n\} = f_1(x_0) = f_1(2) = b_2$. b) Пусть $x_0 < 1$, рассмотрим, например, $f_2(x) = x^2 + 5x + 3$, тогда $\min\{b_n\} = f_2(1) = b_1$. c) И, наконец, рассмотрим случай, когда абсцисса вершины $x_0 > 1$, причем $x_0 \notin \mathbb{N}$ и $\{x_0\} \neq \frac{1}{2}$, пусть, к примеру, $f_3(x) = x^2 - \frac{17}{2}x + 5$, тогда $\min\{b_n\} = f_3(4) = b_4$.
3. Укажите такую функцию $f(x) = -x^2 + px + q$, график которой проходит через точки $P(2, -3)$ и $Q(3, -3)$.	Так как парабола $g(x) = x^2 - 5x + 9$ проходит через точки $(2, 3)$ и $(3, 3)$, значит $f(x) = -x^2 + 5x - 9$, т. е. $f(x) = -g(x)$.
4. Найдите множество значений функции $y = g(x^2)$.	Пусть $x^2 = t$, тогда нужно найти множество значений квадратичной функции $g(t) = t^2 - 5t + 9$ при $t \geqslant 0$; из рис. 218 видно, что это промежуток $[\min g(t); +\infty)$, т. е. все множество значений функции g.
— Приведите пример функции f такой, что множества значений функций $y = f(x^2)$ и $y = f(x)$ не совпадают.	Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, где $a > 0$, тогда множество значений функции $y = f(x^2)$ это луч $[f(0); +\infty)$, а множество значений функции $y = f(x)$ это луч $[f(-\frac{a}{2}); +\infty)$. Ясно, что второе множество содержит первое.

Благодаря проводимому обсуждению (задания, вопросы — ответы) происходит так называемое “торможение” процесса перехода к непосредственному решению каждой отдельной задачи. Это делается для того, чтобы учащиеся начали мыслить, а не действовать по укоренившемуся шаблону. В связи с тем, что подобные задания способствуют выявлению внутренней структуры и конкретных задач, и общих методов естественно назвать их структурообразующими.

Педагогическая идея состоит в том, что структурообразующие вопросы заставляют думать учащихся в правильном направлении и, главное, демонстрируют наличие разнотиповых взаимосвязей между отдельными составляющими данную совокупность задачами.

Раскроем содержание этих взаимосвязей, обозначенных на рис. 217 цифрами **1)–8)**. Каждый из пунктов а)–з) данного набора связан с его основной темой — множеством значений квадратичной функции $g(x) = x^2 - 5x + 9$.

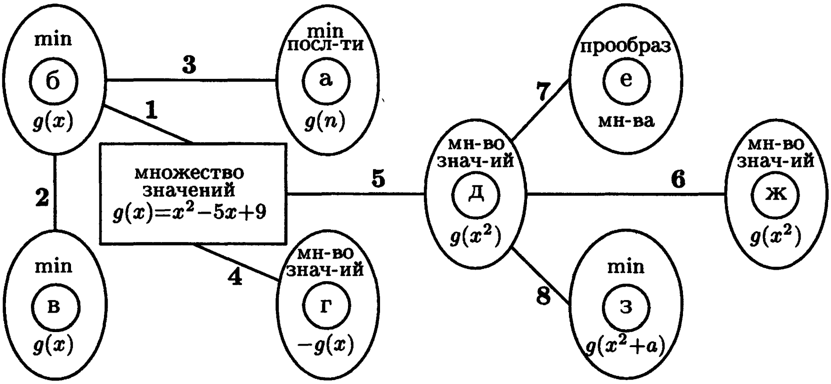

Рис. 217. Взаимосвязи между задачами а)–з)

1), 2) Для решения задач б) и в) потребуется найти $\min g(x)$.

3) Очевидна связь между последовательностью $\{a_n\}$ из пункта а) и функцией g, ведь $a_n = g(n), n \in \mathbb{N}$.

5), 8) Каков смысл пункта з)? Дело в том, что ответ к задаче д) можно "угадать". Успешный ответ к пункту з) показывает, что ученик, во-первых, понимает, что же такое — график функции, во-вторых, осознает зависимость множества значений квадратичной функции от множества, на котором она задана.

7) Решение задачи е) — нахождение прообраза заданного множества — опять-таки подчеркивает связь между множеством значений квадратичной функции и множеством, на котором она задана.

4), 6) Задания пунктов г) и ж) равносильны нахождению множества значений квадратичных функций $y = -g(x)$ и $y = g(x^2)$ соответственно.

Теперь приведем ответы, дадим указания и отметим тонкости некоторых решений.

а) *Ответ:* 3.

б) *Ответ:* $\frac{3\sqrt{11}}{5}$. Если M — точка прямой, то $AM^2 = (\frac{18}{5}-x)^2+(3-\frac{\sqrt{11}}{5}x-3)^2 = \frac{36}{25}(x^2-5x+9) = \frac{36}{25}g(x)$, значит $r = \frac{6}{5}\sqrt{\min g(x)} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$.

в) *Ответ:* $\frac{11}{2}$. Так как парабола $y = x^2 - 10x + 21$ лежит выше графика функции $y = 3-x^2$, то $l = \min(x^2-10x+21-3+x^2) = \min 2g(x) = \frac{11}{2}$.

г) *Ответ:* $a \in (-\infty; -\frac{11}{4}]$.

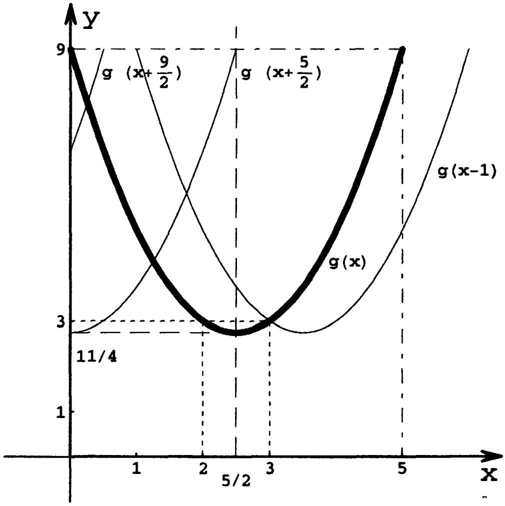

Рис. 218. Графики функций $y = g(x)$ и $y = g(x+b)$

д) *Ответ:* $[\frac{11}{4}; +\infty)$. Достаточно заметить, что $y = g(x^2)$.

е) *Ответ:* $x \in [-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5}]$. Немного переформулируем задачу. Требуется найти все значения, которые могут принимать корни уравнения $g(x^2) = -a$, если $-a \in [3; 9]$. Достаточно взглянуть на рис. 218, чтобы получить, что $x^2 \in [0; 2] \cup [3; 5]$, отсюда $x \in [-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5}]$.

ж) *Ответ:* $[\frac{11}{4}; +\infty)$.

з) *Ответ* — на рис. 219. Заметим, что $h(a) = \min g(x^2 + a)$, осталось лишь посмотреть на рис. 218, чтобы понять, что при $a \leqslant \frac{5}{2}$ наименьшее значение функции $y = g(x^2 + a)$ равно $\frac{11}{4}$, значит $h(a) = \frac{11}{4}$ при всех $a \leqslant \frac{5}{2}$. Если же $a > \frac{5}{2}$, то наименьшее значение функции $y = g(x^2 + a)$ равно $g(0 + a)$, значит $h(a) = g(a)$ при всех $a > \frac{5}{2}$.

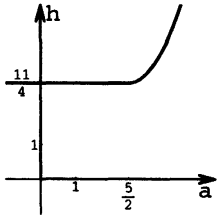

Рис. 219.

Завершая обсуждение данного набора задач, особо подчеркнем, для чего же он, собственно говоря, был нужен (желательно, чтобы ученики сами смогли сформулировать, чему они научились за этот урок). Цель нашего занятия заключалась в следующем:

- продемонстрировать различные способы нахождения множества значений квадратичной функции и показать их равносильность;
- рассмотреть зависимость множества значений квадратичной функции от множества, на котором она задана;
- показать, как можно множество значений квадратичной функции использовать в разных математических задачах.

Итак, мы рассказали, как и зачем можно (и нужно!) использовать данный набор задач при проведении обобщающего урока по теме “Квадратичная функция”. Заметим, что подобные совокупности задач имеют свое название. В 1997 году О. А. Ивановым было введено понятие “пучка задач”. С дидактической точки зрения, пучком задач называется такая их совокупность (дидактическая единица), определяющей характеристикой которой является наличие разнотиповых взаимосвязей между отдельными составляющими эту совокупность задачами, обеспечивающее включение обратной связи в процессе их решения.

Вкратце, пучок задач — это такая их совокупность, которая обладает глубокой внутренней структурой (сущностью) как математического, так и педагогического характера.

Структурообразующие вопросы и задания, сопровождающие пучок задач, позволяют не только заглянуть “внутрь” конкретной задачи, но и представить общую картину, уже не говоря о том, что процесс “предварительного обсуждения — решения — обсуждения” вызывает интерес школьников к рассматриваемой теме и развивает свободу (нешаблонность) мышления, способствует правильной организации знаний учащихся.

Еще раз проиллюстрируем эту мысль на примере следующего пучка задач, предлагаемого при повторении темы “Множества, заданные уравнениями и неравенствами” (мы приводим набор задач не по теме “Квадратичная функция” специально для того, чтобы подчеркнуть разнообразие пучков задач и широкие возможности их использования!)

Итак, повторяем разделы: “Метод интервалов” и “Симметрия множеств”. Требуется изобразить множества, заданные неравенствами:

a) $y \leqslant x$,	c) $\lvert y\rvert \leqslant \lvert x\rvert$,	e) $\frac{y}{x} \leqslant 1$,	g) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{y}$,
b) $y^2 \leqslant x^2$,	d) $y^3 \leqslant x^3$,	f) $1 \leqslant \frac{x}{y}$,	h) $\frac{y}{x} \leqslant \frac{x}{y}$.

Рассмотрим, как может происходить обсуждение пучка задач на уроке. Для удобства обозначим множество, заданное неравенством a), за A, множество, заданное неравенством b), за B и так далее.

Структурообразующие вопросы и задания	**Ответы**
1. Есть ли среди заданных множеств симметричные (относительно осей, начала координат)?	Неравенству b) одновременно удовлетворяют пары чисел (x,y), $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$, поэтому множество B симметрично относительно осей и начала координат; неравенству f) одновременно удовлетворяют пары чисел (x,y) и $(-x,-y)$, поэтому множество F симметрично относительно начала координат; далее см. рис. 220.
2. Есть ли среди неравенств равносильные? — Что можно сказать о множествах, заданных равносильными неравенствами?	a) $\Leftrightarrow$ d), b) $\Leftrightarrow$ c). Они совпадают, т. е. $A = D$, $B = C$.
3. Определите в каких областях совпадают множества A и B, B и C, B и H, A и D, …	См. рис. 220.
4. Покажите, что неравенство c) следует из неравенства f).	Докажем, что если верно неравенство $1 \leqslant \frac{x}{y}$, то выполняется и неравенство $\lvert y\rvert \leqslant \lvert x\rvert$. Доказательство: $1 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \lvert\frac{x}{y}\rvert$, отсюда и следует, что $\lvert y\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.

— Что можно сказать о множествах C и F? B и F?	$F \subset C$, так как из неравенства f) следует неравенство c); $F \subset B$, так как $B = C$.
— Покажите, что множество E содержит множество C за исключением одной точки.	Докажем, что из неравенства c) следует неравенство e). Доказательство: $\lvert y\rvert \leqslant \lvert x\rvert$, следовательно, если $x \neq 0$, то $\frac{\lvert y\rvert}{\lvert x\rvert} \leqslant 1$, а так как $\frac{y}{x} \leqslant \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x\rvert}$, значит $\frac{y}{x} \leqslant 1$; итак, множество C содержится в E за исключением точки (0,0).
— Является ли выполнение неравенства e) необходимым для выполнения неравенства f)?	Докажем, что неравенство e) следует из неравенства f). Доказательство: так как $1 \leqslant \frac{x}{y}$, то $\frac{x}{y} > 0$, значит можем разделить неравенство $1 \leqslant \frac{x}{y}$ на $\frac{x}{y}$, получим $\frac{y}{x} \leqslant 1$, а это и есть неравенство e).
— Что можно сказать о множествах E и F?	$F \subset E$, так как из неравенства f) следует неравенство e).
5. Опишите все возможные способы построения множеств $A, B, \ldots, I$. (укажите наиболее простой из них)	См. рис. 220.

Раскроем содержание существующих между задачами взаимосвязей (обозначенных на рис. 220 цифрами **1)–3)**).

1) Метод интервалов.
Приведем решение пункта g) с помощью “метода интервалов”. Преобразуем неравенство g) к виду $\frac{y-x}{xy} \leqslant 0$. Далее изобразим на плоскости прямые $y = x$, $y = 0$ и $x = 0$, причем последние две пунктиром. Таким образом, разбили плоскость на шесть секторов, в каждом из которых выражения $y - x$, y, x, стоящие в числителе и знаменателе данной дроби, сохраняют знак. Так как при переходе через каждый из лучей только один из множителей изменяет свой знак, то достаточно определить знак дроби в любом секторе, чтобы потом чередовать его во всех остальных.

2) Симметрия множеств.
Проверив, какие из пар чисел (x, y), $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$

одновременно удовлетворяют неравенству, мы находим, симметрично ли заданное множество относительно осей и начала координат. В соответствии с этим определяем, какую его часть достаточно построить, чтобы далее, используя симметричность множества, изобразить требуемое.

3) Совпадение множеств.

Рассмотрим, например, неравенство c). Можно привести его к виду $y \leqslant x$ домножив обе части на x, но это преобразование можно выполнять только при условии $x > 0$, иначе знак неравенства поменяется на противоположный. Итак, на $x > 0$ множества, заданные неравенствами a) и c) совпадают.

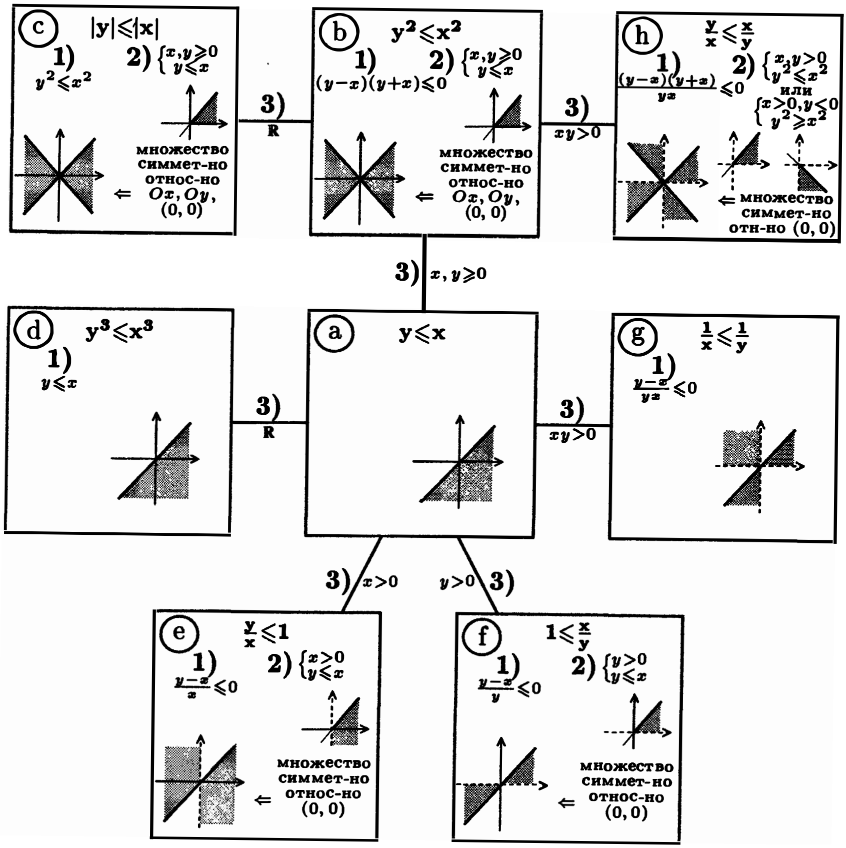

Рис. 220. Взаимосвязи между пунктами a)–h). Решение задач

Дадим краткий комментарий к данной совокупности задач. Общая идея предлагаемого пучка задач состоит в том, чтобы показать разные способы решения таких простых на вид неравенств. Первый способ — это точный аналог метода интервалов, второй способ основан на использовании симметричности множеств, и, наконец, третий способ — нахождение связи между неравенствами и, как следствие, связи между задаваемыми ими множествами. Таким образом, цель нашей деятельности — рассмотреть предложенные множества со всех сторон и, тем самым, показать, насколько грубые ошибки допускают учащиеся, бездумно заменяя неравенства b), c), e), f), g), h) на $y \leqslant x$.

Итак, на примере двух уроков мы показали, каким образом можно использовать пучки задач для организации обобщающего повторения в школе. Целью подобных занятий является "превращение суммы знаний учащихся в систему, что предполагает на определенном этапе обучения необходимость перекомпоновки, соподчинения, систематизации материала, выявления новых связей и отношений между элементами этой суммы знаний".

Ведь определяющими качествами самого пучка выступают системность и целостность, такие необходимые в процессе обучения и практически полностью теряющиеся на фоне изолированности упражнений друг от друга. Наличие разнотиповых взаимосвязей между отдельными составляющими пучок задачами обеспечивает включение обратной связи в процессе их решения. Ведь то, какие методы естественно применить при решении того или иного пункта, зависит не только от него самого, его формулировки, а, в первую очередь, от его математического содержания, которое полностью может быть раскрыто только благодаря существующим между задачами взаимосвязям.

Подчеркнем, что исследование пучка задач именно в целом (как дидактической единицы), а не рассмотрение каждой задачи в отдельности, создает намного более благоприятные условия для возникновения и системного качества знаний учащихся, "ибо элементы знания образуют укрупненную единицу усвоения лишь благодаря многообразным связям между этими элементами".

После всего сказанного трудно не согласиться, что совокупность заданий, предлагаемых в любом пучке:

- содержит задачи (и, как следствие, вопросы), требующие не только знания математических понятий, но и понимания взаимосвязей между ними; таким образом, пучок задач помогает

выявлению сложной природы математического знания, достижению системности знаний;
- проверяет способность учащихся провести требуемое логическое рассуждение (и, как следствие, способствует его проведению);
- оставляет место для творческой работы и вызывает интерес к пучку задач благодаря проводимому обсуждению;
- развивает способность учащихся рассматривать пучок задач как "целое", видеть его основную идею и использовать все сделанные в ходе обсуждения умозаключения.

Таким образом, именно пучки задач как нельзя лучше подходят для организации обобщающего повторения в школе.

Приведем набор пучков задач, которые можно использовать при завершении изучения темы "Квадратичная функция". К некоторым из них мы дадим лишь ответы, предполагая, что читатели смогут самостоятельно провести требуемые рассуждения: уловить взаимосвязи между предложенными задачами и воспользоваться ими при решении. На примерах с более глубокими типами взаимосвязей, а потому представляющих для нас больший интерес, мы, наоборот, остановимся очень подробно.

Отметим затрагиваемые разделы:

- Графики функций:
  - парабола как график квадратичной функции,
  - построение графиков элементарными методами,
  - применение графиков в решении задач с параметрами.
- Монотонность функции:
  - промежутки возрастания, убывания,
  - наибольшее, наименьшее значения функции.
- Множество решений:
  - техника нахождения,
  - графически — прообраз множества.
- Множество значений:
  - техника нахождения,
  - графически — образ множества.
- Формулы Виета:
  - решение уравнения — разложение на множители,
  - решения уравнения — корни функции,
  - симметрические выражения от корней многочлена.

- Повторение некоторых понятий, непосредственно не связанных с этой темой:
  - расстояние между точками, прямыми (квадратичная функция, появляющаяся в некоторой математической модели),
  - последовательности (квадратичная функция натурального аргумента),
  - замены в уравнениях и неравенствах (квадратичная функция, появляющаяся в ходе решения),
  - изображение множеств, заданных квадратными уравнениями, неравенствами,
  - четные и нечетные функции (симметричность графиков).

Пример 1 *(Множество значений квадратичной функции)*

а) найдите наименьший член последовательности $a_n = n^2-5n+9$, $n \in \mathbb{N}$;

б) определите наименьшее расстояние от точки $A(\frac{18}{5}, 3)$ до точек прямой $y = \frac{\sqrt{11}}{5}x + 3$;

в) укажите длину наименьшего отрезка, параллельного оси Oy и соединяющего параболы $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 - 10x + 21$;

г) известно, что график функции $y = -x^2 + px + q$ проходит через точки $P(2, -3)$ и $Q(3, -3)$, найдите все значения a, при которых прямая $y = a$ пересекается с этим графиком;

д) найдите множество значений функции $y = x^4 - 5x^2 + 9$;

е) укажите все значения, которые могут принимать корни уравнения $5x^2 - x^4 - 9 = a$, если $a \in [-9; -3]$;

ж) определите все значения a, при которых парабола $y = x^2 + a$ пересекается с графиком функции $y = x^4 - 4x^2 + 9$;

з) постройте график функции h, где $h(a)$ — наименьшее значение функции $y = (x^2 + a)^2 - 5(x^2 + a) + 9$.

Пример 2 *(Исследование рациональной функции)*

а) сколько решений имеет уравнение $ax^2 + (a - 1)x + a = 0$ в зависимости от a?

б) укажите все такие значения a, при которых произведение корней уравнения $\frac{x}{x^2+x+1} = a$ равно единице;

в) найдите множество значений функции $f(x) = \frac{2x}{x^2+x+1}$;

г) определите, при каких значениях c уравнение $f(x) = f(c)$ имеет два различных решения;

д) изобразите на координатной плоскости множество, заданное уравнением $f(x) = f(y)$.

Раскрытие взаимосвязей и решение задач

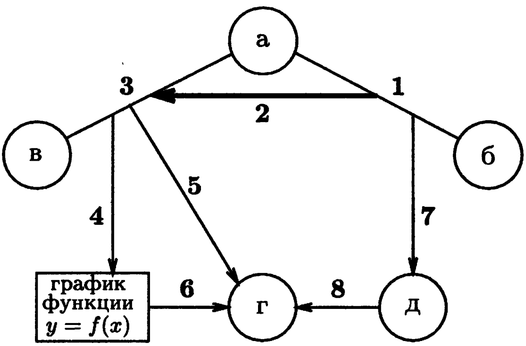

Рис. 221. Взаимосвязи между задачами а)–д)

1) Поскольку уравнения $ax^2 + (a-1)x + a = 0$ и $\frac{x}{x^2+x+1} = a$ равносильны, то перепишем задачу б) в более удобном для нас виде: нужно найти, при каких значениях a произведение корней квадратного уравнения $ax^2+(a-1)x+a = 0$ равно единице (случай, когда $a = 0$, нас не интересует, так как уравнение будет иметь единственный корень $x = 0$). Если x_1, x_2 — корни, то их произведение $x_1x_2 = \frac{a}{a} = 1$ (по теореме Виета), но, так как корни должны быть действительными, то a должно удовлетворять неравенству $(a-1)^2 - 4a^2 \geqslant 0$, отсюда и следует ответ к задаче б).

2) Особо подчеркнем связь между уравнением $ax^2 + (a-1)x + a = 0$ и функцией $y = f(x)$. Задание пункта а) равносильно определению того, сколько раз функция $y = \frac{x}{x^2+x+1}$ принимает значение a. Таким образом, решив задачу а), мы, тем самым, найдем множество значений функции $y = \frac{x}{x^2+x+1}$, а значит, и множество значений функции $f(x) = \frac{2x}{x^2+x+1}$.

3) Итак, решив пункт а), мы получим, что функция f принимает значения $-2; 0; \frac{2}{3}$ один раз, значения из промежутков $(-2; 0)$, $(0; \frac{2}{3})$ дважды, а остальные значения не принимает вовсе. Причем, как не трудно найти, -2 это значение функции в -1, т. е. $-2 = f(-1)$, далее $0 = f(0)$, $\frac{2}{3} = f(1)$.

4) Не правда ли, теперь совсем просто построить график функции f? (см. рис. 222)

5) Определим, при каких c уравнение $f(x) = f(c)$ имеет два различных решения. Для этого положим $b = f(c)$, тогда из **3)** следует, что уравнение $f(x) = b$ имеет единственное решение при $b = -2; 0; \frac{2}{3}$. Значит уравнение $f(x) = f(c)$ имеет единственное решение при $c = \pm 1; 0$ (это также следует из **3**)). Чтобы получить ответ к пункту г), осталось лишь учесть, что функция f определена на $\mathbb{R}$ и никакое из своих значений не принимает более двух раз.

6) Ответ к пункту г) можно получить и воспользовавшись графиком функции f. Для этого нужно лишь знать понятие прообраза множества.

7) В пункте д) требуется изобразить множество, заданное уравнением $f(x) = f(y)$. Положим $2a = f(x) = f(y)$ (ясно, что $2a \in [-2; \frac{2}{3}]$), тогда числа x и y являются корнями уравнения $f(t) = 2a$. Отсюда либо $x = y$, либо (используя **1**)) $xy = 1$. (Приведем формальное решение пункта д): уравнение $\frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{2y}{y^2+y+1}$ равносильно уравнению $(x-y)(xy-1) = 0$. Изобразить искомое множество теперь не составит труда.

8) Очевидна связь между пунктами г) и д): достаточно заменить y на c на рис. 223, чтобы еще раз получить ответ к пункту г).

Ответы

а) Два решения при $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{1}{3})$, одно при $a = -1; 0; \frac{1}{3}$ и нет решений при остальных a. **б)** $[-1; 0) \cup (0; \frac{1}{3}]$. **в)** $[-2; \frac{2}{3}]$. **г)** $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **д)** См. рис. 223.

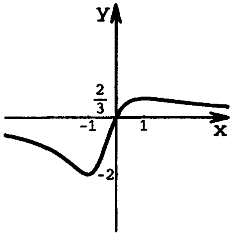

Рис. 222.

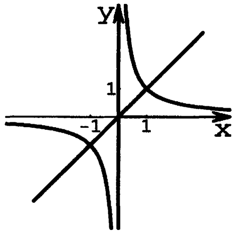

Рис. 223.

Пример 3 *(Исследование функции на монотонность)* дана функция $f(x) = ax^2 + 2x - 3$,

а) укажите все a, при которых $f(x_1) > f(x_2)$ для всех $x_1 > x_2$;

б) расположите в порядке убывания члены последовательности $\{c_n\}$, если $c_n = -\frac{4}{13}n^2 + 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$;

в) при каких значениях параметра a неравенство $f(x) \geqslant 0$ выполняется для всех $x \geqslant 1$?

г) найдите все такие a, что при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения на луче $[1; +\infty)$.

Решения и ответы

а) *Ответ:* $a = 0$. При остальных a графиком функции будет парабола, а значит требуемое условие выполняться не будет.

б) *Ответ:* $c_4, c_3, c_5, c_2, c_6, c_1, c_7, c_8, \ldots$ Рассмотрим $f(x) = -\frac{4}{13}x^2 + 2x - 3$, график — парабола, абсцисса вершины равна $\frac{13}{4}$. Имеем $c_n = f(n)$, тогда, так как $\max f(x) = f(\frac{13}{4})$, то наибольший член последовательности $\{c_n\}$ это c_4, далее в порядке убывания $c_3, c_5, c_2, y c_6, \ldots$

в) *Ответ:* $a \geqslant 1$. При $a = 0$ имеем прямую $y = 2x - 3$, значит требуемое не выполняется. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, значит, начиная с некоторого x^*, неравенство $f(x) \geqslant 0$ выполняться не будет. Рассмотрим $a > 0$, тогда абсцисса вершины $x_0 < 0$ и функция f возрастает на $[x_0; +\infty)$, осталось потребовать, чтобы $f(1) \geqslant 0$, отсюда $a \geqslant 1$.

г) *Ответ:* $a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. Переформулируем задачу: требуется найти все такие a, что функция f монотонна на $[1; +\infty)$ (иначе найдется такое число b, близкое к единице, что уравнение $f(x) = b$ будет иметь два решения на луче $[1; +\infty)$). Случай $a = 0$ нас устраивает, так как графиком функции f будет прямая. При $a \neq 0$ функция f — квадратичная, чтобы она являлась монотонной на $[1; +\infty)$, вершина параболы должна лежать левее или на прямой $x = 1$, т. е. $x_0 \leqslant 1$, отсюда $a \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

Комментарий

Общая идея состоит в том, чтобы в зависимости от a исследовать функцию f на монотонность. И если при $a = 0$ имеем линейную возрастающую функцию, то при $a \neq 0$ имеем квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + 2x - 3$, которая монотонна на промежутках $(-\infty; -\frac{2}{a}]$ и $[-\frac{2}{a}; +\infty)$.

Пример 4 *(Формулы Виета)*

а) задайте формулой квадратичную функцию, корнями которой являются числа $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) проверьте, являются ли числа $2\cos^2\frac{\pi}{8}$ и $2\sin^2\frac{\pi}{8}$ решениями уравнения $-2x^2 + 4x - 1 = 0$;

в) найдите абсциссу середины отрезка, концами которого являются точки пересечения графика функции $f(x) = 2x - 4x^2$ и прямой $y = 2 - 6x$;

г) изобразите на координатной плоскости множество всех пар (p, q) таких, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна трем.

Раскрытие взаимосвязей и решение задач

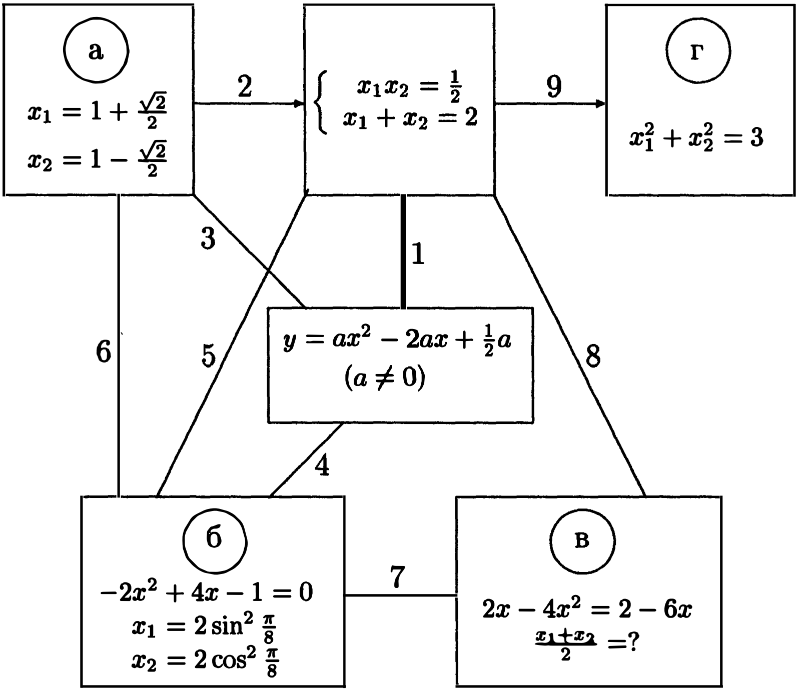

Рис. 224. Взаимосвязи между задачами а)–г)

1) Пусть квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ имеет корни x_1 и x_2, т. е. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Отсюда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ (формулы Виета). И обратно, возьмем произвольные числа x_1 и x_2, тогда $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$. Значит числа x_1 и x_2 являются корнями любой квадратичной функции вида $y = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ $(a \neq 0)$. В данном примере рассматриваются квадратичные функции

вида $y = ax^2 - 2ax + \frac{1}{2}a$ $(a \neq 0)$. Очевидно, что все они имеют по два различных корня ($D = 4a^2 - 2a^2 > 0$ для всех $a \neq 0$), сумма которых равна двум, а произведение $\frac{1}{2}$.

2), 3) Известно,что $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ являются корнями квадратичной функции $y = f(x)$. Так как $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1x_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$ то, используя **1)**, получаем, что $f(x) = ax^2 - 2ax + \frac{1}{2}a$ $(a \neq 0)$.

4), 5) В пункте б) рассматривается квадратичная функция $y = -2x^2 + 4x - 1$. Числа $2\cos^2\frac{\pi}{8}$ и $2\sin^2\frac{\pi}{8}$ являются ее корнями, так как $\begin{cases} 2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\sin^2\frac{\pi}{8} = 2, \\ 2\cos^2\frac{\pi}{8} \cdot 2\sin^2\frac{\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

6) Но из **3)** следует, что для всех $a \neq 0$ корнями квадратичной функции $y = ax^2 - 2ax + \frac{1}{2}a$ являются числа $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно $2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7), 8) В задаче в) появляется то же самое уравнение, что и в пункте б), а значит неизвестную абсциссу найти легко: $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = 1$.

9) Заметим, что если $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1x_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$ то $x_1^2 + x_2^2 = 3$, значит точка с координатами $(-2, \frac{1}{2})$ принадлежит искомому множеству. Рассуждая же в общем случае, имеем: если x_1 и x_2 — корни, то $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$. Поскольку корни должны быть действительными, то система $\begin{cases} p^2 - 4q \geqslant 0, \\ p^2 - 2q = 3 \end{cases}$ и задает искомое множество (рис. 225).

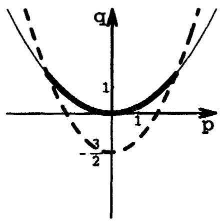

Рис. 225.

Пример 5 *(Формулы Виета. Образы и прообразы)* отображение f плоскости сопоставляет точке с координатами (u, v) точку $(-(u + v), uv)$,

а) найдите число элементов в прообразах точек $A_0(-3, 4)$, $A_1(-4, 4)$, $A_2(-5, 4)$;

б) определите прообраз второго координатного угла при отображении f;

в) изобразите множество пар (x_1, x_2) решений уравнения $x^2+px+q=0$ для всех $p<-2$, $q>1$;

г) пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, докажите, что если x_1 и x_2 больше единицы, то $p<-2$ и $q>1$. Верно ли обратное утверждение?

д) найдите множество значений отображения f.

Раскрытие взаимосвязей и решение задач

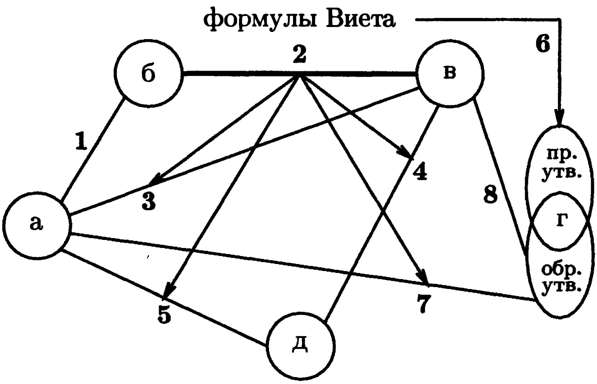

Рис. 226. Взаимосвязи между задачами а)–д)

1) По определению, точка с координатами (u,v) является прообразом точки $A_i(p_i,q_i)$, $i=0,1,2$ тогда и только тогда, когда u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -(u+v) &= p_i, \\ uv &= q_i. \end{cases}$$

Таким образом, пункт а) в данном примере подсказывает подход, при помощи которого проще найти ответ к задаче б): ясно, что точка с координатами (u,v) принадлежит прообразу второго координатного угла тогда и только тогда, когда ее образ, т. е. точка с координатами $(-(u+v), uv)$, принадлежит этому углу. Значит, (u,v) — точка прообраза тогда и только тогда, когда u, v удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -(u+v) &\leqslant 0, \\ uv &\geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразить искомый прообраз теперь не составит труда (см. рис. 227). Заметим, что задачи а) и б) послужат дополнительной проверкой друг для друга: так как точки $A_i(p_i, q_i)$, $i = 0, 1, 2$ принадлежат второму координатному углу, то их прообразы должны содержаться в изображенном множестве.

2) Отметим самую важную взаимосвязь в пучке (центральную идею). Явственнее всего она проявляется в задачах б) и в): имеем отображение $f(u, v) = (-(u+v), uv)$, возьмем произвольные числа x_1, x_2 и рассмотрим уравнение $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, т. е. $x^2 + px + q = 0$, где (по теореме Виета)

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2) & = & p, \\ x_1 x_2 & = & q. \end{cases}$$

Тогда имеем $f(x_1, x_2) = (-(x_1 + x_2), x_1 x_2) = (p, q)$. Таким образом, отображение f переводит корни любого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ в его коэффициенты p и q. В связи с этим можем переформулировать задания б) и в). Решение пункта в) состоит в нахождении прообраза множества, изображенного на рис. 228. Заметим, что это множество содержится во втором координатном угле, следовательно, его прообраз также будет содержаться в прообразе второго координатно угла, т. е. множество, изображаемое в пункте в), должно содержаться во множестве, изображаемом в б). С другой стороны, задание б) заключается в изображении множества пар (x_1, x_2) решений уравнения $x^2 + px + q = 0$ для всех $p < 0$, $q > 0$.

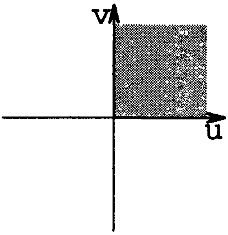

Рис. 227.

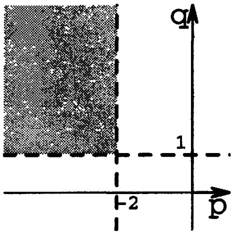

Рис. 228.

3) Новый взгляд на задачу а): нахождение числа элементов в прообразах точек $A_i(p_i, q_i)$, $i = 0, 1, 2$ равносильно определению количества корней уравнения $x^2 + p_i x + q_i = 0$. Очевидно, что искомым числом может быть только 0, 1 или 2 (таким образом, возникает дополнительная проверка правильности решения пункта а)).

4) Благодаря установленной связи между задачами б) и в) наиболее естественным становится следующий подход к решению пункта д): $f(x_1, x_2) = (p, q)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Ясно, что $p^2 - 4q \geqslant 0$.

5) Отметим связь между пунктами а) и д): точка A_0 не входит в множество значений отображения f, точки A_1 и A_2 входят.

6) Пункт г) состоит из двух утверждений: прямого и обратного. Прямое утверждение является следствием теоремы Виета.

7), 8) А привести два различных контрпримера к обратному утверждению помогут пункт а): для этого рассмотрим $A_0(-3, 4)$, тогда $p = -3$, $q = 4$, $D < 0$, значит корней нет и пункт в): достаточно увидеть, что среди изображенных пар есть, например, $(3, \frac{2}{3})$.

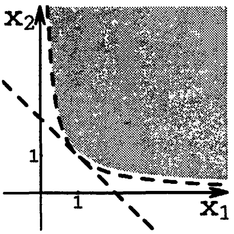

Рис. 229.

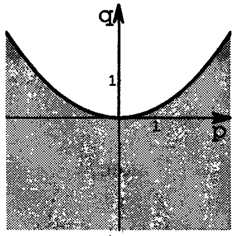

Рис. 230.

Ответы

а) 0; 1; 2. Точка A_0 не имеет прообраза, прообраз A_1 — точка (2,2), а прообраз A_2 состоит из двух точек. **б)** См. рис. 227. **в)** См. рис. 229. **г)** Ясно, что $q = x_1 x_2 > 1$. Так как $x_1 + x_2 > 2$, то $p = -(x_1 + x_2) < -2$. А вот обратное утверждение неверно (смотрите раскрытие взаимосвязей **7), 8)**). **д)** См. рис. 230.

Комментарий

Особо подчеркнем, что общая идея данного пучка задач состоит в том, чтобы:

- подвести учащихся к выводу, что отображение f переводит корни любого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ в его коэффициенты p и q;

- показать, как можно благодаря установленной связи переформулировать задачи пучка, и, в связи с этим, научить возвращаться к уже решенной задаче с тем, чтобы посмотреть на нее с другой точки зрения;
- научить не пропускать дополнительные проверки правильности решения задач (ведь в этом пучке именно дополнительные проверки следуют одна за другой).

Пример 6 *(Преобразования графиков)*
на рисунке 231 изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ (проходит через точки с координатами $(0, -1)$ и $(2, -1)$, вершина расположена в точке $(1, 1)$),

а) определите значения a, b и c;
б) постройте график функции $g(x) = ax^2 - bx + c$;
в) решите неравенство $f(x) \geqslant c$;
г) решите неравенство $f(|x - 1|) \geqslant c$;
д) верно ли равенство $ax^2 + b|x| + c = \max\{f(x), g(x)\}$?

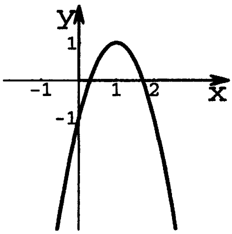

Рис. 231.

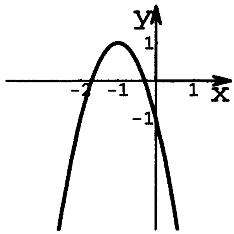

Рис. 232.

Раскрытие взаимосвязей

Предоставление графика функции $y = f(x)$ приводит к идее графической интерпретации данных примеров (найденные в пункте а) коэффициенты a, b и c понадобятся для точного построения графика функции f). Заметив, что выражение $ax^2 - bx + c$ в пункте б) это не что иное, как $f(-x)$, имеем не просто похожие выражения, а функции $y = f(-x)$, $y = f(|x - 1|)$ и $y = f|x|$, рассматриваемые в задачах б), г) и д) соответственно. Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = f(-x)$ легко построить с помощью стандартных преобразований. А вот при построении графика функции $y = f(|x-1|)$ у учащихся могут возникнуть некоторые затруднения. Дело в том, что они далеко не всегда используют наиболее естественный подход в данном случае (построение графика функции f на $[-1, +\infty)$ и отображение его симметрично относительно прямой $x = -1$), отдавая предпочтение честному раскрытию модуля. Тем самым, они изначально не видят симметричности графика, а уж тем более связи между получаемыми при раскрытии модуля функциями, что легко может привести к ошибке при построении графика.

Графический подход к решению любого из данных примеров позволяет:

- во-первых, увидеть структуру его решений и, тем самым, уберечь себя от заведомо неверного ответа,
- во-вторых, провести аналитическое решение (что мы предоставляем сделать читателям) наиболее естественным образом, ощутив роль входящих в него числовых коэффициентов.

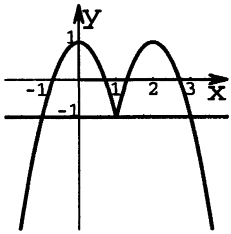

Рис. 233.

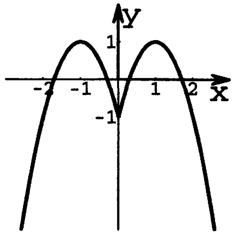

Рис. 234.

Рассмотрим, например, неравенство г). Решая графически (см. рис. 233), получаем ответ: $x \in [-1; 3]$. Становится ясно, что при алгебраическом решении пункта г) мы должны прийти к неравенству $|x - 1| \leqslant 2$, иначе при преобразованиях была допущена ошибка.

Ответы

а) $a = -2, b = 4, c = -1$. Очевидно, что $c = f(0) = 1$, теперь значения a и b легко найти из системы $\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = -1. \end{cases}$ **б)** См. рис. 232. **в)** $[0; 2]$. См. рис. 231. **г)** $[-1; 3]$. См. рис. 233. **д)** Да. См. рис. 234.

Пример 7 *(Множества, заданные квадратными уравнениями)*

а) решите уравнение $x^2 - x = |x - 1|$;

б) изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $x^2 - x = |x + y|$;

в) докажите, что при любом a уравнение $x^2 - x = |x + a|$ имеет ровно два решения;

г) найдите все такие значения параметра b, что сумма корней уравнения $x^2 - x = |x - b|$ равна нулю.

Решения и ответы

а) *Ответ:* $x = \pm 1$.

б) *Ответ* — на рис. 235. Данное уравнение равносильно совокупности: $\begin{cases} x + y \geqslant 0, \\ x^2 - x = x + y \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y \leqslant 0, \\ x^2 - x = -x - y, \end{cases}$ отсюда имеем $\begin{cases} y \geqslant -x, \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leqslant -x, \\ y = -x^2. \end{cases}$

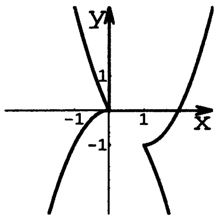

Рис. 235.

в) См. рис. 235. При любом a прямая $y = a$ пересекает изображенное множество в двух точках.

г) *Ответ:* $b \geqslant 1$. Ясно, что при $b \geqslant 1$ прямая $y = -b$ пересекает параболу $y = -x^2$ в точках $(-\sqrt{b}, -b)$, $(\sqrt{b}, -b)$, значит при $b \geqslant 1$ сумма корней уравнения $x^2 - x = |x - b|$ равна нулю. Аналогично рассуждая, получаем, что при $b \leqslant 0$ сумма корней уравнения $x^2 - x = |x - b|$ равна единице. Отдельно рассмотрим случай, когда $b \in (0; 1)$, тогда имеем $x_1 > -1$, $x_2 > 1$, значит $x_1 + x_2 > 0$.

Комментарий

Центральной в данном пучке является задача б): достаточно изобразить требуемое в б) множество, чтобы получить ответы к остальным пунктам. А именно: под решением задачи а) подразумевается нахождение абсцисс точек пересечения прямой $y = -1$ с изображенным множеством. Для решения пунктов в)–г) нужно лишь на рис. 235 заменить y на a и $-b$ соответственно.

Пример 8 *(Метод введения замены переменной)*
дан многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$,

а) разложите $P(x)$ в произведение многочленов степеней не выше двух с целыми коэффициентами;
б) решите уравнение $P(x) = -1$;
в) докажите, что число $(n-1)n(n+1)(n+2)+1$ является точным квадратом при любом $n \in \mathbb{N}$;
г) найдите множество значений $P(x)$ при $x \in [-1; 1]$.

Раскрытие взаимосвязей и решение задач

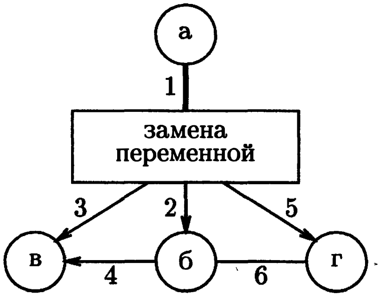

Рис. 236. Взаимосвязи между задачами а)–г)

1) Для решения задачи а) достаточно увидеть, что $x = 0$ и $x = -1$ являются корнями многочлена $P(x)$. Получаем требуемое разложение $P(x) = x(x+1)(x^2+x-2)$. Особо отметим центральную идею данного пучка: решения достаточно сложных пунктов б)–г) основаны на разбиении этих задач на цепочки из более простых. Поэтому наиболее естественный подход, применяемый в данном пучке, — замена переменной. Посмотрим внимательно на разложение $P(x) = x(x+1)(x^2+x-2)$. Возникает вопрос: какие еще ответы к а) возможны? Ясно, что $P(x) = x(x+1)(x-1)(x+2)$, значит можно привести еще несколько вариантов ответа, среди которых разложение $P(x) = (x^2+x)(x^2+x-2)$, которое более подходит для наших дальнейших действий, так как можно сделать замену переменной $t = x^2 + x$.

2) Чтобы решить задачу б), воспользуемся **1)**. Имеем $t(t-2) = -1$, отсюда $(t-1)^2 = 0$, значит $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3) Установленная связь **1)** может подсказать и наиболее естественный подход к решению пункта в): заметим, что $n(n+1)$ и

$(n-1)(n+2)$ дают n^2+n и n^2+n-2 соответственно. Воспользовавшись этим и обозначив $t=n^2+n$, имеем $(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n^2+n)(n^2+n-2)+1=t(t-2)+1=t^2-2t+1$. А это и есть точный квадрат $(n^2+n-1)^2$.

4) Отметим связь между пунктами б) и в): из **2)** следует, что $P(x)+1=0$ тогда и только тогда, когда $(x^2+x-1)^2=0$. А выражение $(n-1)n(n+1)(n+2)+1$ это не что иное, как $P(n)+1$. Чтобы увидеть это, достаточно сгруппировать $n(n+1)$ и $(n-1)(n+2)$ и воспользоваться связью **1)**.

5) Учитывая **1)**, переформулируем задачу г): требуется найти множество значений многочлена $G(t)=t(t-2)$, где $t=x^2+x$, при $x\in[-1;1]$. Для этого сперва определим, какие значения может принимать t. Проще всего это сделать, построив параболу $t=x^2+x$ на $[-1;1]$ (см. рис. 237). Итак, $t\in[-\frac{1}{4};2]$. Аналогично находим и множество значений многочлена G, построив параболу $G(t)=t(t-2)$ на $[-\frac{1}{4};2]$. Получаем ответ: $[-1;\frac{9}{16}]$.

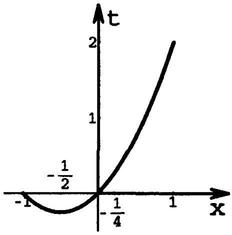

Рис. 237.

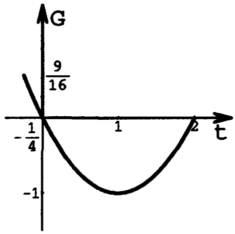

Рис. 238.

6) Из решения б) (смотрите **2)**) следует, что $P(x)\geqslant-1$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, т. е. $G(t)\geqslant-1$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $t=1$. Таким образом, у нас есть дополнительная проверка правильности решения г) (см. рис. 238).

Пример 9 *(Исследование рациональной функции)*
дана функция $f(x)=3x+\frac{2}{x}$,

а) решите уравнение $|f(x)|=2\sqrt{6}$;

б) при каких значениях a уравнение $f(x)=ax$ имеет решение?

в) найдите множество значений функции f;

г) укажите промежутки монотонности функции $y=f(x)$.

Раскрытие взаимосвязей и решение задач

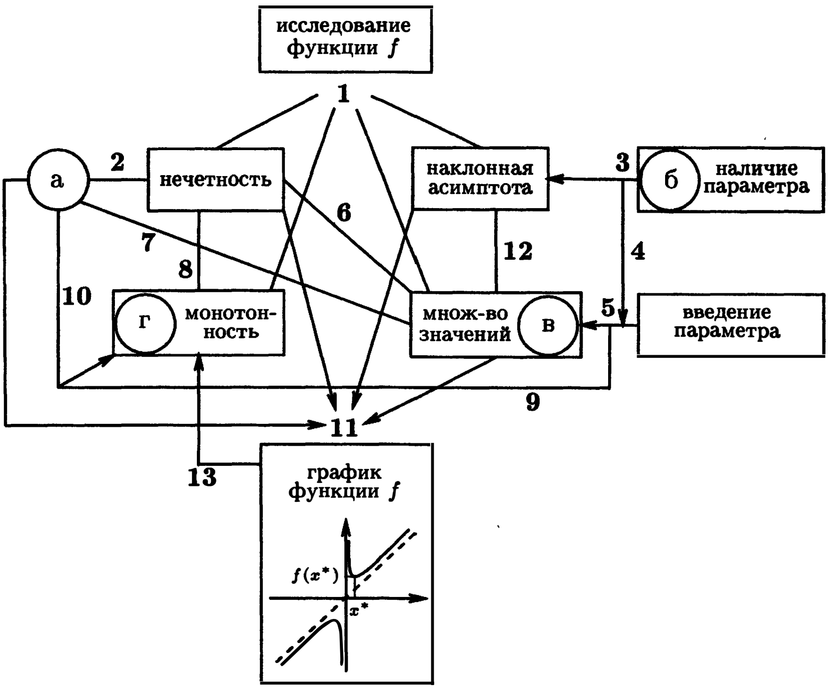

Рис. 239. Взаимосвязи между задачами а)–г)

1) Центральная идея данного пучка — исследование рациональной функции $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$, причем, как будет видно далее, в основе всех наших рассуждений лежит исследование квадратных уравнений.

2) Так как функция f является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат. Следовательно, достаточно решить уравнение $f(x) = 2\sqrt{6}$, чтобы в ответе к а) записать полученные значения и им противоположные.

3) Сама формулировка задачи б), на первый взгляд, не имеет никакого отношения к исследованию функции. На самом деле, требуется найти угловые коэффициенты всех прямых, проходящих через точку $(0,0)$ и пересекающих график функции $y = f(x)$. Сведем уравнение к $x^2 = \frac{2}{a-3}$, а оно имеет решение только при $a > 3$. Значит, график функции f находится между

прямыми $x = 0$ и $y = 3x$, которые являются, соответственно, его вертикальной и наклонной асимптотами.

4) Проведенное обсуждение задачи б) указывает подход, при помощи которого проще найти ответ к пункту в). А именно: для того, чтобы найти множество значений функции $y = f(x)$, нужно определить, при каких a прямая $y = a$ пересекается с графиком функции f.

5) Вместо того, чтобы исследовать данную функцию с помощью производной, мы в **4)** свели задачу к исследованию квадратного уравнения. Итак, число a входит в множество значений функции f, если уравнение $f(x) = a$ имеет решение.

6) Нечетность функции нам поможет проконтролировать правильность решения задачи в), так, например, ответ к пункту в): $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$ заведомо неверен.

7) Задачи а) и в) также послужат дополнительной проверкой друг для друга: если пункт а) имеет решение, то числа $\pm 2\sqrt{6}$ входят в множество значений функции $y = f(x)$ и наоборот.

8) Зная, что функция f является нечетной, достаточно исследовать ее на монотонность на $\mathbb{R}_+$ (если f возрастает на $[x_1; x_2]$, то f возрастает и на $[-x_2; -x_1]$).

9) Заметив, что значения $\pm 2\sqrt{6}$ данная функция принимает лишь один раз, значения из интервала $(-2\sqrt{6}; 2\sqrt{6})$ не принимает вовсе, а остальные значения принимает дважды, делаем вывод, что функция f на некотором промежутке возрастает от $-\infty$ до $-2\sqrt{6}$, затем убывает до $-\infty$. Аналогично, на каком-то промежутке функция f убывает от $+\infty$ до $2\sqrt{6}$, затем возрастает до $+\infty$. Сами промежутки монотонности указать несложно, так как при $x \mapsto -\infty$ функция стремится к $-\infty$, при $x \mapsto +\infty$ функция стремится к $+\infty$, а при $x = 0$ функция f не определена. Итак, функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; -x^*]$, где $x^* > 0$, $f(x^*) = 2\sqrt{6}$, убывает на $[-x^*; 0)$ и $(0; x^*]$ и далее возрастает на $[x^*; +\infty)$.

10) Решив а), найдем x^*.

11)–13) Если рассуждение **8)** покажется несколько сложным, то для нахождения промежутков монотонности можно непосредственно воспользоваться графиком функции f, который, к тому же, послужит дополнительной проверкой правильности решений примеров а)–в). Так, например, ответ $a < 3$ к пункту б) и ответ $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ к пункту в) не могут быть верными одновременно.

Ответы

а) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. **б)** $(3;+\infty)$. **в)** $(-\infty;-2\sqrt{6}]\cup[2\sqrt{6};+\infty)$. **г)** функция возрастает на $(-\infty;-\frac{\sqrt{6}}{3}]$ и $[\frac{\sqrt{6}}{3};+\infty)$, убывает на $[-\frac{\sqrt{6}}{3};0)$ и $(0;\frac{\sqrt{6}}{3}]$.

Возможно, не все примеры вами будут разобраны, к некоторым из них придется вернуться еще не раз. Разумеется, на первых порах, учителям самим покажется довольно сложным переход от изолированных упражнений к пучкам задач, а ведь нужно еще и постараться раскрыть все взаимосвязи, существующие между отдельными задачами каждого пучка, школьникам. А здесь вам помогут структурообразующие вопросы, их составление позволит вам не только заглянуть "внутрь" конкретной задачи, но и представить общую картину, а обсуждение на уроке (структурообразующие вопросы — ответы) поможет увидеть внутреннюю структуру рассматриваемого пучка задач вашим ученикам.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994. 272 с.
2. *Иванов О. А.* Умеете ли вы решать "почти школьные" задачи? // Квант. 1994. №6. С. 41-43.
3. *Иванов О. А.* Контрольные и экзаменационные работы по математике (MATHESIS. Математика. Вып. 1). СПб., 1993. 52 с.
4. *Иванов О. А.* Контрольные и экзаменационные работы по математике. 2 (MATHESIS. Математика. Вып. 3). СПб., 1996. 78 с.
5. *Иванов О. А.* Углубленное математическое образование в школе сегодня // Математика в школе. 2001. № 2, С. 40–44.
6. *Иванов О. А.* Избранные главы элементарной математики. СПб., 1995. 224 с.
7. *Иванов О. А.* Обучение поиску решения задач (Фантазии в манере Пойа) // Математика в школе. 1997. № 6. С. 47–51.
8. *Иванов О. А.* Практикум по элементарной математике: алгеброаналитические методы. СПб., 1998. 224 с.
9. Избранные задачи из журнала "American Mathematical Monthly". М., 1977. 598 с.
10. *Карп А. П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа для 10–11 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., 1995. 178 с.
11. *Карп А. П.* Сборник задач для подготовки к выпускным экзаменам по математике. СПб., 1996. 272 с.
12. *Кречмар В. А.* Задачи по алгебре. М.; Л., 1937. 424 с.
13. Материалы вступительных экзаменов. Задачи по математике и физике: Приложение к журналу "Квант". Вып. 1. М., 1993. 320 с.
14. *Моденов П. С.* Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М., 1960. 768 с.
15. Программы общеобразовательных учреждений. Математика. М., 1994. 240 с.
16. *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. М., 1975. 302 с.
17. *Харди Г. Х.* Курс чистой математики. М., 1949. 512 с.
18. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. М., 1989. 252 с.
19. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 11 класса средней школы. М., 1991. 384 с.
20. *Wolstenholme J.* Mathematical Problems. L.; N. Y., 1891. 500 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000.
Подписано в печать 01.06.2001. Формат 60×88 1/16
Печать офсетная Бумага газетная Печ. л. 20,0
Тираж 2000 экз. Заказ 5985

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86