Международный благотворительный фонд поддержки математики имени Леонарда Эйлера

Задачи олимпиад Эйлера

Санкт-Петербург
2013

Содержание

Предисловие

В 2007 году состоялась первая олимпиада С–Петербурга, участниками которой были не учащиеся, а учителя математики школ нашего города. Год этот был знаковый — 300-летие со дня рождения Леонарда Эйлера. Идея провести в этот год подобное мероприятие появилась у президента Фонда Эйлера[1], профессора математико-механического факультета СПбГУ С. В. Востокова. С той поры олимпиада, названная *Олимпиадой Эйлера*, проходит в два тура каждый календарный год. В первой половине года проходит I (заочный) тур; на решение предложенных на нем задач участникам олимпиады отводится 2-3 месяца. Подчеркнем, что участие в ней — сугубо добровольное. По итогам I тура отбираются участники II (очного) тура, проходящего в середине осени на базе Санкт-Петербургской академии постдипломного педагогического образования (ранее — городской институт усовершенствования учителей). Награждение победителей, призеров и всех участников II тура олимпиады традиционно проходит в Мраморном зале Петербургского отделения Математического института Российской Академии Наук.

В этой книге приведены условия и решения задач первых шести олимпиад (2007–2012 гг.). Поскольку эта олимпиада была задумана и проводится как профессиональное соревнование учителей математики, то она не сводится просто к решению «олимпиадных» задач. Как говорится в преамбуле к заданиям заочного тура:

Вас предлагаются два блока заданий: 1–7 «Математический» (задачи для решения) и 8–12 «Методический» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из заданий. Единственное условие — в работе должны быть представлены задания из обоих блоков.

Книга состоит из двух разделов. В первом их них приведены условия заданий олимпиад Эйлера 2007–2012 годов, во втором — их многочисленные и разнообразные решения. Не все из задач, входящие в первый раздел, являются новыми, среди них есть просто не очень известные. Для того, чтобы читателю было легче ориентироваться в разделе «Решения», в нем используется следующая нумерация. Каждый

---

[1] Международный благотворительный фонд поддержки математики имени Леонарда Эйлера, www.euler–foundation.org.

номер задачи состоит из трех чисел, первое из них — это номер олимпиады; второе число, обозначенное римской цифрой — это номер тура олимпиады; третье — номер задачи в соответствующем варианте. Например, номер **3.II.5** обозначает пятую задачу второго (очного) тура третьей олимпиады.

В отличие от заданий первого блока, задачи второго — методического блока являются достаточно известными. Каждый учитель математики сможет и решить, и объяснить своим ученикам, например, как определить в зависимости от значения параметра a число решений уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{6-2x}=a$ (задача 1.II.6). Возможно, что не каждый учитель знает, как доказать неравенство $a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2$, где R — это радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами длины a, b и c (задача 2.I.10), но всякий сможет найти его доказательство в литературе. Однако олимпиадное задание заключается в том, чтобы привести как можно больше разнообразных решений подобных задач. К примеру, мы приводим пять(!) решений задачи 1.II.6 и четыре решения задачи 2.I.10 (всего же в книге имеются 9 задач, к каждой из которых даны по четыре решения).

Мы хотим особо подчеркнуть важность знания и использования в практике преподавания различных подходов к решению задач. Представьте себе, что вы предлагаете все ту же упомянутую выше задачу 1.II.6 своим одиннадцатиклассникам. На примере этой задачи вы сможете повторить: а) использование производной для исследования функций, б) взаимное расположение эллипса и прямой, в частности, условие касания эллипса и прямой, в) взаимное расположение окружности и прямой и геометрический смысл коэффициентов в уравнении прямой, г) условие равносильности алгебраических преобразований, д) графическое исследование уравнений и геометрический смысл производной.

Всего одна задача, а сколько связано с нею математических понятий и методов! На ее примере можно поговорить об эстетике решений задач. Дайте своим ученикам возможность поспорить о том, какое из решений им представляется наиболее естественным или самым красивым. В общем, дайте им вырваться из плена шаблонов и схем и почувствовать — как математика бывает интересна.

Мы убеждены в том, что участие в олимпиаде Эйлера дает учителям возможность в правильном смысле «повысить свою квалификацию»: порешать новые задачи, придумать различные решения, возможно, известных задач, оценить несколькими точными фразами ошибки в приведенных решениях. Порой бывает так приятно выйти за круг своих обычных обязанностей, немного отвлечься, «включить мозг» для того, чтобы подумать над симпатичной задачей.

В заключение авторы хотели бы выразить свою глубокую благодарность Российскому оргкомитету международного математического конкурса «Кенгуру» за помощь в издании этой книги.

Рекомендуемая литература

[1] М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой, Ю. И. Ионин. Алгебра и начала анализа. Задачи и решения (учебное пособие). СПб: Издательство Санкт–Петербургского университета, 2004.– 274 с.

[2] Б. М. Беккер, В. Б. Некрасов. Применение векторов для решения задач. СПб: СМИО Пресс, 2002.– 88 с.

[3] Г. И. Вольфсон. Математика ЕГЭ 2010: Не так страшна задача на делимость, как ее малюют. СПб: СМИО Пресс, 2010.– 56 с.

[4] В. М. Гольховой. Математические соревнования школьников. Методическое пособие для учителей математики. СПб, 2005.– 96 с.

[5] О. А. Иванов. Практикум по элементарной математике. Алгеброаналитические методы. М.: МЦНМО, 2001.– 320 с.

[6] О. А. Иванов. Задачи по алгебре и началам анализа. СПб: БХВ–Петербург, 2005.– 378 с.

[7] О. А. Иванов. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009.– 384 с.

[8] О. А. Иванов. Maxima в обучении математике в школе. «Компьютерные инструменты в школе», 2010, вып.1–6.

[9] В. Б. Некрасов. Вся школьная математика. Учебно–справочное пособие для базовой и профильной школы. СПб: СМИО Пресс, 2011.– 274 с.

Условия задач

Первая олимпиада (2007 год). I (заочный) тур

Математический блок

1. Найдите наименьшее значение выражения $2x + y$, заданного на множестве всех пар (x, y), удовлетворяющих условию

$$3|x - y| + |2x - 5| = x + 1.$$

2. Найдите все значения параметра a, при которых множеством решений неравенства $x^3 - (a^2 + a + 1)x^2 + (a^3 + a^2 + a)x - a^3 \geqslant 0$ является некоторый луч.

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+9} + \sqrt{c^2+25}\,,$$

если известно, что $a + b + c = 12$.

4. В тетраэдре $ABCD$ ребро CD перпендикулярно плоскости ABC. Точка N — середина ребра AB, точка M — середина ребра BD, точка K делит ребро DC в отношении $DK : KC = 2 : 1$. Докажите, что прямая CN равноудалена от прямых BK и AM.

5. Натуральные числа a, b и c — попарно взаимно простые. Последовательность чисел $a, 2a, 3a, \ldots, b, 2b, 3b, \ldots, c, 2c, 3c, \ldots$ упорядочивается по возрастанию. Далее по упорядоченной последовательности строится новая конечная последовательность, состоящая из единиц и двоек согласно следующему правилу. Вместо числа, встречающегося в последовательности один раз, пишется 1, вместо пары одинаковых чисел пишется 2. Когда встречаются три одинаковых числа — процесс прекращается. Например, для чисел 2, 3, 5 строится последовательность 111121122121221121111. Найдите числа a, b, c, если построенная по ним последовательность состоит из 356 единиц и 36 двоек и ее начало выглядит следующим образом: $11111111111111112\ldots$

6. Докажите, что если уравнение $x^4 - ax^3 + 2x^2 - bx + 1 = 0$ имеет действительный корень, то $a^2 + b^2 \geqslant 8$.

7. Найдите все натуральные n и k, такие что при всех $a, b \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$a^k b^k (a^2 + b^2)^n \leqslant \frac{(a+b)^{2k+2n}}{2^{2k+n}}\,.$$

Методический блок

А. Ниже приводятся решения задач 8–10. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2^{x+1} - 2^{1-x} + 5.$$

Решение: Так как

$$\begin{aligned}4^x + 4^{-x} - 2^{x+1} - 2^{1-x} + 5 &= 2^{2x} + 2^{-2x} - 2(2^x + 2^{-x}) + 5 = \\ &= 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 2^{-2x} - 2 - 2(2^x + 2^{-x}) + 5 = \\ &= (2^x + 2^{-x})^2 - 2(2^x + 2^{-x}) + 3,\end{aligned}$$

то замена $t = 2^x + 2^{-x}$ сводит задачу к нахождению наименьшего значения трехчлена $g(t) = t^2 - 2t + 3$, которое равно $g(1) = 2$.

Ответ: 2.

9. Решите уравнение $\sin x - \cos x - 3\sin 2x + 1 = 0$.

Решение: Пусть $t = \sin x - \cos x$. Так как $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$, то мы получим уравнение $t - 3(1-t^2) + 1 = 0$, или $3t^2 + t - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $t = -1; \frac{2}{3}$. Подставив найденные значения в формулу $\sin 2x = 1 - t^2$, получим $\sin 2x = 0$ или $\sin 2x = \frac{5}{9}$.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{5}{9} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. Существует ли функция f, такая что $\sin 4x = f(\sin x)$?

Решение: Так как $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x(1 - 2\sin^2 x)\cos x$, то

$$\sin 4x = \begin{cases} 4\sin x(1-2\sin^2 x)\sqrt{1-\sin^2 x}, \text{ если } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], \\ -4\sin x(1-2\sin^2 x)\sqrt{1-\sin^2 x}, \text{ если } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: да, существует.

Б. Решите задачи 11–12 возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

11. Сравните числа $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ и $2\sqrt{2006}$.

12. Дан равнобедренный треугольник с основанием a, боковой стороной b и углом при вершине, равным 12°. Докажите, что $b < 5a$.

II (очный) тур

1. Дана функция $f(x)=\frac{x^3}{1+x^3}$. Найдите значение суммы

$$f\left(\tfrac{1}{1}\right)+f\left(\tfrac{2}{1}\right)+\ldots+f\left(\tfrac{2007}{1}\right)+f\left(\tfrac{1}{2}\right)+f\left(\tfrac{2}{2}\right)+\ldots+f\left(\tfrac{2007}{2}\right)+$$
$$+\ldots+f\left(\tfrac{1}{2007}\right)+f\left(\tfrac{2}{2007}\right)+\ldots+f\left(\tfrac{2007}{2007}\right).$$

2. Петр и Павел играют в следующую игру: они по очереди ставят коэффициенты в уравнение

$$x^3+\ldots x^2+\ldots x+\ldots=0.$$

Сначала Петр ставит коэффициент на любое из трех свободных мест, потом Павел на любое из двух оставшихся, потом Петр на последнее оставшееся место. Докажите, что при любой игре Павла Петр может добиться того, что уравнение будет иметь три различных действительных корня.

3. Найдите количество корней уравнения $x=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]$ (здесь, как обычно, $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x).

4. Пусть $p(x)$ — многочлен, все корни которого действительны и различны. Докажите, что $\left(p'(x)\right)^2\geqslant p(x)p''(x)$.

5. Точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка B_1 лежит на стороне AC. Пусть K — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Найдите площадь четырехугольника A_1CB_1K, если известно, что площадь треугольника A_1BK равна 5, площадь треугольника AB_1K равна 8, а площадь треугольника ABK равна 10.

6. Решите следующую задачу возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

Определите (в зависимости от значения параметра a) количество решений уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{6-2x}=a$.

7. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Решите уравнение $a\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=1$.

Решение: ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Ясно, что при $a=0$ уравнение не имеет решений. При $a \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем,

$$a\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) = 1 \iff a\sin x + \cos x = a \iff$$

$$\iff \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \iff$$

$$\iff \cos\left(x - \arccos\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \iff$$

$$\iff x = \arccos\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: При $a \neq 0$ $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; при $a = 0$ уравнение решений не имеет.

Вторая олимпиада (2008 год). I (заочный) тур

Математический блок

1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на промежутке $(0; 1)$.

2. Докажите, что при всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} \geqslant 2^{x+1}$.

3. Вычислите $\left[\sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[2009]{\frac{2009}{2008}}\,\right]$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x).

4. Решите в целых числах уравнение $2^x = 3^y + 1$.

5. Докажите, что $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\,\right] = \left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\,\right]$ для каждого натурального числа n (здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x).

6. Отрезок делит треугольник на две новые фигуры с равными периметрами и площадями. Докажите, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на этом отрезке.

7. Все грани тетраэдра — равные треугольники, длины сторон которых равны a, b и c. Найдите объем этого тетраэдра.

Методический блок

А. Ниже приводятся решения задач 8–9. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-5+|x+1|)(a-x^2-2x)=0$$

имеет ровно два корня.

Решение: Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $a-5+|x+1|=0$ и $a-x^2-2x=0$. Исследуем вначале первое уравнение.

Запишем его в виде $|x+1|=5-a$. Ясно, что это уравнение имеет два корня при $a<5$, один корень $x=-1$ при $a=5$ и не имеет корней при $a>5$.

Перепишем второе уравнение в виде $(x+1)^2=a+1$. Ясно, что оно имеет два корня при $a>-1$, имеет один корень $x=-1$ при $a=-1$ и не имеет корней при $a<-1$. Отсюда и получаем ответ.

Ответ: Исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-1$ и при $a>5$.

9. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x^2+2x}+\sqrt[3]{3x^2+6x-4}=\sqrt[3]{x^2+2x-4}\,.$$

Решение: Сделаем замену $t=x^2+2x$, в результате которой уравнение приобретает вид $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{3t-4}=\sqrt[3]{t-4}$. Далее имеем

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{3t-4}=\sqrt[3]{t-4}\iff\\ &\qquad\iff t+3t-4+3\sqrt[3]{t(3t-4)}\left(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{3t-4}\right)=t-4\iff\\ &\qquad\iff\sqrt[3]{t(3t-4)}\,\sqrt[3]{t-4}=-t\iff t(3t-4)(t-4)=-t^3\iff\\ &\qquad\qquad\iff t(t-2)^2=0,\ \text{откуда}\ t=0\ \text{или}\ t=2.\end{aligned}$$

Таким образом, $x^2+2x=0$, откуда $x=0;-2$, либо $x^2+2x-2=0$, откуда $x=-1\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $\{-2;0;-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\}$.

Б. Решите задачи 10–12 возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

10. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$, где a, b и c — это длины сторон треугольника, а R — радиус описанной около него окружности.

11. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$a^{2-2x^2}+(b+4)a^{1-x^2}+3b+4=0$$

не имеет решений ни при каком $a > 1$.

12. Середина каждой стороны основания четырехугольной пирамиды соединена отрезком с точкой пересечения медиан противоположной ей боковой грани. Докажите, что: а) эти отрезки пересекаются и делятся точкой их пересечения в отношении $3:2$, считая от стороны основания; б) середины этих отрезков являются вершинами параллелограмма. в) Найдите также отношение площади этого паралелограмма к площади основания пирамиды.

II (очный) тур

1. Вычислите $\operatorname{arctg}\bigl(\operatorname{tg} 65^\circ - 2\operatorname{tg} 40^\circ\bigr)$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2x^2 - ax + 2a = 0$ имеет два различных целых корня.

3. Пусть a, b и c — натуральные числа, каждое из которых меньше $1\,000\,000$. Докажите, что уравнение $\sqrt[21]{ax^2} + \sqrt[21]{bx} + \sqrt[21]{c} = 0$ не имеет действительных корней.

4. Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}\,abc\sin\alpha$, где a и b — это длины противоположных ребер тетраэдра, α — угол между ними, а c — расстояние между прямыми, проходящими через эти ребра.

5. Найдите объем тела, полученного вращением куба с ребром a вокруг диагонали одной из его граней.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Выясните, является ли функция $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2}\,)$ периодической.

Решение: Докажем вначале, что для любого рационального числа a функция $g(x) = \cos x + \cos(ax)$ является периодической. Действительно, пусть $a = \frac{p}{q}$. Положим $T = 2\pi q$. Тогда

$$g(x \pm T) = \cos(x \pm 2\pi q) + \cos\bigl(\tfrac{p}{q}(x \pm 2\pi q)\bigr) = \cos x + \cos\bigl(\tfrac{p}{q}x \pm 2\pi p\bigr) = \\ = \cos x + \cos\tfrac{px}{q} = \cos x + \cos(ax) = g(x).$$

Далее, известно, что для любого действительного числа существует сходящаяся к нему последовательность рациональных чисел. Пусть $a_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \to \sqrt{2}$ при $n \to +\infty$. Тогда $g_n(x) = \cos x + \cos(a_n x)$ — периодическая функция при любом натуральном n. Поэтому, так как $a_n \to \sqrt{2}$, функция $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$ также является периодической.

7. Решите следующую задачу возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

Докажите, что если $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1+\alpha}$, то $x+y\geqslant 2\alpha$.

Третья олимпиада (2009 год). I (заочный) тур

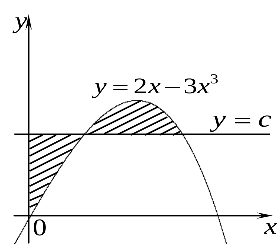
Математический блок

1. Решите уравнение $(x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12$.

2. Докажите неравенство

$$\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{ctg}^6 x\geqslant 2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x).$$

3. При каком значении c прямая $y=c$ пересекает график функции $y=2x-3x^3$ так, что заштрихованные на следующем рисунке фигуры являются равновеликими?



4. Прямые, параллельные сторонам треугольника и касающиеся вписанной в него окружности, отсекают от него три меньших треугольника. Докажите, что сумма площадей отсеченных треугольников не меньше трети площади исходного треугольника.

5. Сфера касается всех ребер тетраэдра, в котором имеется вершина, исходящие из которой ребра попарно перпендикулярны. Найдите радиус этой сферы, если радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен $3\sqrt{3}$.

6. Пусть $\mathcal{S}$ — наименьшее из подмножеств множества целых чисел, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $0\in\mathcal{S}$, 2) если $x\in\mathcal{S}$, то $3x\in\mathcal{S}$ и $3x+1\in\mathcal{S}$.

Найдите количество неотрицательных целых чисел множества $\mathcal{S}$, не превосходящих 2009.

7. Известно, что наибольшее число областей, на которые делят плоскость n прямых, равно $\frac{1}{2}n(n+1)+1$. Сформулируйте условие на такой набор прямых и докажите эту формулу. Найдите в общем случае какую-нибудь формулу для числа областей, на которые делят плоскость n прямых.

Методический блок

А. Ниже приводятся решения задач 8–9. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и пара $(x_0; -y_0)$ также является ее решением. Значит, система имеет единственное решение только в том случае, когда $y_0=0$. Из первого уравнения системы находим, что $x=\pm\sqrt{2}$, а затем из второго, что $a=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $a=\pm\sqrt{2}$.

9. При каком значении параметра a величина $|x+y|$, где $(x;y)$ — решение системы

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2=-a^2+16a-32, \\ 2xy=a, \end{cases}$$

принимает наибольшее значение?

Решение: Имеем,

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2=-a^2+16a-32, \\ 2xy=a, \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2+4y^2=-a^2+16a-32, \\ 8xy=4a, \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения последней системы, получим равенство $4(x+y)^2=-a^2+20a-32$, откуда $2|x+y|=\sqrt{-a^2+20a-32}$. Квадратный трехчлен $-a^2+20a-32$ достигает своего наибольшего значения при $a_0=10$, которое входит в область определения выражения

$\sqrt{-a^2+20a-32}$. Следовательно, это выражение, а, значит, и величина $|x+y|$ также принимает свое наибольшее значение при $a=10$.

Ответ: $a=10$.

Б. Решите задачи 10–12 возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

10. Решите уравнение $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

11. Докажите, что в любом треугольнике длина биссектрисы не превосходит длины медианы, проведенной из той же вершины.

12. Найдите наименьшее значение выражения $x^4-2xy+y^4$.

II (очный) тур

1. Решите уравнение $\dfrac{1}{x+y+z}=\overline{0,xyz}$ (здесь x, y и z — некоторые цифры).

2. Докажите, что если $0<a<b$, то $2ab\ln\frac{b}{a}<b^2-a^2$.

3. Известно, что существуют такие числа $\alpha\neq 0$ и β, что $f(x+\alpha)=f(x)+\beta$. Докажите, что функцию $f(x)$ можно представить как сумму линейной функции и периодической функции.

4. Радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника равны 2, 3 и 6 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

5. Плоскость делит выходящие из вершины A медианы граней ABC, ACD и ABD тетраэдра $ABCD$ в отношениях $1:2$, $1:1$ и $1:2$, считая от точки A. Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит эту пирамиду.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Найдите множество значений функции $f(x)=x+\dfrac{2}{x^2}$ при $x>0$.

Решение: В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим справедливо неравенство

$$x+\frac{2}{x^2}\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\,.$$

Поскольку число x может быть выбрано сколь угодно большим, то промежуток $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}};+\infty\right)$ содержит сколь угодно малые положительные числа, откуда мы и получаем ответ: множеством значений данной функции является промежуток $(0;+\infty)$.

7. Решите задачу возможно бо́льшим числом способов . Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

Найдите множество значений функции $f(x) = x - 1 + \sqrt{6x - x^2}$.

Четвертая олимпиада (2010 год). I (заочный) тур

Математический блок

1. Определите число решений уравнения

$$2^{3x} + 4a \cdot 2^{2x} + a^2 \cdot 2^x - 6a^3 = 0$$

в зависимости от значения параметра a.

2. Докажите, что число $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$ делится на 91 при любом натуральном n.

3. Решите уравнение $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

4. Точка K лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, а точка M — на его стороне AD. Отрезки CM и DK пересекаются в точке L, а отрезки AK и BM — в точке N. Найдите наибольшее значение отношения площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

5. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все они имеют ровно одну общую точку.

6. Сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через его вершину D, пересекает боковые ребра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, M и N, соответственно. Найдите отношение объема пирамиды с вершиной в точке P и основанием $DKMN$ к объему данного параллелепипеда, если известно, что точка P делит ребро DD_1 в отношении $DP : PD_1 = m : n$.

7. Докажите, что ни при каких целых значениях x и y число

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$$

не является простым.

Методический блок

A. Ниже приводятся решения задач 8–9. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите все значения x, при которых $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$.

Решение: Так как

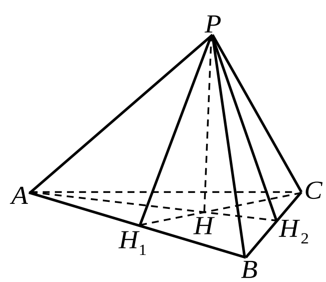
$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \tfrac{1-x}{1+x}\right) = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - \frac{x(1-x)}{1+x}} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1,$$

то данное равенство верно на всей его области определения.

Ответ: $x \neq -1$.

9. Боковые ребра PA, PB и PC пирамиды $PABC$ равны, соответственно, 2, 2 и 3, ее основание — правильный треугольник. Известно, что площади боковых граней пирамиды равны между собой. Найдите объем пирамиды $PABC$.

Решение: Так как площади боковых граней и стороны основания пирамиды равны между собой, то равны и высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды. Пусть H — основание высоты пирамиды, H_1, H_2 и H_3 — основания высот боковых граней, проведенных из точки P (рисунок).



Тогда прямоугольные треугольники PHH_1, PHH_2 и PHH_3 равны, значит, равны и их катеты HH_1, HH_2 и HH_3. С другой стороны, отрезки HH_1, HH_2 и HH_3 являются проекциями наклонных PH_1, PH_2 и PH_3, которые перпендикулярны сторонам основания пирамиды, следовательно, эти отрезки также перпендикулярны сторонам основания. Таким образом, точка H — центр окружности, вписанной в основание пирамиды, т. е. центр правильного треугольника ABC. Значит, пирамида $PABC$ — правильная, в частности, ее боковые ребра равны друг другу, что противоречит данному в задаче условию.

Ответ: заданной пирамиды не существует

Б. Решите задачи 10–12 возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

10. Определите число решений уравнения $\sqrt{x+3} = ax + 2$ в зависимости от значения параметра a.

11. Докажите, что во всяком четырехугольнике отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равно как и отрезок с концами в серединах его диагоналей, проходят через одну точку и делятся ею пополам.

12. Найдите все пары положительных чисел a и b, для которых из чисел $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ можно составить арифметическую прогрессию.

II (очный) тур

1. Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $3\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 4\cos\alpha = 12$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана при помощи рекуррентного соотношения $a_n = qa_{n-1} + d$, где $q \neq 1$. Докажите, что существует число c, при котором последовательность $b_n = a_n + c$ будет геометрической прогрессией.

3. Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $3x + 5y = a$ имеет единственное решение в натуральных числах.

4. Пусть x и y — положительные числа, сумма которых равна 2. Найдите наибольшее значение выражения $x^2y^2(x^2+y^2)$.

5. Две треугольные пирамиды $MABC$ и $NABC$ имеют общее основание и не имеют других общих точек. Все вершины обеих пирамид лежат на одной и той же сфере. Найдите длины ребер MA и MB, если известно, что они равны друг другу, а длины всех остальных ребер этих пирамид равны $\sqrt{3}$.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Найдите все функции $f(x)$, определенные при всех $x \in \mathbb{R}$ и такие, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение: Подставив $x = y = 0$ в равенство $f(x+y) = f(x) + f(y)$, получим, что $f(0) = 2f(0)$, откуда $f(0) = 0$. Вычислим производную функции $f(x)$ в произвольной точке $x \in \mathbb{R}$. Согласно определению производной имеем,

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y)-f(0)}{y-0} = f'(0).$$

Положим $f'(0) = a$. Мы доказали, что $f'(x) = a$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(x) = ax + b$. Поскольку $f(0) = 0$, то $b = 0$, значит, $f(x) = ax$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют все функции вида $f(x) = ax$ и только они.

Ответ: $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

7. Решите задачу возможно бóльшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

Все вершины прямоугольного треугольника ABC лежат на параболе $y = x^2$, а его гипотенуза AB параллельна оси обсцисс. Докажите, что высота CD этого треугольника равна 1.

Пятая олимпиада (2011 год). I (заочный) тур

Математический блок

1. Найдите количество натуральных решений уравнения

$$\left[\frac{x}{2010}\right] = \left[\frac{x}{2011}\right] + 1.$$

2. Решите уравнение $2\log_3 \operatorname{ctg} x = \log_2 \cos x$.

3. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leqslant \frac{3}{2}\,.$$

4. Две непересекающиеся окружности расположены так, что одна из их общих внутренних касательных перпендикулярна одной из их общих внешних касательных. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и третьей общей касательной данных окружностей, если их радиусы равны r_1 и r_2.

5. Найдите все натуральные значения n, такие что число $n^4 + 64^n$ является составным.

6. Сфера касается всех ребер тетраэдра, два противоположных ребра которого равны a и b, а все остальные ребра равны между собой. Найдите радиус этой сферы.

7. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна, при этом $f(x+1) = f(x)$ при всех действительных x.

а) Докажите, что $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}\,dx \geqslant 1$.

б) Найдите все значения α, такие что $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\,dx \geqslant 1$.

Методический блок

А. Ниже приводятся решения задач 8–9. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Решите уравнение $\dfrac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$.

Ответ: 2.

Решение: Функция $y = \log_2 x$ является возрастающей, следовательно $y = \frac{3}{\log_2 x}$ — убывающая функция. С другой стороны, функция $y = 4x - 5$ является возрастающей, следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 2$ — решение данного уравнения.

9. Из двух групп лыжников общей численностью 100 человек составили сборную команду из 15 человек. Первая группа выделила $p\%$ своего состава, а вторая — 10% своего состава. Сколько всего лыжников в каждой группе?

Ответ: 50 и 50, или 20 и 80, или 10 и 90.

Решение: Обозначим через x и y число лыжников в этих группах. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ px + 10y = 1500. \end{cases}$$

Следовательно $x = \frac{500}{p-10}$ и $y = \frac{100(p-15)}{p-10}$, где $15 < p < 100$. Так как x – целое число, то число $p - 10$ должно быть делителем числа 500. Перебором находим ответ:

p	x	y
20	50	50
35	20	80
60	10	90

Б. Решите задачи 10–12 возможно бо́льшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

10. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ в той полуплоскости, которой не принадлежит треугольник ABC. Найдите расстояние от вершины C прямого угла треугольника до центра квадрата, если известно, что $BC = a$ и $AC = b$.

11. Решите уравнение $27^x - 7\sqrt[3]{7 \cdot 3^x + 6} = 6$.

12. Докажите неравенство $P > 4R$, где P — периметр, а R — радиус описанной окружности остроугольного треугольника.

II (очный) тур

1. Докажите, что число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2009 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2010$ делится на 2011.

2. Найдите все прямоугольные треугольники с целыми длинами сторон, в которых гипотенуза на единицу длиннее одного из катетов.

3. Основанием пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, основание AD которой в два раза больше основания BC. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABP, параллельная стороне AB. Найдите отношение объемов тел, на которые плоскость DMN делит эту пирамиду.

4. Докажите, что для любых целых x и y число $x^4 + y^4 + (x+y)^4$ есть удвоенный квадрат некоторого целого числа.

5. Двое бросают монету: один бросил ее 10 раз, а другой — 11 раз. Найдите вероятность того, что у второго орел выпал большее число раз, чем у первого.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Решите уравнение $(x^2 + 6x - 6)^2 + 6(x^2 + 6x - 6) - 6 = x$.

Решение: Пусть $f(x) = x^2 + 6x - 6$. Тогда исходное уравнение принимает вид $f(f(x)) = x$. Поскольку $f(f(x)) = x \iff f(x) = f^{-1}(x)$, а точки пересечения графиков взаимно обратных функций лежат на прямой $y = x$, достаточно решить уравнение $f(x) = x$. Решая уравнение $x^2 + 6x - 6 = x$, получаем, что $x = -6$, $x = 1$.

Ответ: $\{-6; 1\}$.

7. Решите следующую задачу возможно бо́льшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

Сравните числа $2 + \log_2 6$ и $2\sqrt{5}$.

Шестая олимпиада (2012 год). I (заочный) тур

Математический блок

1. Выясните, при каких значениях a найдутся действительные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a} = x + y + 17$.

2. Решите уравнение $10x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$.

3. В ряд выписали все натуральные числа, меньшие миллиарда, имеющие ровно 13 натуральных делителей (включая единицу и само число). Сколько среди них чисел с четной суммой цифр?

4. Докажите, что при любых $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ и $c \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\log_{b+c} a^2 + \log_{a+c} b^2 + \log_{a+b} c^2 \geqslant 3.$$

5. Найдите условия на коэффициенты многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$, при выполнении которых этот многочлен имеет три различных действительных корня, являющихся последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

6. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного семиугольника до произвольной прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой.

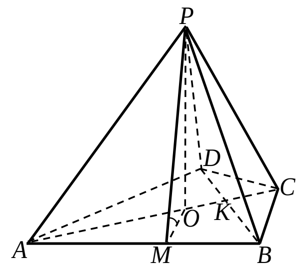
7. Окружность и парабола имеют ровно две общие точки, одна из которых является точкой касания данной параболы и данной окружности. Верно ли, что и вторая общая точка является их точкой касания?

Методический блок

А. Ниже приводятся решения задач 8–9. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите объем пирамиды $PABCD$, в основании которой лежит четырехугольник $ABCD$ со сторонами 5, 5, 10 и 10, меньшая диагональ которого равна $4\sqrt{5}$, если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°.

Решение: Пусть O — проекция вершины пирамиды на плоскость ее основания, а K — точка пересечения диагоналей основания (рисунок).



Тогда O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, следовательно, равны суммы длин его противоположных сторон. Положим для определенности $AB = AD = 10$, $BC = CD = 5$. Треугольники ABC и ADC равны, следовательно, отрезок CK является биссектрисой, медианой и высотой равнобедренного треугольника BCD. Таким образом, диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и равны $4\sqrt{5}$ и $5\sqrt{5}$. Его площадь S равна $\frac{4\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}}{2} = 50$. Радиус вписанной в основание окружности определяется из формулы $r = \frac{2S}{p} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}$. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом $45°$, то $PO = \frac{10}{3}$. Значит объем пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot 50\cdot\frac{10}{3} = \frac{500}{9}$.

9. Докажите, что при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) + \sin x > \sin(\sin x) + \operatorname{tg} x.$$

Решение: Положим $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x + \sin x - \sin(\sin x)$. Найдем производную этой функции,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - \cos(\sin x)\cdot\cos x =$$

$$= \frac{1-\cos^2(\operatorname{tg} x)}{\cos^2(\operatorname{tg} x)\cdot\cos^2 x} + \cos x\,(1-\cos(\sin x)) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ данная функция является возрастающей. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Б. Решите задачи 10–12 возможно бо́льшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

10. Точка P лежит на дуге AB окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC. Докажите, что $PC = PA + PB$.

11. Постройте квадратный трехчлен $p(x)$, такой что $p(a) = a^4$, $p(b) = b^4$ и $p(c) = c^4$ (здесь a, b и c — различные заданные числа).

12. Пусть A, B и C — точки пространства, не лежащие на одной прямой. Обозначим через S площадь треугольника ABC. Докажите, что

$$S^2 = S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2,$$

где S_{xy}, S_{yz} и S_{xz} — площади проекций треугольника ABC на координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz, соответственно.

II (очный) тур

1. Решите уравнение $3^{x^2+x-2} - 3^{x^2-4} = 80$.

2. Пусть функция $f(x)$ задана $\mathbb{R}$, причем для любого x выполняется условие $f(x+2) + f(x) = x$. Известно также, что $f(x) = x^3$ на промежутке $(-2; 0]$. Найдите $f(2012)$.

3. Постройте прямую, проходящую через вершину выпуклого четырехугольника и делящую его на две равновеликие части.

4. а) Докажите, что любое сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через середины двух его скрещивающихся ребер, делит тетраэдр на равновеликие части.

б) Докажите, что сформулированное в предыдущем пункте утверждение верно для любого (не обязательно правильного) тетраэдра.

5. Найдите наименьшее простое число p, такое что $n^2 + n + 11$ делится на p при некотором целом n.

6. Оцените три приведенные ниже решения и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты, а также приведите верное решение этой задачи.

Из карточной колоды выбрали шесть карт — три черной масти и три красной масти. Выбранные карты перемешали и сложили стопкой. Найдите вероятность того, что три нижние карты окажутся одной масти.

Обозначим карты красной масти через **к**, черной — через **ч**.

Решение 1: Перечислим все возможные случаи. Нижними могут оказаться: а) 3**к**; б) 2**к** и 1**ч**; в) 1**к** и 2**ч**; г) 3**ч**. Из этих 4 случаев подходящими являются два. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Решение 2: Перечислим все возможные случаи. Среди верхних трех карт может оказаться: а) на 1**к** больше, чем среди нижних; б) на 1**ч** больше, чем среди нижних; в) все карты одной масти. Из этих трех случаев условию удовлетворяет только один — случай в). Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Решение 3: Есть только восемь случаев возможного расположения трех нижних карт: а) **ччч**: б) **ччк**; в) **чкч**; г) **кчч**; д) **чкк**; е) **кчк**; ж) **ккч**; з) **ккк**. Из этих 8 случаев условию удовлетворяют только 2 случая — случаи а) и г). Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

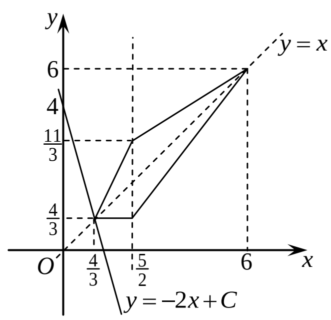
7. Решите следующую задачу возможно бо́льшим числом способов. Различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи. Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

В прямоугольник вписан четырехугольник так, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырехугольника. Докажите, что периметр четырехугольника не меньше удвоенной длины диагонали этого прямоугольника.

Решения задач

Первая олимпиада (2007 год)

1.I.1. На следующем рисунке изображено множество, заданное уравнением $3|x-y|+|2x-5|=x+1$.



Положим $C=2x+y$. В задаче требуется найти наименьшее значение C для всех точек изображенного множества. Перепишем это соотношение в виде $y=C-2x$. С геометрической точки зрения требуется найти наименьшее C, при котором прямая $y=C-2x$ пересекает данное множество. Ясно, что искомым является то значение C, при котором эта прямая проходит через точку $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$. Таким образом, $C=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$.

Ответ: 4.

1.I.2. Решение 1. Разложим на множители левую часть данного неравенства,

$$x^3-(a^2+a+1)x^2+(a^3+a^2+a)x-a^3=(x-1)(x-a)(x-a^2).$$

Если среди чисел 1, a и a^2 нет одинаковых, то множеством решений данного в задаче неравенства является объединение луча и отрезка.

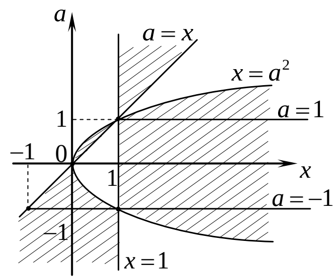
а) Если $a=1$, то мы получаем неравенство $(x-1)^3\geqslant 0$, решением которого является луч $[1;+\infty)$.

б) Пусть $a=a^2$. Поскольку случай $a=1$ уже рассмотрен, предположим, что $a=0$. Множеством решений неравенства $x^2(x-1)\geqslant 0$ является объединение $\{0\}\cup[1;+\infty)$.

в) Пусть $a^2=1$. Случай $a=1$ уже рассмотрен, предположим, что $a=-1$. Получаем неравенство $(x-1)^2(x+1)\geqslant 0$, решением которого является луч $[-1;+\infty)$.

Ответ: $a = \pm 1$.

Решение 2. Изобразим на координатной плоскости Oxa множество точек, заданное неравенством $(x-1)(x-a)(x-a^2) \geqslant 0$ (рисунок).



Ясно, что множеством решений данного в задаче неравенства будет луч $[1; +\infty)$ при $a = 1$ и луч $[-1; +\infty)$ при $a = -1$.

Комментарий. Возможна другая интерпретация рассуждения, проведенных в решении 2. Именно, рассмотрим на плоскости множество, заданное неравенством $(x-1)(x-y)(x-y^2) \geqslant 0$. Оно имеет тот же вид, что и на рисунке выше, просто в этом случае мы используем обычные обозначения x и y для осей координат. Нас интересуют те значения a, при которых прямая $y = a$ пересекается с этим множеством по некоторому лучу. Очевидно, что таковыми являются значения $a = 1$ и $a = -1$.

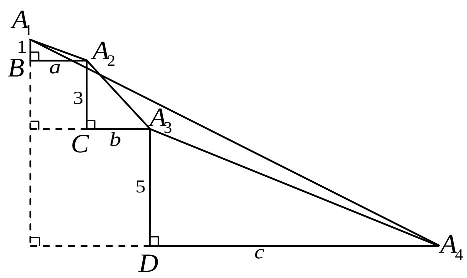
1.I.3. Решение 1. Введем векторы $\boldsymbol{m}(a; 1)$, $\boldsymbol{n}(b; 3)$ и $\boldsymbol{p}(c; 5)$ и положим $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{p}$. Так как $a + b + c = 12$, то $\boldsymbol{q}(12; 9)$. Так как $|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{p}| \leqslant |\boldsymbol{n}| + |\boldsymbol{m}| + |\boldsymbol{p}|$, то

$$15 = \sqrt{12^2 + 9^2} \leqslant \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 9} + \sqrt{c^2 + 25}\,.$$

Равенство достигается, если векторы $\boldsymbol{m}(a; 1)$, $\boldsymbol{n}(b; 3)$ и $\boldsymbol{p}(c; 5)$ являются сонаправленными, $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, откуда следует, что $b = 3a$ и $c = 5a$. Значит, $a + 3a + 5a = 12$, откуда $a = \frac{4}{3}$, $b = 4$, $c = \frac{20}{3}$.

Ответ: 15.

Решение 2. Отложим последовательно три прямоугольных треугольника. Треугольник A_1A_2B с катетами $A_1B = 1$ и $A_2B = a$, треугольник A_2A_3C с катетами $A_2C = 3$ и $A_3C = b$ и треугольник A_3A_4D с катетами $A_3D = 5$ и $A_4D = c$ (рисунок).

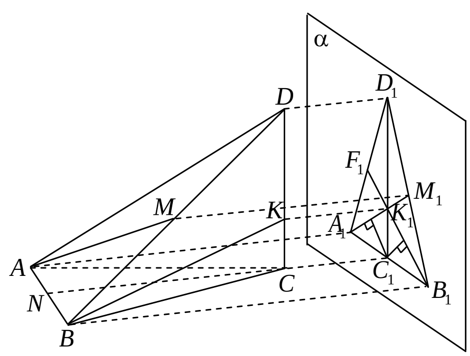


Сумма длин гипотенуз этих треугольников равна

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+9}+\sqrt{c^2+25}\,.$$

Ясно, что эта сумма принимает наименьшее значение. если точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной прямой, т. е. если эти треугольники подобны, что имеет место, если $b=3a$ и $c=5a$. Так как $a+b+c=12$, то $a=\frac{4}{3}$, $b=4$ и $c=\frac{20}{3}$.

1.I.4. Спроектируем данный тетраэдр на плоскость α, перпендикулярную прямой CN (рисунок).



Расстояние от прямой CN до прямой BK и расстояние от прямой CN до прямой AM равны, соответственно, расстояниям между их проекциями на плоскость α, равными расстояниям от основания C_1 высоты D_1C_1 равнобедренного треугольника $A_1B_1D_1$ до его медиан B_1F_1 и A_1M_1.

1.I.5. Пусть $a < b < c$ — искомые числа. Нам следует рассматривать все числа, меньшие числа abc. Среди них имеется $bc - 1$ чисел, кратных a, $ac - 1$ чисел, кратных b, и $ab - 1$ чисел, кратных c. Таким образом,

$$bc - 1 + ac - 1 + ab - 1 = 356 + 2 \cdot 36, \text{ или } ab + bc + ac = 431.$$

Аналогичным образом, есть $c - 1$ чисел, кратных ab, $b - 1$ чисел, кратных ac, и $a - 1$ чисел, кратных bc, таким образом,

$$c - 1 + b - 1 + c - 1 = 36, \text{ или } a + b + c = 39.$$

Наконец, в начале последовательности первая «двойка» соответствует числу ab, а следующие за ней единицы соответствуют $b - 1$ числам кратным a, $a - 1$ числам, кратным b, и $\left[\frac{ab}{c}\right]$ числам, кратным c. Следовательно,

$$b - 1 + a - 1 + \left[\tfrac{ab}{c}\right] = 16, \text{ или } a + b + \left[\tfrac{ab}{c}\right] = 18.$$

Таким образом, мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} ab + bc + ac = 431, \\ a + b + c = 39, \\ a + b + \left[\frac{ab}{c}\right] = 18. \end{cases}$$

Добавив к обеим частям последнего уравнения дробную часть $\left\{\frac{ab}{c}\right\}$ числа $\frac{ab}{c}$ и домножив их на на c, мы получим уравнение

$$ac + bc + ab = c\left(18 + \left\{\tfrac{ab}{c}\right\}\right),$$

поэтому

$$c\left(18 + \left\{\tfrac{ab}{c}\right\}\right) = 431, \text{ откуда } \tfrac{431}{19} < c < \tfrac{431}{18}\,.$$

Значит, $c = 23$. Решив оставшиеся уравнения, получим, что $a = 7$ и $b = 9$.

1.I.6. Решение 1. Так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения, то мы вправе перейти к уравнению

$$x^2 - ax + 2 - \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

левую часть которого преобразуем следующим образом.

$$\begin{aligned} &x^2 - ax + 2 - \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2} = \\ &\qquad = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{x^2} - \frac{b}{x} + \frac{b^2}{4} + 2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \\ &\qquad\qquad = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Поскольку по условию уравнение имеет решение, то $2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \leqslant 0$, таким образом, $a^2 + b^2 \geqslant 8$.

Решение 2. Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, получим, что

$$x^4+2x^2+1 = ax^3+bx = x(ax^2+b) \leqslant |x|\cdot|ax^2+b| \leqslant |x|\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^4+1}\,.$$

Следовательно,

$$\sqrt{a^2+b^2} \geqslant \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} + \frac{2|x|}{\sqrt{x^4+1}} \geqslant 2\sqrt{2}\,,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Замечание. Зафиксируем корень x_0 данного уравнения. Тогда уравнение $ax_0^3 + bx_0 - (x_0^4 + 2x_0^2 + 1)$ есть уравнение прямой в плоскости Oab. Выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние от точки $(a;b)$ до начала координат, которое не меньше расстояния от начала координат до этой прямой. А это в точности есть неравенство, полученное в предыдущем решении.

1.I.7. Докажем, что данное неравенство справедливо при всех $a, b \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $k \geqslant n$. Положим $u = (a+b)^2$ и $v = 2ab$. Тогда $a^2 + b^2 = u - v$, при этом $u \geqslant 2v$. Данное неравенство перепишется в виде

$$v^k(u-v)^n \leqslant \left(\frac{u}{2}\right)^{k+n}, \text{ или } \left(\frac{v}{u}\right)^k \left(1 - \frac{v}{u}\right)^n \leqslant \frac{1}{2^{k+n}}\,.$$

Теперь положим $t = \frac{v}{u} \leqslant \frac{1}{2}$ и рассмотрим функцию $f(t) = t^k(1-t)^n$ на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Имеем,

$$f'(t) = kt^{k-1}(1-t)^n - nt^k(1-t)^{n-1} = t^{k-1}(1-t)^{n-1}(k - (k+n)t).$$

Если $k \geqslant n$, то $\frac{k}{k+n} \geqslant \frac{1}{2}$, поэтому функция $f(t)$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, значит, $f(t) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{k+n}}$. Если $k < n$, то $\frac{k}{k+n} < \frac{1}{2}$, поэтому в отрезке существует точка максимума, значение в которой больше, чем $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Замечание. Докажем другим способом, что если $k \geqslant n$, то неравенство справедливо при всех $a, b \geqslant 0$. Положим $\ell = k-n$ и перепишем данное неравенство в виде

$$(ab)^n(a^2+b^2)^n(ab)^\ell \leqslant \frac{(a+b)^{4n}}{8^n} \cdot \frac{(a+b)^{2\ell}}{4^\ell}.$$

Осталось заметить, что $ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4}$ и $ab(a^2+b^2) \leqslant \frac{(a+b)^4}{8}$, поскольку

$$(a+b)^4 - 8ab(a^2+b^2) = (a-b)^4 \geqslant 0.$$

1.I.8. Комментарий. В приведенном решении допущена следующая ошибка. Так как $2^x > 0$. то множеством значений функции $y = 2^x + 2^{-x}$ является промежуток $[2; +\infty)$. Следовательно, необходимо найти наименьшее значение функции $g(t) = t^2 - 2t + 3$ на промежутке $[2; +\infty)$. На этом промежутке функция $g(t)$ озрастает, поэтому ее наименьшее значение достигается при $t = 2$.

Ответ: 3.

1.I.9. Комментарий. В приведенном решении допущена следующая ошибка. Уравнение $\sin 2x = t^2 - 1$ не равносильно уравнению $\sin x - \cos x = t$, а является его следствием. Поэтому в ответе имеются числа, не являющиеся корнями исходного уравнения.

1.I.10. Комментарий. В приведенном обосновании допущена следующая ошибка. Формула, выражающая $\sin 4x$ через $\sin x$, не определяет функцию $f(x)$, такую, что $\sin 4x = f(\sin x)$, поскольку в этой формуле условия задаются не на значения $\sin x$, а на аргумент синуса. Более того, такой функции не существует. Подставив сначала $x = \frac{\pi}{3}$, а затем $x = \frac{2\pi}{3}$, мы получим, что, с одной стороны, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а с другой — что $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, чего быть не может.

1.I.11. Решение 1. Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным следует, что

$$\frac{\sqrt{2005}+\sqrt{2007}}{2} < \sqrt{\frac{2005+2007}{2}} = \sqrt{2006},$$

откуда и следует искомое неравенство.

Тема: «Неравенства между средними»

Решение 2. Пусть n — натуральное число. Имеем,

$$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}<2\sqrt{n} \iff 2n+2\sqrt{n^2-1}<4n \iff \sqrt{n^2-1}<n,$$

что верно для любого числа n.

Тема: «Доказательство неравенств»

Решение 3. Имеем,

$$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}<2\sqrt{n} \iff \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \iff$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \iff \sqrt{n+1}>\sqrt{n-1},$$

что очевидно верно.

Тема: «Доказательство неравенств»

Решение 4. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$. Так как

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}}<0$$

при $x>0$, то $f(x)$ — убывающая функция. Поэтому $f(n+1)<f(n)$, откуда $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, или $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$.

Тема: «Примемение производной для исследования функций»

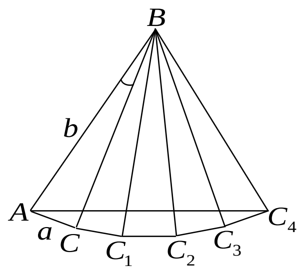
Решение 5. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}(1,1)$ и $\boldsymbol{b}(\sqrt{2005},\sqrt{2007})$. Эти векторы не параллельны, поэтому $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$, откуда и следует, что $\sqrt{2005}+\sqrt{2007}<2\sqrt{2006}$.

Тема: «Свойства скалярного произведения»

Решение 6. Функция $f(x)=\sqrt{x}$ является выпуклой вверх, поэтому $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Подставив $x_1=2005$ и $x_2=2007$, получим требуемое неравенство.

Тема: «Выпуклые функции»

1.I.12. Решение 1. Достроим данный треугольник ABC до правильного треугольника ABC_4, последовательно пристраивая к боковым сторонам треугольники, равные данному (рисунок).



Длина основания AC_4, равная b, меньше длины ломаной $ACC_1C_2C_3C_4$, равной $5a$.

Тема: «Неравенство треугольника»

Решение 2. Ясно, что $a = 2b\sin\frac{\pi}{30}$. Неравенство $b < 5a$ равносильно неравенству $\sin\frac{\pi}{30} > \frac{1}{10}$. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Так как синус на этом отрезке является выпуклой вверх функцией, то хорда лежит ниже графика синуса. Хорда, проходящая через начало координат и точку с абсциссой $\frac{\pi}{6}$, задается уравнением $y = \frac{3}{\pi}x$. Точка хорды с абсциссой $\frac{\pi}{30}$ лежит ниже соответствующей точки графика, откуда и следует, что

$$\sin\frac{\pi}{30} > \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{30} = \frac{1}{10}\,.$$

Тема: «Выпуклые функции»

1.II.1. Заметим, что $f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{1+x^3}$, откуда следует соотношение

$$f(x) + f\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{1}{1+x^3} = 1.$$

Следовательно, для каждой пары различных чисел k и n из множества $\{1, 2, \ldots, 2007\}$ справедливо равенство $f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n}{k}\right) = 1$. В данной сумме имеются $\frac{2007\cdot 2006}{2}$ пар, сумма элементов в которых равна 1. Кроме того, в ней имеются 2007 слагаемых вида $f\left(\frac{k}{k}\right) = f(1) = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомая сумма равна

$$\frac{2007}{2} + \frac{2007\cdot 2006}{2} = \frac{2007^2}{2}\,.$$

1.II.2. Пусть своим первым ходом Петр ставит -1 в качестве коэффициента при x. Если Павел поставит на любое из двух оставшихся мест число $a \neq \pm 1$, то на последнее место Петр может поставить число $-a$. В результате получится многочлен вида

$$x^3 + bx^2 - x - b = (x-1)(x+1)(x+b).$$

Так как по предположению $b \neq \pm 1$, то полученный многочлен имеет три различных корня: $-1; 1; -b$. Если Павел поставит 1 или -1 перед x^2, то Петр может поставить 0 на последнее место, получив многочлен вида $x^3 \pm x^2 - x = x(x^2 \pm x - 1)$, который имеет три различных корня. Если Павел ставит на место свободного члена ± 1, то Петру можно поставить $\mp\frac{5}{2}$ перед x^2. В одном из вариантов мы получим многочлен

$$x^3 - \tfrac{5}{4}\,x^2 - x - 1 = \big(x - \tfrac{1}{2}\big)(x^2 - 2x - 2)$$

с корнями $\frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{3}$.

Замечание. Чего не надо делать Петру, так это фиксировать своим первым ходом значение коэффициента при x^2. Дело в том, что в таком случае Павел может подобрать такой коэффициент при x, чтобы кубическая функция $y = x^3 + px^2 + qx$ была возрастающей, и, следовательно, данный многочлен имел только один действительный корень.

1.II.3. Положим $x = 30k + d$, где $k \in \mathbb{Z}$, а $d \in \{0, 1, \ldots, 29\}$. Подставив это выражение в данное уравнение, получим, что

$$30k + d = 15k + \left[\tfrac{d}{2}\right] + 10k + \left[\tfrac{d}{3}\right] + 6k + \left[\tfrac{d}{5}\right],$$

или что $k = d - \left[\frac{d}{2}\right] - \left[\frac{d}{3}\right] - \left[\frac{d}{5}\right]$. Таким образом, для каждого из тридцати значений d имеется единственное значение k, такое что $x = 30k + d$ является решением данного уравнения.

Ответ: 30 решений.

1.II.4. Решение 1. Проведем рассуждение по индукции по степени многочлена. База очевидна. Предположим, что утверждение верно для многочлена степени $n-1$. Пусть $p(x)$ – многочлен степени n, запишем его в виде $p(x) = (x - x_1)q(x)$. По индукционному предположению $\big(q'(x)\big)^2 \geqslant q(x)q''(x)$. Имеем

$$p'(x) = q(x) + (x - x_1)q'(x), \quad p''(x) = 2q'(x) + (x - x_1)q''(x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\big(p'(x)\big)^2 &= \big(q(x)+(x-x_1)q'(x)\big)^2 = \\ &= q^2(x)+2(x-x_1)q(x)q'(x)+(x-x_1)^2\big(q'(x)\big)^2 \geqslant \\ &\geqslant 2(x-x_1)q(x)q'(x)+(x-x_1)^2q(x)q''(x) = p(x)p''(x).\end{aligned}$$

Решение 2. Неравенство очевидно верно в точках, являющихся корнями данного многочлена. Теперь воспользуемся тем, что

$$\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)' = \frac{p(x)p''(x)-\big(p'(x)\big)^2}{p^2(x)}\ .$$

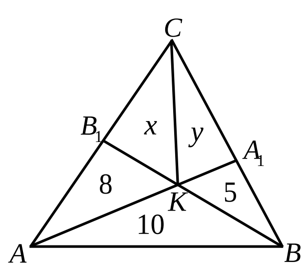
Осталось заметить, что если $p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, то

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\ ,$$

таким образом,

$$\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)' = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)^2} < 0.$$

1.II.5. Будем пользоваться следующим соображением. Если прямая проходит через вершину треугольника, то отношение площадей частей, на которые она разделила этот треугольник, равно отношению длин отрезков, на которые она разделила противоположную сторону, $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{n}$. Соединим вершину C отрезком с точкой K и положим $x=S_{B_1CK}$ и $y=S_{A_1CK}$ (рисунок).



Тогда

$$\frac{10}{8} = \frac{BK}{KB_1} = \frac{y+5}{x} \text{ и } \frac{10}{5} = \frac{AK}{KA_1} = \frac{x+8}{y}\,.$$

таким образом, $5x = 4y + 20$ и $2y = x + 8$. Решив полученную систему, получим, что $x = 12$ и $y = 10$, таким образом, $x + y = 22$.

Ответ: 22.

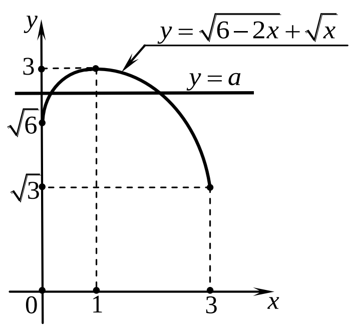
1.II.6. Решение 1. Данная функция определена и непрерывна на отрезке $[0; 3]$. Вычислим ее производную

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{6-2x}} = \frac{\sqrt{6-2x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x(6-2x)}}\,.$$

Решив неравенство $\sqrt{6-2x} \geqslant 2\sqrt{x}$, получим, что $x \leqslant 1$. Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-2x}$ возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на отрезке $[1; 3]$. В таблице приведены ее значения на концах отрезка $[0; 3]$ и в точке $x = 1$.

x	0	1	3
$f(x)$	$\sqrt{6}$	3	$\sqrt{3}$

На следующем рисунке изображен график рассматриваемой функции,



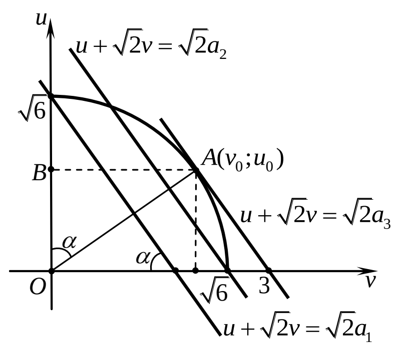
из которого видно, что данное уравнение имеет один корень при $a = 3$ и $a \in [\sqrt{3}; \sqrt{6})$ и имеет два корня при $a \in [\sqrt{6}; 3)$.

Тема: «Применение производной для исследования функций»

Решение 2. Положим $u = \sqrt{2x}$ и $v = \sqrt{6 - 2x}$. Задача сводится к определению числа решений системы

$$\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \\ u^2 + v^2 = 6, \\ u + \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}\, a. \end{cases}$$

Уравнение $u^2 + v^2 = 6$ при условиях $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$ задает лежащую в первом координатном угле четвертинку окружности. Таким образом, исходная задача сводится к решению вопроса о числе точек пересечения четверти окружности и прямой, заданной уравнением $u + \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}\, a$, в зависимости от значения параметра a (рисунок).



Ясно, что система, а, значит, и данное уравнение, имеет одно решение при $a = a_3$ и $a \in [a_1; a_2)$ и имеет два решения при $a \in [a_2; a_3)$. При других значениях a система решений не имеет. Значение a_1 находим из того условия, что прямая $u + \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}\, a_1$ проходит через точку $(0; \sqrt{6}\,)$. Таким образом, $\sqrt{6} = \sqrt{2}\, a_1$, откуда $a_1 = \sqrt{3}$. Прямая $u + \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}\, a_2$ проходит через точку $(\sqrt{6}; 0)$, поэтому $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2}\, a_2$, откуда $a_2 = \sqrt{6}$.

Прямая $u + \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}\, a_3$ касается окружности в точке $A(v_0; u_0)$. Координаты этой точки найдем из прямоугольного треугольника ABO, гипотенуза OA которого равна $\sqrt{6}$. Так как $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, то $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ и $\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$. Поэтому $v_0 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2$ и $u_0 = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$. Подставив найденные значения в уравнение $u + \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}\, a_3$, получим, что $a_3 = 3$.

Тема: «Графическое исследование уравнений и их систем. Уравнение окружности и прямой»

Решение 3. Видоизменим предыдущее решение, положив $u = \sqrt{x}$ и $v = \sqrt{6-2x}$. В данном случае задача сводится к исследованию вопроса о числе решений системы

$$\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \\ 2u^2 + v^2 = 6, \\ u + v = a. \end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \\ 2u^2 + v^2 = 6 \end{cases}$$

задает лежащую в первом координатном угле четвертинку эллипса с концами в точке $A(\sqrt{3}; 0)$ оси абсцисс и точке $B(0; \sqrt{6}\,)$ оси ординат. Исходная задача сводится к решению вопроса о числе точек пересечения этой дуги эллипса и прямой, заданной уравнением $u+v=a$. Если $a < \sqrt{3}$, то прямая $v = a - u$ не пересекает эту дугу. Теперь найдем значение параметра a, при котором эта прямая касается данной дуги. Для этого найдем a, такое, что система

$$\begin{cases} 2u^2 + v^2 = 6, \\ u + v = a \end{cases} \quad \text{или, что равносильно, уравнение } 2u^2 + (a-u)^2 = 6$$

имеет единственное решение. Имеем, $3u^2 - 2au + a^2 - 6 = 0$, откуда $a^2 - 3(a^2 - 6) = 18 - 2a^2 = 0$ – условие того, что уравнение имеет единственное решение. Так как $a \geqslant 0$, то $a = 3$. Более того, мы можем сказать, что при $a > 3$ система, а, значит, и уравнение не имеет решений. Осталось заметить, что при $\sqrt{3} \leqslant a < \sqrt{6}$ прямая пересечет дугу эллипса в единственной точке, тогда как при $\sqrt{6} \leqslant a < 3$ — в двух.

Тема: «Методы решения иррациональных уравнений»

Решение 4. Запишем уравнение в виде $\sqrt{6-2x} = a - \sqrt{x}$. Возведя обе его части в квадрат, перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ a \geqslant \sqrt{x}, \\ 6 - 2x = a^2 + x - 2a\sqrt{x}. \end{cases}$$

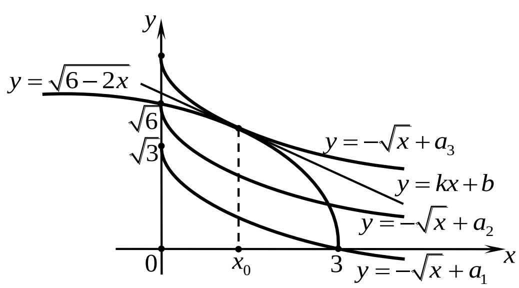
Положив $t = \sqrt{x}$, получим систему

$$\begin{cases} t \geqslant 0, \\ t \leqslant a, \\ 3t^2 - 2at + a^2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Поскольку дискриминант квадратного уравнения равен $8(9 - a^2)$, то $0 \leqslant a \leqslant 3$, при этом при $a = 3$ решение единственно. Теперь предположим, что $a < \sqrt{6}$. В этом случае один из корней – отрицательный. Второй корень равен $\frac{a+\sqrt{18-2a^2}}{3}$. Решив неравенство $\frac{a+\sqrt{18-2a^2}}{3} \leqslant a$, или $\sqrt{18 - 2a^2} \leqslant 2a$, или $a^2 \geqslant 3$, получим, что $a \in [\sqrt{3}; \sqrt{6})$. Таким образом, в этом случае данное уравнение имеет одно решение. Теперь пусть $a \in [\sqrt{6}; 3)$. Имеем $t_{1,2} = \frac{a\pm\sqrt{18-2a^2}}{3} \geqslant 0$. При этом, как следует из разбора предыдущего случая, $t_{1,2} \leqslant a$.

Тема: «Иррациональные уравнения. Равносильные преобразования»

Решение 5. Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{6 - 2x} = a - \sqrt{x}$ и построим (в одной системе координат) эскизы графиков функций $y = \sqrt{6 - 2x}$ и $y = a - \sqrt{x}$ (рисунок).



Ясно, что уравнение имеет одно решение при $a = a_3$ и $a \in [a_1; a_2)$ и имеет два решения при $a \in [a_2; a_3)$ (рисунок). При других значениях a система решений не имеет.

Значение a_1 находим из условия, что график $y = a_1 - \sqrt{x}$ проходит через точку $(3; 0)$, значит, $0 = a - \sqrt{3}$, откуда $a_1 = \sqrt{3}$. Значение a_2 находим из условия, что график $y = a_2 - \sqrt{x}$ проходит через точку $(0; \sqrt{6}\,)$, значит, $a_2 = \sqrt{6}$.

График $y = a_3 - \sqrt{x}$ имеет с графиком $y = \sqrt{6 - 2x}$ общую касательную. Обозначим через $(x_0; y_0)$ координаты точки касания этих графиков. Угловые коэффициенты касательных к этим графикам в данной точке должны быть равны, откуда следует, что $-\frac{1}{\sqrt{6-2x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, поэтому $x_0 = 1$. Значит, $y_0 = \sqrt{6-2x_0} = 2$, и, так как $y_0 = a_3 - \sqrt{x_0}$, то $a_3 = 3$.

Замечание. В данном решении было существенно, что функция $y = \sqrt{6-2x}$ выпукла вверх, тогда как функция $y = a - \sqrt{x}$ является выпуклой (вниз).

Тема: «Графическое исследование уравнений. Угловой коэффициент касательной к графику функции»

1.II.7. Комментарий. Приведенное решение содержит две ошибки. Во-первых, неверен переход от уравнения $a\sin x + \cos x = a$ к уравнению $\cos\left(x - \arccos\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$. Дело в том, что $\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$ равен $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ либо $-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ в зависимости от знака числа a. Во-вторых, не была сделана проверка на принадлежность области определения исходного уравнения. Дело в том, что уравнение $a\sin x + \cos x = a$ имеет своими решениями значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, не входящими в область определения исходного уравнения.

Ответ: $\arccos\frac{2a}{a^2+1} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $|a| \geqslant 1$; $-\arccos\frac{2a}{a^2+1} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in (-1;0) \cup (0;1)$; при $a = 0$ решений нет.

Вторая олимпиада (2008 год)

2.I.1. Решение 1. Положим $f(x) = ax^2 + bx + c$ и предположим, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней на промежутке $(0;1)$. Тогда числа $f(0) = c$, $4f\left(\frac{1}{2}\right) = a + 2b + 4c$ и $f(1) = a + b + c$ имеют один и тот же знак (либо первое или третье из них равны нулю). Поэтому их сумма, равная $2a + 3b + 6c$, не может быть равной нулю, что противоречит условию.

Решение 2. В обозначениях предыдущего решения, если $c = 0$, то решениями данного уравнения являются числа $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$. Так как $2a + 3b = 0$, то $\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, поэтому $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0;1)$. Если $c \neq 0$, то $f(0) = c$, а $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c = \frac{2}{9}(2a + 3b) = -\frac{c}{3}$. Следовательно, на концах отрезка $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков, следовательно, она обращается в нуль в некоторой точке промежутка $\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Решение 3. Вычислим интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$. Имеем,

$$\int_0^1 (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + c\right)\Bigg|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{2a + 3b + 6c}{6} = 0.$$

Интеграл от ненулевой функции может быть равен нулю только в том случае, когда она принимает значения разных знаков, в частности, где-то на рассматриваемом отрезке она обращается в нуль.

2.I.2. Справедливо неравенство

$$2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\operatorname{tg} x}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}}.$$

Тем самым, достаточно доказать, что $\sin x + \operatorname{tg} x \geqslant 2x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$. При всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geqslant \cos x + \frac{1}{\cos x} - 2 \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке и, поскольку $f(0) = 0$, то на нем выполнено неравенство $f(x) \geqslant 0$.

2.I.3. Поскольку каждое из чисел больше 1, то их сумма больше 2008. Докажем, что эта сумма меньше 2009. В силу неравенства между средним геометрическим и средним геометрическим, имеем

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 1^n} < \frac{n + 1 + \frac{1}{n}}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[2009]{\frac{2009}{2008}} <$$
$$< 2008 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2009} =$$
$$= 2009 - \frac{1}{2009} < 2009.$$

Следовательно, целая часть данной суммы равна 2008.

Замечание. Неравенство $\sqrt[n+1]{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n(n+1)}$ следует также из аналога неравенства Бернулли для показателей степеней, меньших 1

2.I.4. Решение 1. Так как $3^y + 1 > 1$, то $x > 0$, значит, $x \geqslant 1$. Поэтому $2^x \geqslant 2$, откуда $3^y \geqslant 1$, следовательно, $y \geqslant 0$, При $y = 0$ получаем, что $x = 1$.

Пусть $y \geqslant 1$. Число 3^y+1 при делении на 3 имеет остаток 1, значит, число $x = 2n$ — четное. Тогда $2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1) = 3^y$, значит, $2^n + 1 = 3^a$ и $2^n - 1 = 3^b$. Следовательно, $3^a - 3^b = 2$, что возможно только при $a = 1$ и $b = 0$. Поэтому $x = 2$ и $y = 1$.

Ответ: $(1; 0), (2; 1)$.

Решение 2. Если число y четно, то остаток от деления числа 3^y+1 на 8 равен 2, если же оно нечетно, то этот остаток равен 4. В любом случае число $3^y + 1$ не делится на 8. Следовательно, $x = 1$ или же $x = 2$.

2.I.5. Достаточно доказать, что если k — такое натуральное число, что $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k$, то и $\sqrt{n} + \sqrt{n+2} < k$. Преобразуем первое неравенство.

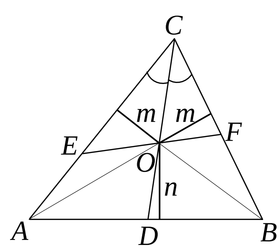
$$\sqrt{n+1} < k - \sqrt{n},\ \text{откуда}\ n+1 < k^2 + n - 2k\sqrt{n},\ \text{или}\ 2k\sqrt{n} < k^2 - 1,$$
$$\text{откуда}\ 4k^2 n < k^4 + 1 - 2k^2,\ \text{или}\ 4n < k^2 + \frac{1}{k^2} - 2.$$

Неравенство $\sqrt{n} + \sqrt{n+2} < k$ при помощи аналогичных преобразований приводится к виду

$$4n < k^2 + \frac{4}{k^2} - 4.$$

Если $4n < k^2 + \frac{1}{k^2} - 2$, то $4n \leqslant k^2 - 2$, Однако никакой квадрат целого числа не может иметь остатки 2 или 3 при делении на 4, поэтому $4n \leqslant k^2 - 4 < k^2 + \frac{4}{k^2} - 4$.

2.I.6. Решение 1. Пусть отрезок EF делит треугольник ABC на две фигуры равных периметров и площадей и O — точка пересечения биссектрисы CD треугольника с отрезком EF (рисунок).



Обозначим через m и n расстояния от точки O до прямых AC и AB, соответственно. Так как CD биссектриса, то равны друг другу расстояния от точки O до прямых BC и AC. Докажем, что точка O — точка пересечения биссектрис треугольника, для чего достаточно показать, что $m = n$.

Так как $CE + CF = EA + AB + BF$, то

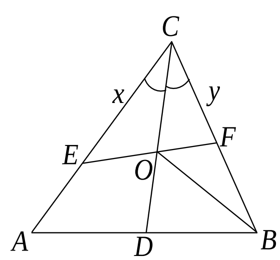
$$S_{CEF} = S_{COE} + S_{COF} = \frac{1}{2}\,m(CE + CF) = \frac{1}{2}\,m(EA + AB + BF) =$$
$$= S_{AOE} + \frac{1}{2}\,AB \cdot m + S_{BOF}\,.$$

С другой стороны,

$$S_{CEF} = S_{EABF} = S_{AOE} + S_{AOB} + S_{BOF} = S_{AOE} + \frac{1}{2}\,AB \cdot n + S_{BOF}\,.$$

Таким образом, $m = n$, значит, O — центр вписанной в треугольник окружности, который, тем самым, лежит на отрезке EF.

Решение 2. Пусть, как обычно, $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$, и положим $x = CE$ и $y = CF$ (рисунок).



Для того, чтобы доказать, что точка O — точка пересечения биссектрис треугольника, достаточно показать, что $\frac{OD}{OC} = \frac{BD}{BC}$.

Так как CD — биссектриса то

$$\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}, \text{ откуда } BD = \frac{ac}{a+b}, \text{ поэтому } \frac{BD}{BC} = \frac{c}{a+b}\,.$$

Из формулы для длины биссектрисы угла треугольника получаем, что

$$CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} \quad \text{и} \quad CO = \frac{2xy\cos\frac{C}{2}}{x+y}\,.$$

По условию $CE+CF = EA+AB+BF$, значит, $x+y = (b-x)+c+(a-y)$, откуда $x+y = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Также по условию $S_{CEF} = \frac{1}{2}\,S_{CAB}$, значит $\frac{1}{2}\,xy\sin C = \frac{1}{4}\,ab\sin C$, откуда $xy = \frac{1}{2}\,ab$. Следовательно,

$$CO = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b+c}\,.$$

Тогда

$$OD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} - \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b+c} = \frac{2abc\cos\frac{C}{2}}{(a+b)(a+b+c)}\,,$$

откуда и следует, что

$$\frac{OD}{OC} = \frac{c}{a+b} = \frac{BD}{BC}\,.$$

Решение 3. Повторим, что достаточно доказать, что $\frac{CO}{OD} = \frac{a+b}{c}$. Положим $\frac{CO}{OD} = \lambda$. Заметим, что $\overline{CA} = \frac{b}{x}\,\overline{CE}$ и $\overline{CB} = \frac{a}{y}\,\overline{CF}$. Тогда

$$\overline{CO} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\overline{CD} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{a}{a+b}\cdot\overline{CA} + \frac{b}{a+b}\cdot\overline{CB}\right) = \\ = \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{x}\cdot\overline{CE} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{y}\cdot\overline{CF}\right).$$

Поскольку точки E, O и F лежат на одной прямой, то

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{x} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{y}\right) = 1,\ \text{откуда}\ \frac{\lambda+1}{\lambda} = \frac{ab(x+y)}{(a+b)xy}\,.$$

В решении 2 было доказано, что $x+y = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$ и $xy = \frac{1}{2}\,ab$. Значит,

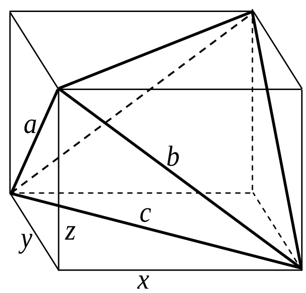
$$\frac{\lambda+1}{\lambda} = \frac{ab(a+b+c)}{ab(a+b)},\ \text{поэтому}\ \lambda = \frac{a+b}{c}\,.$$

Решение 4. Пусть $E \in BC$, $F \in AC$ – это концы отрезка, который делит пополам периметр и площадь треугольника ABC, a, b и c — это длины сторон этого треугольника. Положим $k = \frac{CE}{CB}$, $l = \frac{CF}{CA}$. Так как площадь треугольника CEF равна половине площади треугольника ABC, то $2kl = 1$. Из равенства периметров треугольника CEF и четырехугольника $ABEF$ следует, что $2ka + 2lb = a+b+c$, откуда $c = (2k-1)a + (2l-1)b$. Обозначим через T точку пересечения биссектрисы угла B и отрезка EF. Проведем отрезок ES, параллельный этой биссектрисе, $S \in AC$. Стандартное вычисление показывает, что $ET : TF = \frac{(1-k)a}{l(a+c)-a}$. Имеем, $l(a+c) - a = 2kla + l(2l-1)b - a = l(2l-1)b = l\left(\frac{1}{k} - 1\right)b = \frac{l(1-k)}{k}\,b$. Значит,

$$\frac{ET}{TF} = \frac{(1-k)a}{l(a+c)-a} = \frac{k(1-k)a}{l(1-k)b} = \frac{ka}{lb} = \frac{CE}{CF}.$$

Таким образом, точка T лежит также на биссектрисе угла C, поэтому она и является центром вписанной окружности.

2.I.7. Решение 1. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противолежащему ребру (рисунок).



Противоположные ребра тетраэдра по условию имеют равные длины, они же являются диагоналями граней построенного параллелепипеда. Поэтому каждая из граней является прямоугольником, а сам параллелепипед — прямоугольным параллелепипедом. Обозначим через x, y и z длины его ребер. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2. \\ y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$$

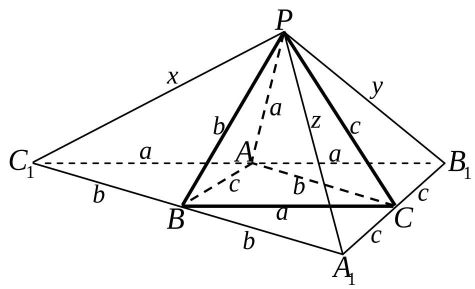
Решив полученную систему, находим

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\,,\; y^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}\,,\; z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\,.$$

Объем параллелепипеда равен xyz, объем тетраэдра равен его трети, откуда получаем формулу для объема V данного тетраэдра

$$V = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}\,.$$

Решение 2. Проведем через вершины основания тетраэдра $PABC$ прямые, параллельные сторонам основания, и соединим вершины получившегося треугольника $A_1B_1C_1$ с вершиной P этого тетраэдра (рисунок).



Объем тетраэдра $PA_1B_1C_1$ в 4 раза больше объема исходного тетраэдра. Каждая из боковых граней тетраэдра $PA_1B_1C_1$ является прямоугольным треугольником, поскольку длины медиан PA, PB и PC этих треугольников равны, соответственно, половине длин сторон B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1. Положим $x = PC_1$, $y = PB_1$ и $z = PA_1$. Далее решение аналогично предыдущему, так как $V_{PABC} = \frac{1}{24}\,xyz$, где $x^2 + y^2 = 2c^2$, и так далее.

2.I.8. Комментарий. В приведенном решении не рассмотрен случай совпадения корней обоих уравнений системы.

Верный ответ: $(-\infty; -1) \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$.

2.I.9. Комментарий. В приведенном решении допущена следующая ошибка. Уравнение $\sqrt[3]{t(3t-4)} \cdot \sqrt[3]{t-4} = -t$ не равносильно исходному уравнению, а является только его следствием, поэтому его корни могут не быть корнями исходного уравнения. Действительно, корень $t = 2$ не является корнем исходного уравнения. Верный ответ: $\{-2; 0\}$.

Идея приведенного рассуждения состояла в переходе от уравнения $a + b = d$ к уравнению $a^3 + b^3 + 3abd = d^3$, являющемуся следствием первого уравнения. Как было показано, корни второго уравнения не обязаны быть корнями первого уравнения. Давайте, однако, выясним, чему равносильно второе уравнение. Для удобства положим $c = -d$. Тогда получаем уравнение

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$$

Хорошо известно следующее разложение

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

Поскольку

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2,$$

то

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \iff a + b + c = 0 \text{ или } a = b = c.$$

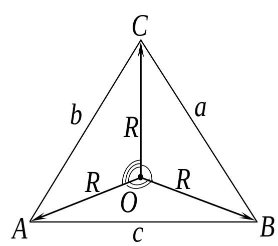
В приведенном решении «лишним» корнем и оказалось значение t, такое, что $t = 3t - 4 = 4 - t$, т. е. $t = 2$.

2.I.10. Решения 1 и 2. Поскольку $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ и $c = 2R\sin C$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} &2R^2(2\sin^2 A + 2\sin^2 B + 2\sin^2 C) \leqslant 9R^2 \iff \\ &\quad\iff 2(3 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C) \leqslant 9 \iff \\ &\qquad\iff \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Докажем полученное неравенство.

Доказательство 1. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг данного треугольника. Тогда углы BOC, AOC и AOB — центральные углы, опирающиеся на те же дуги, что и вписаннные углы BAC, ABC и ACB (рисунок).



Поэтому $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$ и $\angle AOB = 2\angle C$. Далее имеем,

$$\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\,\right)^2 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{OA}\cdot\overline{OB} + 2\overline{OA}\cdot\overline{OC} + 2\overline{OB}\cdot\overline{OC} \geqslant 0 \iff$$
$$\iff 3R^2 + 2R^2\cos 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}\,.$$

Тема: «Использование векторов для решения геометрических задач»

Доказательство 2. Имеем,

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \cos 2A + \cos 2B + \cos(2\pi - 2A - 2B) =$$
$$= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2(A+B) - 1 =$$
$$= 2\left(\cos(A+B) + \frac{1}{2}\,\cos(A-B)\right)^2 - \frac{1}{2}\,\cos^2(A-B) - 1 \geqslant -\frac{3}{2}\,.$$

Тема: «Доказательство тригонометрических неравенств»

Решение 3. В отличие от предыдущих решений, третье решение является чисто алгебраическим.

Поскольку $R = \frac{abc}{4S}$, то данное неравенство равносильно неравенству $16S^2(a^2+b^2+c^2) \leqslant 9a^2b^2c^2$. Теперь воспользуемся формулой, выражающей площадь треугольника через длины его сторон. Конечно, всем хорошо известна формула Герона. Нам сейчас интереснее многочлен, получающийся после раскрытия скобок в выражении под знаком квадратного корня в этой формуле. А там находится следующий многочлен:

$$4a^2b^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 = 4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 =$$
$$= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Таким образом, нам надо доказать неравенство

$$(a^2+b^2+c^2)(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) \leqslant 9a^2b^2c^2.$$

Положив $x = a^2 \geqslant 0$, $y = b^2 \geqslant 0$ и $z = c^2 \geqslant 0$, получим неравенство

$$(x+y+z)(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \leqslant 9xyz.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы получим неравенство

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2.$$

Так как

$$x^3 + xyz - x^2y - x^2z = x^2(x-y) - xz(x-y) = x(x-y)(x-z),$$

то это неравенство преобразуется к виду

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Без ограничения общности мы вправе предположить, что $x \geqslant y \geqslant z$. Третье слагаемое в левой части неотрицательно, потому достаточно доказать неотрицательность суммы первых двух слагаемых. Имеем,

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) = (x-y)(x^2 - y^2 - xz + yz) = \\ = (x-y)^2(x+y-z) \geqslant 0.$$

Неравенство доказано.
Тема: «Доказательство неравенств»

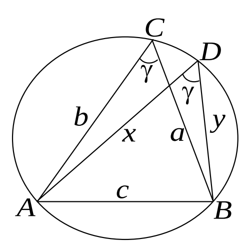
Решение 4. Если $\angle C \geqslant 90^\circ$, то $a^2 + b^2 \leqslant c^2$. Поэтому

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2c^2 = 8R^2 \sin^2 C < 9R^2.$$

Таким образом, нам осталось рассмотреть случай, когда треугольник ABC является остроугольным. Предварительно мы докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Рассмотрим точку D дуги ACB окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC. Предположим, что расстояние от D до AB меньше, чем расстояние от C до AB. Тогда $AC^2 + BC^2 > AD^2 + BD^2$.

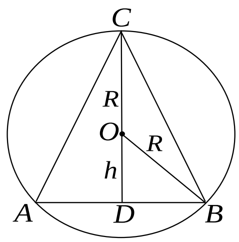
Действительно, если положить $\angle ACB = \angle ADB = \gamma$, $x = AD$ и $y = BD$, то $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ и $c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma$ (рисунок).



Так как $S_{ABC} > S_{ABD}$, то $ab\sin\gamma > xy\sin\gamma$, поэтому $ab > xy$. Поскольку $\cos\gamma > 0$, то $a^2 + b^2 > x^2 + y^2$.

Лемма 2. Сумма квадратов сторон равнобедренного остроугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, не превосходит $9R^2$.

Обозначим через $h = OD$ расстояние от центра O описанной окружности радиуса R до основания AB треугольника ABC (рисунок).



Тогда

$$AB^2 + 2BC^2 = 4BD^2 + 2(CD^2 + BD^2) = \\ = 4(R^2 - h^2) + 2\big((R+h)^2 + (R^2 - h^2)\big) = 8R^2 + 4Rh - 4h^2.$$

Осталось заметить, что

$$8R^2 + 4Rh - 4h^2 \leqslant 9R^2 \iff R^2 - 4Rh + 4h^2 = (R-2h)^2 \geqslant 0.$$

Из леммы 1 следует, что сумма $a^2 + b^2 + c^2$ квадратов длин сторон остроугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, не меньше, чем сумма квадратов длин сторон равнобедренного треугольника с тем же основанием, вписанного в окружность того же радиуса. А в силу леммы 2, сумма квадратов длин сторон равнобедренного треугольника не превосходит $9R^2$.
Тема: «Неравенства и оценки в геометрии»

2.I.11. Положим $t = a^{1-x^2}$. Исходное соображение состоит в том, что уравнение $a^{2-2x^2} + (b+4)a^{1-x^2} + 3b + 4 = 0$ не имеет решений ни при каком $a > 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $t^2 + (b+4)t + 3b + 4 = 0$ не имеет положительных решений.

Решение 1. Перепишем уравнение в виде $-\frac{(t+2)^2}{t+3} = b$ и рассмотрим функцию $f(t) = -\frac{(t+2)^2}{t+3}$. Найдем множество ее значений, для чего исследуем эту функцию на монотонность. Так как

$$f'(t) = -\frac{2(t+2)(t+3) - (t+2)^2}{(t+3)^2} = -\frac{(t+2)(t+4)}{(t+3)^2} < 0 \text{ при } t \geqslant 0,$$

то функция убывает на промежутке $[0;+\infty)$. Поскольку $f(0)=-\frac{4}{3}$ и $f(t)\to-\infty$ при $t\to+\infty$, то множеством ее значений на рассматриваемом промежутке является промежуток $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$. Поэтому данное уравнение не имеет положительных решений при $b\geqslant-\frac{4}{3}$.

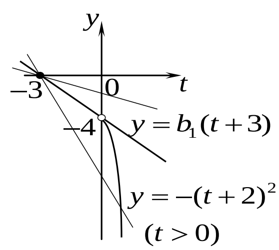
Ответ: $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Тема: «Применение производной для исследования функций»

Решение 2. Уравнение $t^2+(b+4)t+3b+4=0$ не имеет положительных решений когда оно либо не имеет действительных решений вообще, либо когда его корни неположительны. Первый случай имеет место, если $D=(b+4)^2-4(3b+4)=b^2-4b<0$, т. е при $b\in(0;4)$. Второй случай реализуется, когда корни существуют, однако их произведение неотрицательно, а их сумма неположительна, т. е. когда $3b+4\geqslant 0$ и $b+4\geqslant 0$, т. е. при $b\geqslant-\frac{4}{3}$. Так как в этом случае $b\leqslant 0$ или $b\geqslant 4$, то $b\in\left[-\frac{4}{3};0\right]\cup[4;+\infty)$. Объединив найденные промежутки, получим ответ.

Тема: «Расположение корней квадратных уравнений»

Решение 3. Перепишем уравнение в виде $-(t+2)^2=b(t+3)$.



Рассмотрим график квадратичной функции $y=-(t+2)^2$ и прямую, проходящую через точки $A(-3,0)$ и $B(0,-4)$, задаваемую уравнением $y=-\frac{4}{3}(t+3)$. Эта прямая пересекает параболу в двух точках. Ясно, что, если $b<-\frac{4}{3}$, то прямая $y=b(t+3)$ пересечет параболу в двух точках, при этом абсцисса одной из точек пересечения будет положительной (рисунок). С другой стороны, если $b\geqslant-\frac{4}{3}$, то прямая $y=b(t+3)$ не будет иметь общих точек с той частью параболы, которая лежит правее оси ординат.

Тема: «Графическое исследование уравнений»

2.I.12. Решение 1. Пусть точки K_1, K_2, K_3, K_4 — середины сторон AB, BC, CD, DA пирамиды $PABCD$; точки M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения медиан граней PCD, PAD, PAB, PBC, а точки O_1, O_2,

O_3, O_4 делят отрезки K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4 в отношении $3:2$, считая от середин сторон основания. Тогда

$$\overline{PO}_1 = \frac{2}{5}\,\overline{PK}_1 + \frac{3}{5}\,\overline{PM}_1 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(\overline{PA}+\overline{PB}\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\left(\overline{PC}+\overline{PD}\right) = \\ = \frac{1}{5}\left(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\right).$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$\overline{PO}_2 = \overline{PO}_3 = \overline{PO}_4 = \frac{1}{5}\left(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\right).$$

Таким образом, $O_1 = O_2 = O_3 = O_4$, что и означает, что отрезки K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3 и K_4M_4 проходят через одну точку, делящую каждый из этих отрезков в отношении $3:2$. Пусть теперь E, F, G, H — середины отрезков K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4. Тогда

$$\overline{PE} = \frac{1}{2}\left(\overline{PK}_1+\overline{PM}_1\right) = \frac{1}{4}\left(\overline{PA}+\overline{PB}\right) + \frac{1}{6}\left(\overline{PC}+\overline{PD}\right)$$
$$\overline{PF} = \frac{1}{2}\left(\overline{PK}_2+\overline{PM}_2\right) = \frac{1}{4}\left(\overline{PB}+\overline{PC}\right) + \frac{1}{6}\left(\overline{PA}+\overline{PD}\right),$$

следовательно,

$$\overline{EF} = \overline{PF} - \overline{PE} = \frac{1}{4}\left(\overline{PC}-\overline{PA}\right) - \frac{1}{6}\left(\overline{PC}-\overline{PA}\right) = \\ = \frac{1}{12}\left(\overline{PC}-\overline{PA}\right) = \frac{1}{12}\,\overline{AC}\,.$$

Аналогично доказывается, что $\overline{HG} = \frac{1}{12}\,\overline{AC}$ и $\overline{FG} = \overline{EH} = \frac{1}{12}\,\overline{BD}$. Таким образом, $EFGH$ — параллелограмм.

Обозначим через φ угол между диагоналями AC и BD основания. Угол между сторонами EF и EH параллелограмма равен φ или $\pi-\varphi$. Поэтому

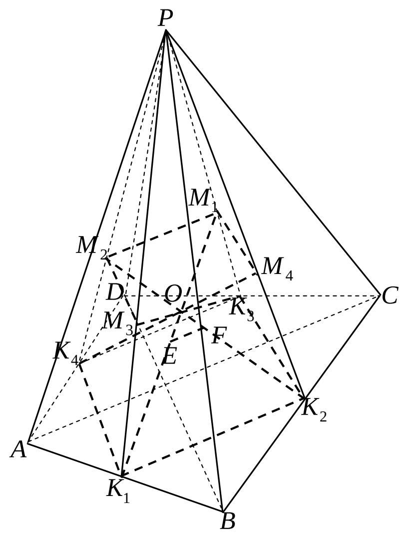
$$S_{EFGH} = EF\cdot EH\,\sin\varphi = \frac{1}{144}\,AC\cdot BD\,\sin\varphi = \frac{1}{72}\,S_{ABCD}.$$

Тема: «Использование векторов для решения геометрических задач»

Решение 2. Рассуждение, проведенные в предыдущем решении, можно повторить, используя координатное задание точек. Все вычисления аналогичны проведенным. проблема в том, что они становятся существенно более громоздкими. С другой стороны, понятие вектора при этом не используется.

Тема: «Метод координат»

Решение 3. Используем обозначения точек K_i и M_i, введенные в решении 1. Прямые M_1M_2 и K_4K_3 пересекают стороны угла K_4PK_3, при этом $PM_2 : PK_4 = PM_1 : PK_3 = 2 : 3$, поэтому $M_1M_2 \parallel K_3K_4$ и $M_1M_2 : K_3K_4 = 2 : 3$ (рисунок).



Отрезок K_3K_4 — средняя линия треугольника ACD, следовательно, $K_3K_4 \parallel AC$ и $K_3K_4 = \frac{1}{2}\,AC$. Таким образом, $M_1M_2 \parallel AC$ и $M_1M_2 = \frac{1}{3}\,AC$. С другой стороны, отрезок K_1K_2 — средняя линия треугольника ABC, поэтому $K_1K_2 \parallel AC$ и $K_1K_2 = \frac{1}{2}\,AC$. Следовательно, $M_1M_2 \parallel K_1K_2$ и $M_1M_2 : K_1K_2 = 2 : 3$. Таким образом, $M_1M_2K_1K_2$ — трапеция, отношение оснований которой равно $\frac{2}{3}$, поэтому точка O пересечения диагоналей делит каждую из них в отношении $K_1O : OM_1 = K_2O : OM_1 = 3 : 2$.

Аналогичное рассуждение показывает, что отрезки K_1M_1 и K_4M_4 пересекаются в точке O', при этом $K_1O' : O'M_1 = K_4O' : O'M_4 = 3 : 2$. Значит, $O = O'$. Наконец, точка пересечения отрезков K_4M_4 и K_3M_3 также делит каждый из них в отношении $3 : 2$. Таким образом, все отрезки пересекаются в одной точке, делящей каждый из них в отношении $3 : 2$.

Пусть точка E — середина отрезка K_1M_1 и точка F — середина отрезка K_2M_2. Таким образом отрезок EF соединяет середины диагоналей трапеции $K_1K_2M_1M_2$, в частности, он параллелен ее основаниям, следовательно, параллелен диагонали AC основания данной пирамиды. С другой стороны, длина EF равна полуразности длин оснований этой трапеции, так что $EF = \frac{1}{12}\,AC$. Если G — середина K_3M_3 и H — середина K_4M_4, то аналогичным образом получаем, что $HG \parallel AC$ и $HG = \frac{1}{12}\,AC$. Кроме того, $FG \parallel EH \parallel BD$ и $FH - EH = \frac{1}{12}\,BD$.

Тем самым мы доказали, что $EFGH$ — параллелограмм. Его площадь в 36 раз меньше площади параллелограмма $K_1K_2K_3K_4$, про которую известно, что она равна половине площади четырехугольника $ABCD$. Значит, $S_{EFGH} : S_{ABCD} = 1 : 72$.

Тема: «Параллельность и отношение отрезков в стереометрии»

2.II.1. Ответ следует из цепочки тригонометрических преобразований:

$$\operatorname{tg} 65^\circ - 2\operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{ctg} 25^\circ - 2\operatorname{ctg} 50^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ} - \frac{2}{\operatorname{tg} 50^\circ} = \\ = \frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 25^\circ}{\operatorname{tg} 25^\circ} = \operatorname{tg} 25^\circ.$$

Ответ: 25°.

2.II.2. Положив $a = 2b$, получим уравнение $x^2 - bx + 2b = 0$. Если m и n — его целые корни, то $mn = 2b$ и $m + n = b$, поэтому $mn = 2m + 2n$, или $(m-2)(n-2) = 4$, откуда

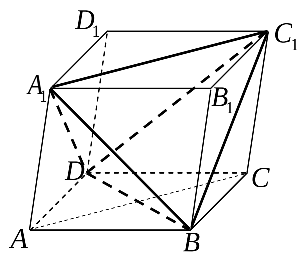
$$(m; n) = (0; 0), (4; 4), (6; 3), (3; 6), (1; -2), (-2; 1).$$

Значит b может принимает одно из значений $0; -1; 8; 9$. Проверка показывает, что уравнение имеет два различных целых корня при $b = -1$ и $b = 9$.

Ответ: $-2; 18$.

2.II.3. В результате замены $t = \sqrt[21]{x}$ получим квадратное уравнение $\sqrt[21]{a}\,t^2 + \sqrt[21]{b}\,t + \sqrt[21]{c} = 0$. Заметим, что $2^{21} > 2 \cdot 10^6$, поэтому $\sqrt[21]{a} \leqslant \sqrt[21]{10^6} < 2$. С другой стороны, $\sqrt[21]{b} > 1$ и $\sqrt[21]{c} > 1$. Поэтому дискриминант $D = \sqrt[21]{a^2} - 4\sqrt[21]{bc}$ полученного квадратного уравнения отрицателен, а потому решений оно не имеет.

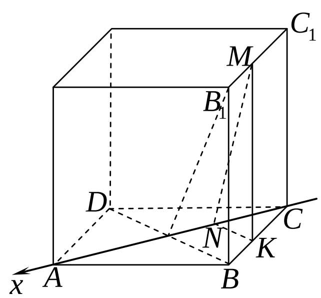
2.II.4. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противолежащему ребру. В результате получим параллелепипед, скрещивающимися диагоналями параллельных граней которого являются ребра данного тетраэдра (рисунок).



Объем данного тетраэдра равен одной трети объема параллелепипеда (докажите это самостоятельно). Площадь грани параллелепипеда равна $\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha$, а его высота равна c. Поэтому его объем равен $\frac{1}{2}\,abc\sin\alpha$, следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}\,abc\sin\alpha$.

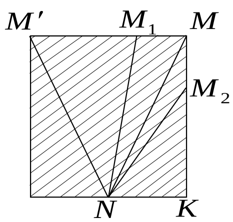
2.II.5. *Ответ:* $\dfrac{7\pi a^3\sqrt{2}}{6}$.

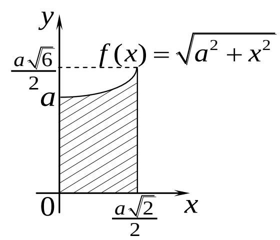
Решение. Пусть данное тело получено при вращении вокруг прямой AC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Опустим перпендикуляры MN и MK из точки M ребра B_1C_1 на прямые AC и BC, соответственно. Положим $x = CN$ и найдем длину отрезка MN (рисунок).



Поскольку треугольник CKN — прямоугольный с прямым углом при вершине N и $\angle KCN = 45°$, то $NK = NC = x$. Поэтому $MN = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Введем систему координат с началом в точке C, ось абсцисс которой совпадает с прямой AC (как на рисунке выше). Поскольку точка M является наиболее удаленной от прямой AC точкой сечения данного куба плоскостью KMN (левый рисунок), то объем тела, образованного при вращении призмы $BCDB_1C_1D_1$, равен объему тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, осью ординат, прямой $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и графиком функции $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ (правый рисунок).





Так как объем этого тела вращения равен половине искомого объема, то, воспользовавшись формулой объема тела вращения, получаем, что

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (x^2 + a^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} + a^2 x\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = 2\pi \left(\frac{a^3\sqrt{2}}{12} + \frac{a^3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\pi a^3 \sqrt{2}}{6}.$$

Замечание. В действительности можно ограничиться первым шагом приведенного решения. Дело в том, что в формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$ объема тела вращения выражение $\pi f^2(x)$ есть площадь круга, являющегося сечением тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения. В нашем случае сечением является круг радиусом $MN = \sqrt{a^2 + x^2}$, площадь которого равна $\pi(a^2 + x^2)$, откуда и следует, что объем искомого тела равен $2\pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (x^2 + a^2)\, dx$.

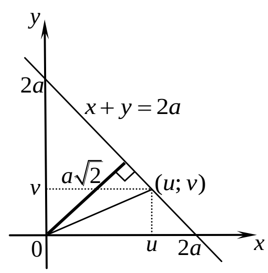
2.II.6. Комментарий. Покажем прежде всего, что данный в решении ответ неверен, поскольку функция $f(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right)$ периодической не является. Действительно, $f(0) = 1 + 1 = 2$. Однако ни в какой другой точке значение $f(x)$ не может быть равным двум, так как если $x = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то $x\sqrt{2} \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, поскольку число $\sqrt{2}$ — иррациональное. Ошибка приведенного решения состояла в том, что предел последовательности периодических функций не обязан быть периодической функцией.

2.II.7. Преобразуем данное неравенство. Положим $u = \sqrt{1+x}$, $v = \sqrt{1+y}$ и $a = \sqrt{1+\alpha}$. Таким образом, надо доказать, что если $u + v = 2a$, то $u^2 + v^2 \geqslant 2a^2$.

Решение 1. Выразив a из уравнения, приходим к равносильному неравенству $\frac{(u+v)^2}{2} \leqslant u^2 + v^2$. Преобразуя полученное неравенство, получим, что $u^2 - 2uv + v^2 \geqslant 0$, или $(u-v)^2 \geqslant 0$.
Тема: «Доказательство неравенств»

Решение 2. Неравенство $u^2+v^2 \geqslant \frac{(u+v)^2}{2}$ можно переписать в виде $\frac{u+v}{2} \leqslant \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}$. Мы получили известное неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным.
Тема: «Неравенства для средних двух чисел»

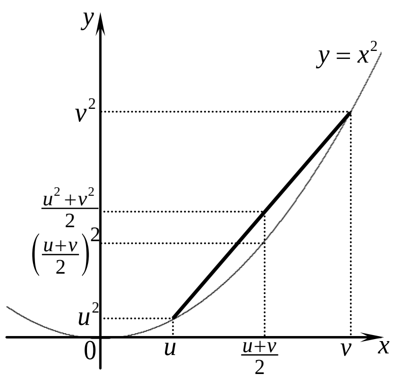
Решение 3. Если $u+v = 2a$, то точка с координатами $(u; v)$ лежит на прямой $x + y = 2a$ (рисунок).



Расстояние от любой точки этой прямой до начала координат не меньше $a\sqrt{2}$. Следовательно, расстояние от точки $(u; v)$, равное $\sqrt{u^2+v^2}$, не меньше $a\sqrt{2}$, $\sqrt{u^2+v^2} \geqslant a\sqrt{2}$, откуда и следует, что $u^2 + v^2 \geqslant 2a^2$.
Тема: «Метод координат»

Решение 4. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{m}(u; v)$, $\boldsymbol{n}(v; u)$ и $\boldsymbol{q}(2a, 2a)$. Так как $u + v = 2a$, то $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}$. Следовательно, $|\boldsymbol{q}| \leqslant |\boldsymbol{m}| + |\boldsymbol{n}|$, или $2a\sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{u^2+v^2}$, откуда $2a^2 \leqslant u^2 + v^2$.
Тема: «Векторы»

Комментарий. Перепишем неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным в виде $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \leqslant \frac{u^2+v^2}{2}$ и приведем его геометрическую интерпретацию. Рассмотрим хорду графика $y = x^2$ с концами в точках с координатами $(u; u^2)$ и $(v; v^2)$ (рисунок).



Середина этой хорды имеет координаты $\left(\frac{u+v}{2}; \frac{u^2+v^2}{2}\right)$. Рассмотрим точку графика с абсциссой $x = \frac{u+v}{2}$, Ордината этой точки равна $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$. Неравенство $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \leqslant \frac{u^2+v^2}{2}$ означает, что середина хорды лежит выше соответствующей точки графика $y = x^2$, что равносильно утверждению, что функция $y = x^2$ является выпуклой.

Третья олимпиада (2009 год)

3.I.1. Областью определения неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -2]$ и $(4; +\infty)$.

Предположим, что $x > 4$. В таком случае уравнение преобразуется к виду $(x+2)(x-4) + 4\sqrt{(x+2)(x-4)} = 12$. Сделав замену $t = \sqrt{(x+2)(x-4)}$, получим уравнение $t^2 + 4t - 12 = 0$, откуда $t = -6$ или $t = 2$. Поскольку $t \geqslant 0$, то $\sqrt{(x+2)(x-4)} = 2$, или $x^2 - 2x - 12 = 0$, откуда $x = 1 \pm \sqrt{13}$. Поскольку $x > 4$, то $x = 1 + \sqrt{13}$.

Теперь пусть $x \leqslant -2$. В этом случае $(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}} = -\sqrt{(x+2)(x-4)}$. Та же замена, что и выше, сводит уравнение к виду $t^2 - 4t - 12 = 0$, поэтому $\sqrt{(x+2)(x-4)} = 6$, откуда $x^2 - 2x - 44 = 0$, таким образом, $x = 1 \pm 3\sqrt{5}$. Так как $x \leqslant -2$, то $x = 1 - 3\sqrt{5}$.

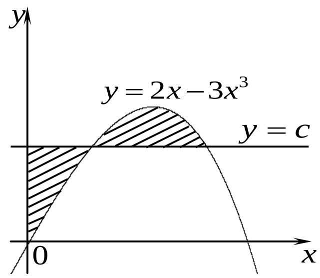
Ответ: $\{1 + \sqrt{13}, 1 - 3\sqrt{5}\}$.

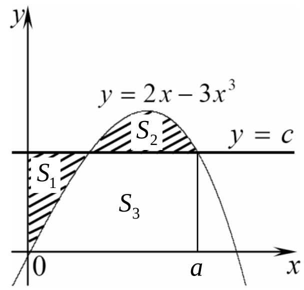
3.I.2. Так как $\operatorname{tg}^6 x > 0$ и $\operatorname{ctg}^6 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^6 x}$, то $\operatorname{tg}^6 x + \operatorname{ctg}^6 x \geqslant 2$. Для доказательства данного неравенства достаточно показать, что его правая часть не превосходит 2. Справедливы неравенства $\sin^5 x \leqslant \sin^4 x$,

$\cos^5 x \leqslant \cos^4 x$, $2\sin^3 x\cos^3 x \leqslant 2\sin^2 x\cos^2 x$, следовательно,

$$2(\sin^5 x + \cos^5 x + 2\sin^3 x\cos^3 x) \leqslant 2(\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x) = \\ = 2\bigl(\sin^2 x + \cos^2 x\bigr)^2 = 2.$$

3.I.3. Решение 1. Пусть a — абсцисса правой точки пересечения прямой $y = c$ с графиком $y = 2x - 3x^3$ (левый рисунок).





Из условия равенства площадей заштрихованных фигур получаем, что

$$\int_0^a (2x - 3x^3 - c)\,dx = 0, \text{ откуда } a^2 - \frac{3a^4}{4} - ac = 0.$$

Поскольку $a > 0$, то $c = a - \frac{3a^3}{4}$. С другой стороны, $c = 2a - 3a^3$. Поэтому $a - \frac{3a^3}{4} = 2a - 3a^3$, откуда $a = \frac{2}{3}$. Следовательно $c = \frac{4}{9}$.

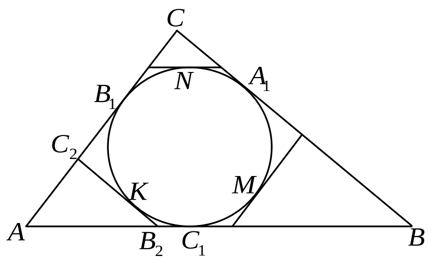
Ответ: $\frac{4}{9}$.

Решение 2. Обозначим площади заштрихованных фигур через S_1 и S_2, площадь незаштрихованной части — через S_3 (правый рисунок). Имеем,

$$S_1 = S_2 \iff S_1 + S_3 = S_2 + S_3 \iff ac = \int_0^a (2x - 3x^3)\,dx \iff \\ \iff a(2a - 3a^3) = a^2 - \frac{3}{4}a^4, \text{ откуда, так как } a > 0,\ a = \frac{2}{3}.$$

Поэтому $c = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3\bigl(\frac{2}{3}\bigr)^3 = \frac{4}{9}$.

3.I.4. Пусть S — площадь треугольника ABC и P — его периметр. Треугольники, отсекаемые от треугольника ABC прямыми, параллельными его сторонам, подобны данному треугольнику. Обозначим коэффициенты подобия через k_1, k_2 и k_3. Тогда периметры и площади отсеченных треугольников равны, соответственно, k_1P и k_1^2S, k_2P и k_2^2S, k_3P и k_3^2S. Требуется доказать, что $k_1^2S + k_2^2S + k_3^2S \geqslant \frac{1}{3}S$, или что $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

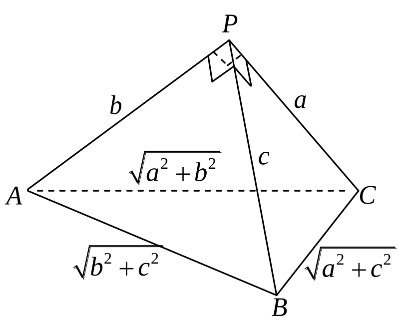


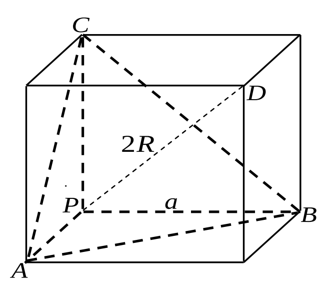
Так как $AB_1 = AC_1 = \frac{P_1}{2} = \frac{1}{2}k_1P$ (обозначения на рисунке), $BC_1 = BA_1 = \frac{1}{2}k_2P$ и $CA_1 = CB_1 = \frac{1}{2}k_3P$, то

$$P = AB + BC + CA = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + B_1A = \\ = k_1P + k_2P + k_3P,$$

значит $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. Поэтому $\sqrt{\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{3}} \geqslant \frac{k_1+k_2+k_3}{3} = \frac{1}{3}$, откуда и следует, что $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

3.I.5. Пусть $PABC$ — тетраэдр, в котором ребра PA, PB и PC перпендикулярны друг другу. Положим $a = PC$, $b = PA$ и $c = PB$ (левый рисунок).





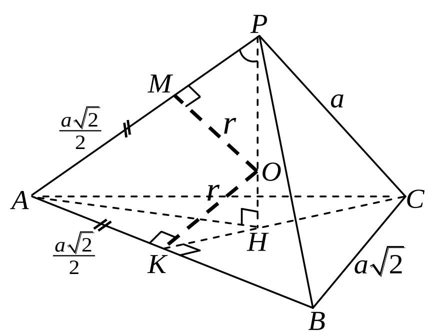
Если в тетраэдр можно вписать сферу, касающуюся всех его ребер, то попарные суммы длин его противоположных ребер равны друг другу. Поэтому $a + \sqrt{b^2 + c^2} = b + \sqrt{a^2 + c^2}$. Следовательно

$$a - b = \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2} \iff$$
$$\iff (a - b)\big(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\,\big) = a^2 + c^2 - b^2 - c^2 \iff$$
$$\iff (a - b)\big(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\,\big) = (a - b)(a + b).$$

Поскольку $\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} > a + b$, то из полученного равенства следует, что $a = b$. Аналогичным образом получаем, что $b = c$. Следовательно, $PA = PB = PC$, таким образом, тетраэдр $PABC$ является правильной пирамидой с вершиной P.

Радиус сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, равен половине длины диагонали куба с ребром $a = PA$ (правый рисунок). Следовательно, $a\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3}$, поэтому $a = 6$.

Теперь найдем радиус r сферы, касающейся всех ребер данного тетраэдра. Пусть PH — высота, CK — высота основания, O — центр сферы. Ясно, что точка O лежит на прямой PH. В силу теоремы о трех перпендикулярах $OK \perp AB$. Опустим также перпендикуляр OM на ребро PA. Тогда $OK = OM = r$ и $AM = AK$, поскольку это есть отрезки касательных, проведенных из некоторой точки вне сферы (рисунок).



Имеем, $AB = 6\sqrt{2}$, $AK = \frac{1}{2}AP = 3\sqrt{2}$; $AH = \frac{BC}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$; $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 24} = 2\sqrt{3}$; $MP = AP - AM = AP - AK =$

$6-3\sqrt{2}=3(2-\sqrt{2}\,)$. Из подобия треугольников OMP и APH следует, что

$$\frac{OM}{AH}=\frac{PM}{PH},\quad \text{откуда и следует, что}\quad r=OM=6(\sqrt{2}-1).$$

Ответ: радиус сферы равен $6(\sqrt{2}-1)$.

3.I.6. *Ответ:* 128.

Решение 1. Будем записывать числа из множества $\mathcal{S}$ в троичной системе счисления. Тогда переход от числа x к числу $3x$ означает приписывание 0 справа к «троичной записи» числа x, а переход от x к $3x+1$ означает приписывание справа 1. Следовательно, число принадлежит множеству S тогда и только тогда, когда его троичная запись состоит только из 0 и 1.

Осталось заметить, что $3\cdot 729>2009>2\cdot 729=2\cdot 3^6$. Из этого следует, что в троичной записи число 2009 является 7-значным числом, первая (старшая) цифра которого равна 2. Наибольшее из чисел, полученных на 7-м шаге, имеет запись 1111111_3, поэтому оно меньше 2009. Поэтому общее их число равно $2^7=128$.

Решение 2. Давайте строить множество $\mathcal{S}$ пошагово. Поскольку $0\in\mathcal{S}$, то в силу второго свойства $1\in\mathcal{S}$. Таким образом, на первом шаге к множеству $\mathcal{S}$ добавилось одно число. Поскольку $1\in\mathcal{S}$, то $3\in\mathcal{S}$ и $4\in\mathcal{S}$. На втором шаге добавились два числа. На третьем шаге к множеству $\mathcal{S}$ добавятся еще четыре числа: 9, 10, 12 и 13.

Заметим, что различные числа x и y порождают на следующем шаге четыре различных числа. Действительно, если $x<y$, то $x+1\leqslant y$, поэтому $3x+1<3x+3=3(x+1)\leqslant 3y$. Значит, на каждом шаге к множеству $\mathcal{S}$ добавляется вдвое больше чисел, чем на предыдущем шаге. Составим таблицу:

Шаг	**Чисел добавилось**	**Минимальное**	**Максимальное**
1	1	1	1
2	2	3	4
3	4	9	13
4	8	27	40
5	16	81	121
6	32	243	364
7	64	729	1093
8	128	2187	3280
...	...	...	...

Видно, что, начиная с восьмого шага, к S добавляются числа, превосходящие 2009. Поэтому, учитывая число 0, всего целых чисел из $\mathcal{S}$, не превосходящих 2009, будет $1 + 1 + 2 + 4 + \ldots + 64 = 128$.

3.I.7. а) Если никакие две из n прямых не параллельны и никакие три из них не проходят через одну точку, то общее число областей, на которые они делят плоскость, равно $\frac{1}{2}\,n(n+1)+1$. Доказывать это утверждение будем по индукции. Одна прямая, конечно, делит плоскость на две области.

Предположим, что это утверждение верно для n прямых. Рассмотрим набор из $n+1$ прямых. В силу индукционного предположения первые n из них делят плоскость на $\frac{1}{2}\,n(n+1)+1$ областей. Добавим последнюю прямую. В силу предположения о взаимном расположении прямых она имеет n точек пересечения с прямыми из первого набора. Эти точки пересечения делят первую прямую на $n+1$ промежутков, каждый из которых делит на две одну из $\frac{1}{2}\,n(n+1)+1$ областей. Таким образом, количество s_{n+1} областей, на которые делят плоскость $n+1$ прямых, на $n+1$ больше числа областей, на которые делят плоскость n прямых. Следовательно,

$$s_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1,$$

что и требовалось доказать.

б) Если никакие две прямые из имеющихся n прямых не пересекаются, то этот набор делит плоскость на $n+1$ областей. Пусть всего имеется m точек пересечения прямых из данного набора, состоящего из n прямых. Обозначим через k_i число прямых, проходящих через i-ю точку их пересечения. Тогда данный набор делит плоскость на $n+1+\sum_{i=1}^{m}(k_i-1)$ областей.

Рассмотрим прямую ℓ, не параллельную ни одной из прямых данного набора и расположенную так, что все их попарные точки пересечения лежат по одну сторону от прямой ℓ. Рассмотрим также полуплоскость α, состоящую из точек, лежащих по другую сторону от ℓ, чем все эти точки пересечения. Эта полуплоскость разбивается прямыми данного набора на $n+1$ областей. Будем теперь сдвигать прямую ℓ параллельно себе в направлении точек пересечения. Изменение числа областей, на которые прямые данного набора делят полуплоскость α, будет происходить в те моменты, когда прямая ℓ проходит через одну из точек пересечения. При этом, если эта точка была точкой пересечения k прямых, то число областей увеличится на $k-1$. После того, как в полуплоскости α оказались все точки попарного пересечения, дальнейшего измемения числа областей происходить не будет. Следовательно, общее число областей, на которые набор из данных прямых делит плоскость, равно

$$n + 1 + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_m - 1),$$

что и требовалось доказать.

3.I.8. Комментарий. В решении допущена следующая логическая ошибка. Конечно, если система имеет единственное решение, то ордината этого решения равна нулю. Но ниоткуда не следует, что верно обратное утверждение, что если у системы есть решение вида $(x_0, 0)$, то это решение является единственным. Действительно, в данном случае при $a = \sqrt{2}$ данная система имеет три решения: $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; -\sqrt{2}\,)$ и $(0; \sqrt{2}\,)$.

3.I.9. Комментарий. В решении допущена следующая логическая ошибка. Уравнение $(x + y)^2 = -a^2 + 20a - 32$ не равносильно данной системе, а является ее следствием. Нетрудно убедится, что при $a = 10$ данная система решений не имеет. Правильный ответ: $a = 8$.

3.I.10. *Ответ:* $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right\}$.

Решение 1. Положим $y = \sqrt{x + 5}$, откуда $y^2 = x + 5$. Данное уравнение перепишем в виде $x^2 = 5 - y$. Вычитая полученные уравнения, получим, что $(y - x)(y + x) = y + x$, откуда следует, что $y = -x$ или $y = x + 1$. Таким образом, $\sqrt{x + 5} = -x$ или $\sqrt{x + 5} = x + 1$.

Решим первое уравнение. Ясно, что $x \leqslant 0$. Взведя в квадрат обе части, получим уравнение $x^2 - x - 5 = 0$, откуда $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Условию $x \leqslant 0$ удовлетворяет только меньший из найденных корней.

Решим второе уравнение. Ясно, что $x \geqslant -1$. После возведения в квадрат получим уравнение $x^2 + x - 4 = 0$, откуда $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Условию $x \geqslant -1$ удовлетворяет лишь больший из найденных корней.

Тема: «Методы решения иррациональных уравнений»

Решение 2. Вместо данного уравнения рассмотрим уравнение $x^2 + \sqrt{x + y} = y$, или $\sqrt{x + y} = y - x^2$, посредством которого выразим y через x, Ясно, что $y \geqslant x^2$. После возведения в квадрат получим уравнение $y^2 - (2x^2 + 1)y + x^4 - x = 0$, Дискриминат полученного квадратного (относительно переменной y) уравнения равен

$$D = (2x^2+1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2.$$

Поэтому

$$y = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x+1)}{2}, \text{ откуда } y = x^2 + x + 1 \text{ или } y = x^2 - x.$$

Все, что осталось сделать — это решить уравнения $x^2 + x - 4 = 0$ и $x^2 - x - 5 = 0$ при дополнительном предположении, что $x^2 \leqslant 5$.

Тема: «Методы решения иррациональных уравнений»

Решение 3. Если положить $t = \sqrt{x+5}$, то $x = t^2 - 5$ и $x^2 = t^4 - 10t^2 + 25$. Поэтому в результате замены мы получим уравнение $t^4 - 10t^2 + t + 20 = 0$. Нетрудно видеть, что рациональных решений данное уравнение не имеет. Однако его корни нетрудно будет найти, представив его левую часть как произведение двух квадратных трехчленов. Будем искать это разложение в виде

$$t^4 - 10t^2 + t + 20 = (t^2 + at - 4)(t^2 + bt - 5).$$

Так как

$$(t^2 + at - 4)(t^2 + bt - 5) = t^4 + (a+b)t^3 + (ab - 9)t^2 - (5a + 4b)t + 20,$$

то числа a и b являются решениями системы

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ ab - 9 = -10, \\ 5a + 4b = -1. \end{cases}$$

Ее решениями являются $a = -1$ и $b = 1$, следовательно,

$$t^4 - 10t^2 + t + 20 = (t^2 - t - 4)(t^2 + t - 5).$$

Тема: «Уравнения высших степеней»

Решение 4. То, что данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sqrt{x+5} = -x$ и $\sqrt{x+5} = x+1$, можно показать при помощи следующей цепочки преобразований

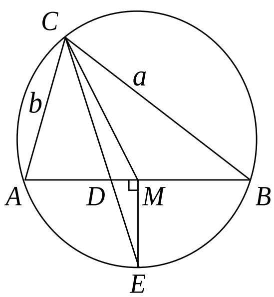
$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \iff x^2 + x + \tfrac{1}{4} = x + 5 - \sqrt{x+5} + \tfrac{1}{4} \iff$$
$$\iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+5} - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

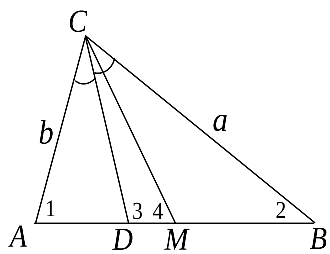
Интересно то, что одному из авторов такой подход кажется самым естественным, тогда как другому — самым неестественным.

Тема: «Тождественные преобразования»

3.I.11. Введем следующие обозначения. Пусть $CA = b$, $CB = a$, CM — медиана треугольника ABC, а CD — его биссектриса. Положим также $CM = m$ и $CD = l$. Если $a = b$, то треугольник — равнобедренный, а потому $m = l$. Поэтому будем считать, что $a > b$.

Решение 1. Хорошо известно, что биссектриса делит сторону AB отношении $AD : DB = b : a$, а медиана — пополам. Так как $b < a$, то $AD < AM$. Пусть E — точка пересечения прямой CD с окружностью, описанной вокруг данного треугольника (левый рисунок).





Поскольку CD — это биссектриса угла C, то точка E делит дугу AB пополам. Значит, точка M является основанием перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AB. Так как $ME < DE$, то

$$CD + DE = CE < CM + ME < CM + DE, \text{ откуда } CD < CM.$$

Тема: «Геометрические неравенства»

Решение 2. Так как $b < a$, то $\angle 2 < \angle 1$ (правый рисунок). Так как точка M лежит между точками D и B, то $\angle BCM < \angle BCD = \angle ACD$. Поэтому $\angle 4 = \angle BCM + \angle 2 < \angle ACD + \angle 1 = \angle 3$. Следовательно, $CD < CM$.

Тема: «Геометрические неравенства»

Решение 3. Так как $m^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$ и $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$, то $m^2 \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{4} = p(p-c)$, где p — полупериметр. С другой стороны, $l^2 = \dfrac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2} = \dfrac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$. Так как $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, то $\dfrac{4ab}{(a+b)^2} \leqslant 1$, поэтому $l^2 \leqslant p(p-c) \leqslant m^2$.

Тема: «Доказательство неравенств»

Решение 4. В силу формул для длин медианы и биссектрисы (см. предыдущее решение), неравенство $l \leqslant m$ равносильно неравенствам

$$\frac{ab((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2} \leqslant \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4},$$
$$4ab(a+b)^2-4abc^2 \leqslant 2(a^2+b^2)(a+b)^2-c^2(a+b)^2,$$
$$c^2(a+b)^2-4abc^2 \leqslant 2(a^2+b^2)(a+b)^2-4ab(a+b)^2,$$
$$c^2(a-b)^2 \leqslant 2(a+b)^2(a-b)^2.$$

Последнее неравенство верно в силу неравенства $c < a+b$ (неравенства треугольника).

Тема: «Доказательство неравенств»

3.I.12. Решение 1. Имеем,

$$x^4-2xy+y^4 = x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-2xy+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2} =$$
$$= \left(x^2-y^2\right)^2+2\left(xy-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{2} \geqslant -\tfrac{1}{2}.$$

При этом равенство имеет место в случае, если $x^2=y^2$ и $xy=\frac{1}{2}$, т. е., к примеру, при $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Тема: «Преобразование алгебраических выражений»

Решение 2. Можно также было воспользоваться тождеством

$$x^4-2xy+y^4 = \left(x^2-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y^2-\tfrac{1}{2}\right)^2+(x-y)^2-\tfrac{1}{2} \geqslant -\tfrac{1}{2}.$$

Тема: «Преобразование алгебраических выражений»

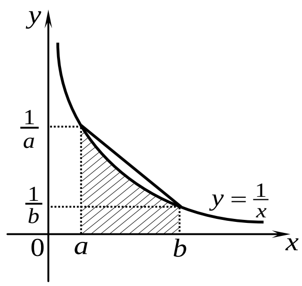
Решение 3. Если $y=kx$, то $x^4-2xy+y^4=(k^4+1)x^4-2kx^2$. Полученное выражение является квадратичным относительно x^2, поэтому принимает наименьшее значение при $x^2=\frac{k}{k^4+1}$. Значение этого выражения в этой точке равно $-\frac{k^2}{k^4+1} \geqslant -\frac{1}{2}$.

Тема: «Свойства квадратичной функции»

3.II.1. Умножив обе части уравнения на $1000(x+y+z)$, получим уравнение $\overline{xyz}\cdot(x+y+z)=1000$. Если $x=0$, то $y+z<20$, откуда следует, что $\overline{yz}>50$, а таких двузначных делителей число 1000 не имеет. Число 1000 имеет пять натуральных трехзначных делителей: 100, 125, 200, 250 и 500. Непосредственная проверка показывает, что данному уравнению удовлетворяет только тройка $(1;2;5)$.

Ответ: $\{(1;2;5)\}$.

3.II.2. Доказательство 1. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$. Ясно, что площадь подграфика этой функции на отрезке $[a;b]$ меньше, чем площадь прямоугольной трапеции с высотой $b-a$ и основаниями, длины которых равны $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ (рисунок).



Поэтому

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx < \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\cdot(b-a) \iff \ln b-\ln a < \frac{b^2-a^2}{2ab} \iff 2ab\ln\frac{b}{a} < b^2-a^2.$$

Доказательство 2. Разделим обе части данного неравенства на a^2 и положим $t=\frac{b}{a}$. Получим неравенство $t^2-1>2t\ln t$, которое надо доказать при всех $t>1$. Введем функцию $f(x)=t^2-1-2t\ln t$. Тогда $f'(t)=2t-2\ln t-2=2(t-1-\ln t)$. Докажем, что $\ln t<t-1$ при всех $t>1$ (более того, это неравенство справедливо также при всех t из промежутка $(0;1)$). Положим $g(t)=t-1-\ln t$. Так как $g'(t)=1-\frac{1}{t}$, то $g'(t)>0$ при всех $t>1$. Следовательно, функция $g(t)$ возрастает на промежутке $[1;+\infty)$, поэтому $g(t)>g(1)=0$ при всех $t>1$. Таким образом, $f'(t)>0$ при всех $t>1$, значит, эта функция на промежутке $[1;+\infty)$ является возрастающей. Следовательно, $f(t)>f(1)=0$ при всех $t>1$.

3.II.3. Введем функцию $g(x)=f(x)-\frac{\beta}{\alpha}\,x$. Так как

$$g(x+\alpha)=f(x+\alpha)-\frac{\beta}{\alpha}\,(x+\alpha)=f(x)+\beta-\frac{\beta}{\alpha}\,x-\beta=f(x)-\frac{\beta}{\alpha}\,x=g(x),$$

то $g(x)$ является α-периодической функцией. Значит, $f(x)$ есть сумма α-периодической функции $g(x)$ и линейной функции $h(x)=\frac{\beta}{\alpha}\,x$.

3.II.4. Выведем прежде всего формулу для радиуса вневписанной окружности. Пусть P есть центр окружности радиусом r_3, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB треугольника ABC. Из равенства $S_{PAB} + S_{ABC} = S_{PAC} + S_{PBC}$ следует, что

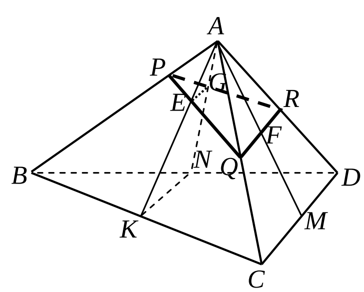
$$S_{ABC} = S = \frac{ar_3}{2} + \frac{br_3}{2} - \frac{cr_3}{2},$$

откуда $r_3 = \frac{2S}{a+b-c}$. Радиусы двух других вневписанных окружностей находятся по аналогичным формулам, $r_1 = \frac{2S}{b+c-a}$ и $r_2 = \frac{2S}{a+c-b}$. Так как радиус окружности, вписанной в данный треугольник, находится по формуле $r = \frac{2S}{a+b+c}$, то справедливо соотношение

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{b+c-a}{2S} + \frac{a+c-b}{2S} + \frac{a+b-c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{r}\ .$$

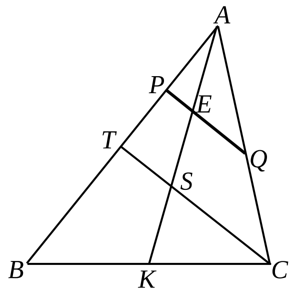
По условию задачи $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ и $r_3 = 6$, откуда $r = 1$. Треугольник с заданными радиусами вневписанных окружностей существует; это — прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, так называемый «египетский» треугольник.

3.II.5. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, AK, AM, AN — медианы его граней ABC, ACD, ABD. Обозначим через E, F и G точки пересечения плоскости PQR с медианами AK, AM и AN, соответственно (рисунок).



Так как $AE : EK = AG : GN$, то $EG \parallel KN$. Аналогичным образом, $KN \parallel CD$. Поэтому $EG \parallel CD$, значит, $EG \parallel (ACD)$. Следовательно, плоскость PQR, содержащая прямую EG, пересекает плоскость ACD по прямой QR, параллельной EG, а, значит, $QR \parallel CD$. Поскольку при этом QR проходит через середину F медианы AM, точки Q и R — середины отрезков AC и AD.

Пусть медиана CT треугольника ABC пересекает медиану AK в точке S, а сторону AB — в точке T (рисунок).



Тогда $AS = \frac{2}{3}\,AK$ и, так как $AE = \frac{1}{3}\,AK$, то точка E — середина отрезка AS. Поскольку Q — середина AC, то P — середина AT, поэтому $AP : AB = 1 : 4$. Следовательно,

$$\frac{V_{APQR}}{V_{ABCD}} = \frac{AP \cdot AQ \cdot AR}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{V_{APQR}}{V_{BCDPQR}} = \frac{1}{15}\,.$$

3.II.6. Комментарий. Все, что следует из приведенного рассуждения, так это только то, что все значения данной функции при $x > 0$ являются положительными — что и так было очевидно.

Приведем одно из возможных решений этой задачи. В силу неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел, справедливо неравенство

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\ .$$

Поскольку это неравенство обращается в равенство при $\frac{x}{2} = \frac{2}{x^2}$, т. е. при $x = \sqrt[3]{4}$, и поскольку функция $f(x)$ непрерывна и стремится к бесконечности при $x \to +\infty$, то множеством ее значений является промежуток $\big[\frac{3}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\big)$.

3.II.7. Решение 1. Областью определения данной функции является отрезок $[0; 2]$. Для нахождения множества ее значений найдем точки, в которых производная этой функции равна нулю. Так как $f'(x) = 1 + \frac{3-3x}{\sqrt{6x-x^2}}$, то

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt{6x - 3x^2} = 3x - 3 \iff \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0, \\ x \geqslant 1, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{3}{2}$. Найдем значения этой функции при $x = \frac{3}{2}$ и на концах отрезка $[0; 2]$ — области определения этой функции.

x	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-1	2	1

Следовательно, множеством значений функции является отрезок $[-1; 2]$.
Тема: «Применение производной для исследования функций»

Решение 2. Запишем данную функцию в виде

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2x - x^2}$$

и рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}(1; \sqrt{3}\,)$ и $\boldsymbol{b}(x-1; \sqrt{2x - x^2}\,)$. По определению функции $f(x)$ ее значениями являются скалярные произведения $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ этих векторов. Заметим, что $|\boldsymbol{a}| = 2$ и $|\boldsymbol{b}| = 1$. Так как $-|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \leqslant \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leqslant |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$, то $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, если $\frac{x-1}{1} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Так как $\frac{3}{2} \in [0; 2]$, то наибольшее значение функции $f(x)$ равно 2. Заметим, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не могут быть противоположно направленными. Но нетрудно заметить, что оба слагаемых $x - 1$ и $\sqrt{2x - x^2}$ при $x = 0$ принимают свое наименьшее значение на отрезке $[0; 2]$. Поэтому $f(0) = -1$ — наименьшее значение этой функции.
Тема: «Скалярное произведение векторов»

Решение 3.

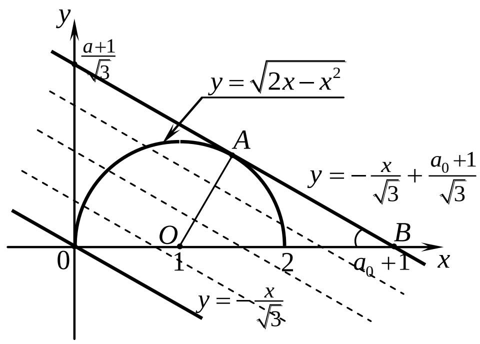
$$f(x) = x - 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

и положим $x - 1 = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функции $g(t) = \sin t + \sqrt{3} \cos t$. Так как $g(t) = 2 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ и при этом $-\frac{\pi}{6} \leqslant t + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{5\pi}{6}$, то множеством значений является отрезок $[-1; 2]$.
Тема: «Замена переменной. Тригонометрические функции»

Решение 4. Перейдем на другой язык и найдем все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $x - 1 + \sqrt{6x - 3x^2} = a$. Перепишем его в виде

$$\sqrt{2x - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{a+1}{\sqrt{3}}\,.$$

Графиком $y = \sqrt{2x - x^2}$ его левой части является полуокружность, график его правой части — прямая $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{a+1}{\sqrt{3}}$ (рисунок).



Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда прямая и окружность имеют общие точки. Прямая с угловым коэффициентом $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, касающаяся окружности, задается уравнением $y = \frac{3-x}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $0 \leqslant a+1 \leqslant 3$, откуда мы и получаем, что $-1 \leqslant a \leqslant 2$.
Тема: «Графические методы исследования уравнений»

Четвертая олимпиада (2010 год)

4.I.1. Положив $t = 2^x$, получим уравнение

$$t^3 + 4at^2 + a^2t - 6a^3 = 0.$$

Поскольку $t = a$ является его корнем, то его левая часть делится на $t - a$. В результате получим уравнение

$$(t-a)(t^2 + 5at + 6a^2) = (t-a)(t+2a)(t+3a) = 0.$$

Таким образом, $t = a$, $t = -2a$, или $t = -3a$. Так как $t > 0$, то если $a = 0$, то данное уравнение не имеет решений. Если $a > 0$, то оно имеет одно решение, если же $a < 0$, то оно имеет два решения.

4.I.2. Докажем, что данное число делится на 7 и на 13. Воспользуемся тем, что при любом натуральном n и любых целых a и b число $a^n - b^n$ делится на $a - b$, что следует из тождества

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Поскольку

$$5^n(5^n+1) - 6^n(3^n+2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n = 25^n - 18^n - (12^n - 5^n),$$

то каждая из разностей $25^n - 18^n$ и $12^n - 5^n$ делится на 7, значит, и само данное число делится на 7. Если переписать данное число в виде $25^n - 12^n - (18^n - 5^n)$, то, поскольку каждая из разностей делится на 13, данное число делится и на 13.

4.I.3. Решения 1–2. Так как $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$, мы можем записать данное уравнение в виде $\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{y} = 1$. Если мы докажем, что $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leqslant \frac{1}{2}$. то сумма дробей может быть равна 1 только если каждое из слагаемых равно $\frac{1}{2}$, что имеет место только тогда, когда $x = 2$ и $y = 2$.

Доказательство 1. Положим $a = \sqrt{x-1}$. Тогда $x = a^2 + 1$ и неравенство приобретает вид $\frac{a}{a^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$, или $a^2 + 1 \geqslant 2a$, что очевидно, так как $(a-1)^2 \geqslant 0$.

Доказательство 2. Положим $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ и найдем наибольшее значение этой функции на промежутке $[1; +\infty)$. Для этого вычислим производную функции $f(x)$,

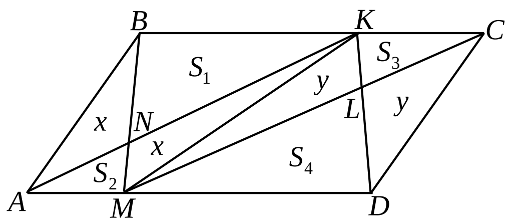
$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x - 2(x-1)}{2x^2\sqrt{x-1}} = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}\,.$$

Поскольку $f'(x) > 0$ при $1 < x < 2$ и $f'(x) < 0$ при $x > 2$, то данная функция возрастает на промежутке $[1; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$. Следовательно в точке $x = 2$ она принимает наибольшее значение, поэтому для любых значений x из промежутка $[1; +\infty)$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(2) = \frac{1}{2}$.

Ответ: $(x; y) = (2; 2)$.

Решение 3. После естественной замены $u = \sqrt{x-1}$ и $v = \sqrt{y-1}$ мы получим уравнение $u(v^2 + 1) + v(u^2 + 1) = (u^2 + 1)(v^2 + 1)$. Так как $2u(v^2 + 1) \leqslant (u^2 + 1)(v^2 + 1)$ и $2v(v^2 + 1) \leqslant (u^2 + 1)(v^2 + 1)$, то $2u(v^2+1)+2v(u^2+1) \leqslant 2(u^2+1)(v^2+1)$. При этом равенство возможно только в случае, когда $u = v = 1$.

4.I.4. Без потери общности может считать, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Введем следующие обозначения: S_1 — площадь треугольника BKN, S_2 — площадь треугольника AMN, S_3 — площадь треугольника CKL, S_4 — площадь треугольника DLM, x — площадь треугольника KMN и y — площадь треугольника KLM (рисунок).



Треугольники KMA и ABM имеют одинаковые площади, следовательно, треугольники KMN и ABN также имеют равные площади. Имеем, $\frac{x}{S_1} = \frac{AN}{NK}$ и $\frac{S_2}{x} = \frac{AN}{NK}$, значит, $\frac{x}{S_1} = \frac{S_2}{x}$, откуда $x = \sqrt{S_1 S_2}$. Аналогичным образом, $y = \sqrt{S_3 S_4}$. Так как $S_1 + S_2 \geqslant 2\sqrt{S_1 S_2}$, то

$$2(x+y) = 1-(S_1+S_2+S_3+S_4) \leqslant 1-2\left(\sqrt{S_1 S_2}+\sqrt{S_3 S_4}\right) = 1-2(x+y),$$

поэтому $x + y \leqslant \frac{1}{4}$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $S_1 = S_2$ и $S_3 = S_4$, т. е. тогда и только тогда, когда $KM \parallel AB$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

4.I.5. Решение 1. Введем обозначения: $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ и $p_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$. Пусть для определенности $a_1 > a_2 > a_3$. Поскольку по условию графики $y = p_1(x)$ и $y = p_2(x)$ имеют единственную общую точку, то квадратное уравнение $p_1(x) - p_2(x) = 0$ имеет единственный корень, откуда следует, что $p_1(x)-p_2(x) = (a_1-a_2)(x-x_1)^2$ (здесь x_1 — абсцисса точки пересечения графиков). Аналогичным образом, $p_2(x)-p_3(x) = (a_2-a_3)(x-x_2)^2$ и $p_1(x) - p_3(x) = (a_1 - a_3)(x - x_3)^2$. Таким образом, имеет место тождество

$$(a_1 - a_3)(x - x_3)^2 = (a_1 - a_2)(x - x_1)^2 + (a_2 - a_3)(x - x_2)^2.$$

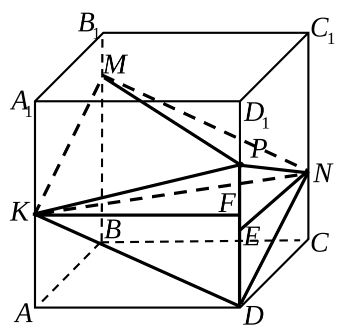
Подставив в него $x = x_3$, получим, что

$$(a_1 - a_2)(x_3 - x_1)^2 + (a_2 - a_3)(x_3 - x_2)^2 = 0.$$

Так как $a_1 - a_2 > 0$ и $a_2 - a_3 > 0$, то это возможно только в случае, когда $x_3 = x_1 = x_2$. Следовательно, графики всех трех трехчленов пересекаются в одной точке.

Решение 2. Вычтем из первых двух квадратных трехчленов третий. В результате мы получим квадратные трехчлены, каждый из которых имеет кратный корень. Значит, графиками этих разностей являются параболы, касающиеся оси абсцисс в точках x_1 и x_2. Если $x_1 \neq x_2$, то, если они лежат по разные стороны оси абсцисс, то они вообще не имеют общих точек. Если же эти параболы лежат по одну сторону от оси, то они пересекаются в двух точках. Значит, $x_1 = x_2$, таким образом, точка с абсциссой x_1 является общей точкой графиков всех трех данных трехчленов.

4.I.6. Обозначим через a, b и c длины ребер AD, DC и DD_1 данного параллелепипеда, а через V — его объем. Согласно свойству параллельных плоскостей, $KM \parallel DN$ и $MN \parallel KD$, поэтому $DKMN$ — параллелограмм (рисунок).



Следовательно, плоскость KPN делит пирамиду $PDKMN$ на две равновеликие пирамиды. Таким образом, объем пирамиды $PDKMN$ равен удвоенному объему пирамиды $NDKP$. Опустим перпендикуляры NE и KF на прямую DD_1. Так как плоскости ADD_1 и CDD_1 перпендикулярны, то $NE \perp (ADD_1)$. Таким образом,

$$V_{PDKMN} = 2V_{NDKP} = 2 \cdot \frac{1}{3}\, S_{DKP} \cdot NE = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot DP \cdot KF \cdot NE.$$

Поскольку $DP = \frac{m}{m+n}\, c$, $KF = a$ и $NE = b$, окончательно получаем, что

$$V_{PDKMN} = \frac{m}{3(m+n)}\, abc = \frac{m}{3(m+n)}\, V.$$

4.I.7. Справедливо разложение

$$\begin{aligned}x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5+x^2y^6-xy^7+y^8=\\=x^6(x^2-xy+y^2)-x^3y^3(x^2-xy+y^2)+y^6(x^2-xy+y^2)=\\=(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6).\end{aligned}$$

Поскольку каждый из множителей в его правой части положителен, то их произведение может быть простым числом только в случае, если ровно один из них равен 1. Если $x^2-xy+y^2=1$, то $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\,y^2=1$, откуда $y^2\leqslant\frac{4}{3}$, следовательно, $y=-1;0;1$. Подставляя эти значения получим, что если $x^2-xy+y^2=1$, то

$$(x,y)=(0,-1);(-1,-1);(1,0);(-1,0);(0,1);(1,1).$$

В каждом из этих случаев $x^6-x^3y^3+y^6=1$, поэтому и данное число равно 1, следовательно, не является простым.

Так как $x^6-x^3y^3+y^6=\left(x^3\right)^2-x^3y^3+\left(y^3\right)^2$, то $x^6-x^3y^3+y^6=1$ в тех же точках. Следовательно ни при каких целых значениях x и y данное число простым не является.

4.I.8. Комментарий. В приведенном решении допущена следующая логическая ошибка. Равенство $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y$ не равносильно равенству $x=y$, а является только его следствием. Правильный ответ: $x>-1$.

4.I.9. Комментарий. В приведенном решении допущена следующая ошибка. При заданных условиях точка H может являться центром вневписанной окружности треугольника ABC. Правильный ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{16}$.

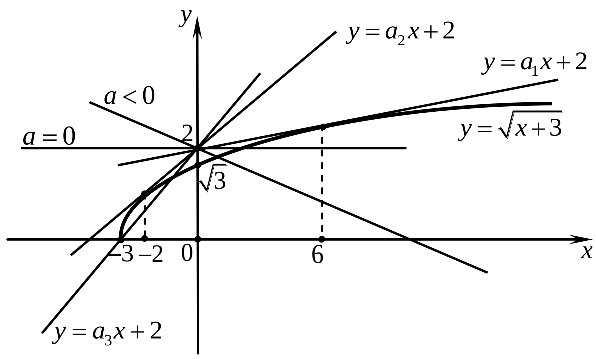
4.I.10. *Ответ:* два решения при $a\in\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$; одно решение при $a\in\left(-\infty;0\right]\cup\left\{\frac{1}{6}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right]$; нет решений при $a\in\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.

Решение 1. Замена $t=\sqrt{x+3}$ сводит данное уравнение к уравнению $at^2-t+2-3a=0$, каждому неотрицательному решению которого соответствует единственное решение данного уравнения. При $a=0$ уравнение не является квадратным и имеет единственный корень $t=2$. Пусть $a\neq0$. Дискриминант квадратного уравнения равен $12a^2-8a+1$. При $\frac{1}{6}<a<\frac{1}{2}$ дискриминант отрицателен, поэтому квадратное уравнение не имеет решений. При $a=\frac{2}{3}$ уравнение имеет два неотрицательных корня $t=0$ и $t=\frac{3}{2}$. Пусть $a\neq\frac{2}{3}$. По теореме Виета произведение корней равно $\frac{2-3a}{a}$. Следовательно, если $a<0$ или же

$a > \frac{2}{3}$, то корни имеют различные знаки, поэтому лишь один из них положителен. При $0 < a < \frac{1}{6}$ и при $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ уравнение имеет два различных положительных корня. Осталось заметить, что при $a = \frac{1}{6}$ и $a = \frac{1}{2}$ квадратное уравнение имеет единственный положительный корень.

Тема «Расположение корней квадратных уравнений»

Решение 2. Изобразим на одном рисунке график $y = \sqrt{x+3}$ и прямую $y = ax + 2$ при различных значениях параметра a.



Ясно, что график и прямая имеют две общие точки при $0 < a < a_1$ и $a_2 < a \leqslant a_3$. Они имеют одну общую точку при $a \leqslant 0$, $a = a_1$, $a = a_2$ и при $a > a_3$. Этот график и прямая не имеют общих точек при $a_1 < a < a_2$.

Число a_3 есть угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(-3; 0)$ и $(0; 2)$, а потому $a_3 = \frac{2}{3}$. Числа a_1 и a_2 — это угловые коэффициенты касательных к графику, проходящих через точку $(0; 2)$. Уравнение прямой, касающейся графика в точке с абсциссой x_0, имеет вид

$$y = \frac{x - x_0}{2\sqrt{x_0 + 3}} + \sqrt{x_0 + 3}\,.$$

Эта прямая проходит через точку $(0; 2)$, если

$$2 = -\frac{x_0}{2\sqrt{x_0 + 3}} + \sqrt{x_0 + 3}\,, \text{ или } 4\sqrt{x_0 + 3} = x_0 + 6,$$

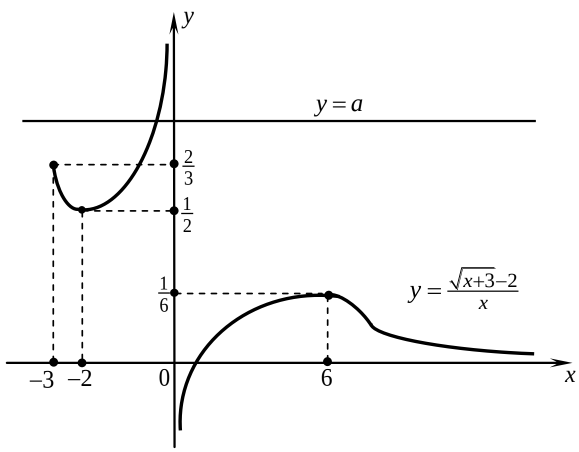
Решая полученное уравнение, получим, что $x_0 = 6$ или $x_0 = -2$, откуда следует, что $a_1 = \frac{1}{6}$ и $a_2 = \frac{1}{2}$.

Тема «Графическое исследование уравнений»

Решение 3. Перепишем уравнение в виде $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x} = a$ и положим $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x}$. Найдем промежутки монотонности и изобразим график этой функции. Имеем,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+3}} - \sqrt{x+3} + 2}{x^2} = \frac{4\sqrt{x+3} - x - 6}{2x^2\sqrt{x+3}}.$$

Исследуя знак $f'(x)$, получим, что $f'(x) > 0$ на промежутках $(-2; 0)$ и $(0; 6)$; $f'(x) < 0$ на промежутках $(-3; -2)$ и $(6; +\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; 6]$ и убывает на каждом из промежутков $[-3; -2]$ и $[6; +\infty)$. При этом $f(-3) = \frac{2}{3}$, $f(-2) = \frac{1}{2}$, $f(6) = \frac{1}{6}$. Кроме того, $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$ и $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. На следующем рисунке изображен график этой функции.

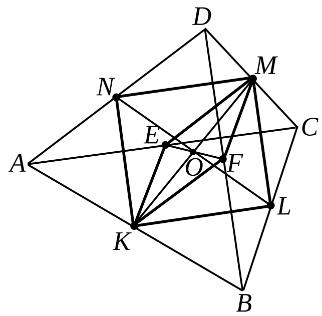


Ответ следует из следующего стандартного соображения: уравнение $f(x) = a$ имеет столько же решений, сколько точек пересечения имеет график $y = f(x)$ и прямая $y = a$.

Тема «Применение производной для иследования функций»

4.I.11. Решение 1. Известно, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Таким образом, отрезки KM и LN, соединяющие середины противоположных сторон

AB и CD, BC и AD четырехугольника $ABCD$, являются диагоналями этого параллелограмма, следовательно, делятся пополам точкой P их пересечения (рисунок).



Аналогичным образом доказывается, что середины двух противоположных сторон четырехугольника и середины его диагоналей также являются вершинами параллелограмма. Поэтому и середина отрезка EF с концами в серединах диагоналей AC и BD четырехугольника совпадает с точкой P.

Тема: «Свойства четырехугольников»

Решение 2. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника, точки E и F — середины его диагоналей. Пусть точки P_1, P_2 и P_3 — середины отрезков KM, LN и EF, соответственно. Тогда для произвольной точки X пространства справедливы равенства

$$\overline{XP_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{XK} + \overline{XM}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{XA} + \overline{XB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{XC} + \overline{XD}\right)\right) = \\ = \frac{1}{4}\left(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD}\right).$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$\overline{XP_2} = \frac{1}{4}\left(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD}\right) \text{ и}$$
$$\overline{XP_3} = \frac{1}{4}\left(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD}\right),$$

откуда и следует, что $P_1 = P_2 = P_3$.

Тема: «Использование векторов для решения геометрических задач».

Решение 3. Предположим, что в пространстве задана система координат и точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ — вершины четырехугольника. В обозначениях предыдущего решения получаем, что точки K, M и P_1 имеют, соответственно, координаты

$$K\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right),\ M\left(\frac{x_3+x_4}{2}; \frac{y_3+y_4}{2}; \frac{z_3+z_4}{2}\right) \text{ и}$$
$$P_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}; \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}; \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

Вычисления показывают, что координаты точек P_2 и P_3 совпадают с координатами точки P_1.
Тема: «Метод координат»

4.I.12. Заметим прежде всего, что согласно неравенствам для средних справедливы неравенства

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

обращающиеся в равенства только при $a = b$. Следовательно, средним членом арифметической прогресии может быть только среднее арифметическое этих чисел.

Решение 1. Воспольуемся характеристическим свойством арифметической прогрессии. Имеем,

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \iff (a+b)^2 = ab + \sqrt{2ab(a^2+b^2)} + \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$\iff a^2+b^2 - 2\sqrt{2ab}\,\sqrt{a^2+b^2} + 2ab = 0 \iff \left(\sqrt{2ab} - \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 0$$
$$\iff 2ab = a^2+b^2 \iff (a-b)^2 = 0 \iff a = b.$$

Тема: «Доказательство неравенств»

Решение 2. Положим $g = \sqrt{ab}$, $p = \frac{a+b}{2}$, $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. По условию $g+q = 2p$. С другой стороны, как нетрудно видеть, $g^2+q^2 = 2p^2$, откуда следует, что $\frac{g+q}{2} = \sqrt{\frac{g^2+q^2}{2}}$, что имеет место только при $p = q = g$, откуда и следует, что $a = b$.
Тема: «Неравенства для средних двух чисел»

Решение 3. В обозначениях предыдущего решения рассмотрим два прямоугольных треугольника: один — равнобедренный с катетом p, а другой с катетами q и q. Острый угол второго треугольника обозначим через α. Так как $g^2+q^2 = 2p^2$, то гипотенузы c этих треугольников равны. Имеем, $p = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $g = c\sin\alpha$ и $q = c\cos\alpha$. По условию $g+q = 2p$, откуда $c\cos\alpha + c\sin\alpha = c\sqrt{2}$, или $\sin\bigl(\alpha + \frac{\pi}{4}\bigr) = 1$, что имеет место только при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Поэтому $p = g = q$, откуда и следует, что $a = b$.
Тема: «Прямоугольные треугольники»

Решение 4. Если $a \neq b$, то

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)} - (a+b)}{a+b-2\sqrt{ab}} =$$
$$= \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} < 1,$$

так как $2\sqrt{ab} < \sqrt{2(a^2+b^2)}$.
Тема: «Средние двух чисел»

4.II.1. Имеем,

$$3\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + 4\cos\alpha = 12 \iff \operatorname{tg}\alpha(3-\cos\alpha) - 4(3-\cos\alpha) = 0 \iff$$
$$\iff (\operatorname{tg}\alpha - 4)(3-\cos\alpha) = 0 \iff \operatorname{tg}\alpha = 4.$$

Ответ: 4.

4.II.2. Так как

$$b_n = a_n + c = qa_{n-1} + d + c = q(b_{n-1} - c) + d + c = qb_{n-1} - qc + c + d,$$

то если $c(q-1) = d$, то последовательность b_n является геометрической прогрессией. Таким образом, можно взять $c = \frac{d}{q-1}$.

4.II.3. Пусть (x_0, y_0) — решение уравнения $3x + 5y = a$, где x_0 и y_0 — натуральные числа. Известно, что все целочисленные решения этого уравнения имеют вид (x_0+5k, y_0-3k), где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом пара (x_0, y_0) является единственным натуральным решением данного уравнения, если $y_0 - 3 \leqslant 0$ или же $x_0 - 5 \leqslant 0$, т. е. если $x_0 \in \{1,2,3,4,5\}$ и $y_0 \in \{1,2,3\}$. В следующей таблице для каждой такой пары (x_0, y_0) указано значение $a = 3x_0 + 5y_0$.

$y \diagdown x$	1	2	3	4	5
1	8	11	14	17	20
2	13	16	19	22	25
3	18	21	24	27	30

Таким образом, содержащиеся в данной таблице числа и являются искомыми.

Ответ: $8, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 30$.

4.II.4. Решение 1. Идея подсказана формулой для $(x+y)^4$. Так как

$$(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2) = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = (x-y)^4 \geqslant 0,$$

то $8xy(x^2+y^2) \leqslant (x+y)^4$. Ясно, что $4xy \leqslant (x+y)^2$. Следовательно,

$$32x^2y^2(x^2+y^2) \leqslant (x+y)^6.$$

Поскольку $x+y=2$, то $x^2y^2(x^2+y^2) \leqslant 2$. Ясно, что при $x=y=1$ мы получаем равенство.

Ответ: 2.

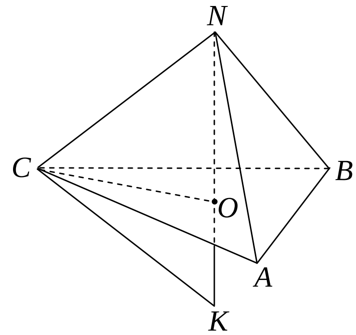
Решение 2. Положим $t = xy$. Так как $xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$, то $t \in [0;1]$. Так как $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, то $x^2+y^2 = 4-2t$, а $x^2y^2(x^2+y^2) = t^2(4-2t)$. Найдем наибольшее значение функции $f(t) = 4t^2 - 2t^3$ на отрезке $[0;1]$. Поскольку $f'(t) = 8t - 6t^2 \geqslant 0$ при всех $t \in [0;1]$ то ее наибольшим значением на этом отрезке является значение $f(1) = 2$.

Решение 3. Положим $x = 2\cos^2 t$ и $y = 2\sin^2 t$, так что $x+y=2$. Тогда $xy = 4\sin^2 t\cos^2 t = \sin^2 2t$ и

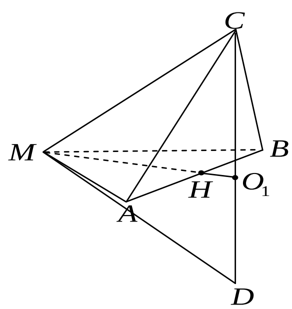
$$x^2+y^2 = 4\cos^4 t + 4\sin^4 t = 4 - 8\sin^2 t\cos^2 t = 4 - 2\sin^2 2t.$$

Положим $u = \sin^2 2t$. Тогда $x^2y^2(x^2+y^2) = 4u - 2u^2$. Наибольшее значение на отрезке $[0;1]$ этого квадратного двучлена равно 2.

4.II.5. Найдем вначале диаметр d сферы, описанной вокруг правильного тетраэдра $NABC$. Так как $CO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 1$, то $NO = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$. В правильном тетраэдре центр описанной сферы совпадает с его центром тяжести, следовательно, лежит на высоте NO данного тетраэдра и делит ее в отношении $3:1$, считая от вершины. Поэтому $d = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot NO = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (рисунок).



Рассмотрим теперь пирамиду $MABC$, вписанную в ту же сферу. Центр этой сферы лежит вне этой пирамиды. Так как $CA = CB = CM$, то этот центр лежит на прямой, содержащей высоту CO_1 пирамиды $MABC$. Продолжим эту высоту до точки D ее пересечения со сферой (рисунок).



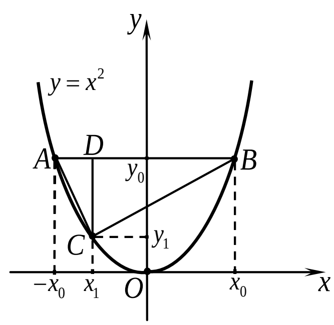
Треугольник CDM — прямоугольный, поэтому $CM^2 = CO_1 \cdot d$, откуда $CO_1 = \sqrt{2}$. Треугольник CMO_1 также прямоугольный, а потому $MO_1 = \sqrt{CM^2 - CO_1^2} = 1$. Рассмотрим теперь треугольник ABM. Так как точка O_1 — центр описанной вокруг него окружности — лежит вне этого треугольника, то $\angle AMB > 90°$. Радиус R этой окружности равен $MO_1 = 1$. По теореме синусов $AB = 2R\sin AMB$, $\sqrt{3} = 2\sin AMB$, поэтому $\sin AMB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos AMB = -\frac{1}{2}$. Наконец, по теореме косинусов

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2\,AM \cdot BM \cos AMB = 3AM^2,$$

поэтому $AM = BM = 1$.

4.II.6. Комментарий. В приведенном решении используется тот факт, что функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = 0$. Поскольку это неизвестно, то нельзя считать доказанным, что формула $f(x) = ax$ задает все функции, для которых $f(x + y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. Более того, как известно, это утверждение неверно.

4.II.7. Пусть $B(x_0; y_0)$, $C(x_1; y_1)$. Тогда A — это точка с координатами $(-x_0; y_0)$. Рассмотрим точку $D(x_1, y_0)$ (рисунок).



Тогда $CD = y_0 - y_1$.

Решение 1. Так как $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то

$$4x_0^2 = (x_0 + x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2,$$

откуда $4x_0^2 = 2x_1^2 + 2x_0^2 + 2(y_0 - y_1)^2$, или $2y_0 = y_1 + y_0 + (y_0 - y_1)^2$, поэтому $y_0 - y_1 = (y_0 - y_1)^2$. Поскольку $y_0 \neq y_1$, то $y_0 - y_1 = 1$.

Тема: «Формула для расстояния между точками»

Решение 2. Как известно, $CD^2 = BD \cdot AD$, откуда следует, что $(y_0 - y_1)^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = x_1^2 - x_0^2 = y_0 - y_1$. Поскольку $y_0 \neq y_1$, то $y_0 - y_1 = 1$.

Тема: «Высоты прямоугольных треугольников»

Решение 3. Точка C лежит на окружности с диаметром AB. Поскольку эта окружность задается уравнением $x^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2$, то $x_1^2 + (y_1 - y_0)^2 = x_0^2$. Поэтому $(y_0 - y_1)^2 = x_0^2 - x_1^2 = y_0 - y_1$, откуда и следует требуемое равенство.

Тема: «Уравнение окружности»

Решение 4. Угловой коэффициент прямой AC равен $\frac{y_1-y_0}{x_1+x_0}$, угловой коэффициент прямой BC равен $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$. Поскольку эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1, таким образом,

$$-1 = \frac{y_1-y_0}{x_1+x_0} \cdot \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{(y_1-y_0)^2}{x_1^2-x_0^2} = \frac{(y_1-y_0)^2}{y_1-y_0} = y_1-y_0,$$

что и требовалось доказать.
Тема: «Условие перпендикулярности прямых»

Решение 5. Введем в рассмотрение векторы $\overline{CA}(-x_0-x_1; y_0-y_1)$ и $\overline{CB}(x_0-x_1; y_0-y_1)$. Покольку они перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, так что

$$0 = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = -x_0^2 + x_1^2 + (y_0-y_1)^2 = (y_0-y_1)^2 - (y_0-y_1).$$

Далее — как в первых решениях.
Тема: «Скалярное произведение»

Пятая олимпиада (2011 год)

5.I.1. Представим число x в виде $x = 2011k+d$, где $d = 0, 1, \ldots 2010$. Так как $\left[\frac{x}{2010}\right] = \left[\frac{x}{2011}\right] + 1 = k+1$, то $k+1 \leqslant \frac{x}{2010} < 2011$, откуда

$$2010k + 2010 \leqslant 2011k + d < 2010k + 4020,$$

значит, $2010 \leqslant k+d < 4020$, или $2010 \leqslant k+d \leqslant 4019$. Таким образом, для каждого из 2011 значений d имеются 2010 значений числа k, таких что число $x = 2011k + d$ является решением данного уравнения. Следовательно, оно имеет $2010 \cdot 2011$ решений.

Ответ: $2010 \cdot 2011$.

5.I.2. Решение 1. Перепишем уравнение в виде

$$\log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_4(\cos x) = t.$$

Тогда $\cos x = 4^t$, $\operatorname{ctg} x = 3^t$ и $\sin x = \left(\frac{4}{3}\right)^t$, поэтому $4^{2t} + \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} = 1$. В правой части полученного уравнения находится возрастающая функция, поэтому оно имеет не более одного решения. Ясно, что решением является $t = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, (так как $\sin x > 0$).

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение 2. Областью определения данного уравнения является объединение промежутков $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что числа

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ являются решениями уравнения. Покажем, что других решений уравнение не имеет. Уравнение можно записать в виде

$$(\cos x)^{1-\log_2\sqrt{3}} = \sin x.$$

Так как $\log_2\sqrt{3} < 1$, то в левой части этого уравнения находится функция, убывающая на каждом из промежутков области определения, тогда как в его правой части находится возрастающая на них функция. Поэтому других решений уравнение не имеет.

5.I.3. Запишем правую часть данного неравенства в виде

$$\frac{a+bc-2bc}{a+bc} + \frac{b+ac-2ac}{b+ac} + \frac{c+ab-2ab}{c+ab} = \\ = 3 - 2\left(\frac{bc}{a+bc} + \frac{ac}{b+ac} + \frac{ab}{c+ab}\right).$$

Таким образом, нам нужно доказать неравенство

$$4\left(\frac{bc}{a+bc} + \frac{ac}{b+ac} + \frac{ab}{c+ab}\right) \geqslant 3.$$

Так как по условию $a + b + c = 1$, то $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a+b)(a+c)$. Аналогичным образом получим, что $b+ac = (b+a)(b+c)$ и $c + ab = (c + a)(c + b)$. Следовательно, получаем неравенство

$$4\left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right) \geqslant 3.$$

Избавившись от знаменателей, получим неравенство

$$4\bigl(bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)\bigr) \geqslant 3(a+b)(b+c)(a+c),$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, неравенство

$$a^2b + ab^2 + b^2 + bc^2 + a^2 + ac^2 \geqslant 6abc.$$

Разделив обе его части на abc, получим верное неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geqslant 6.$$

5.I.4. Мы будем использовать следующие обозначения и формулы. S — площадь треугольника, p — его полупериметр, r — радиус вписанной в треугольник окружности. Известно, что $S = pr$. Если r_a — радиус окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC и продолжений двух других его сторон, то справедлива формула $S = (p-a)r$.

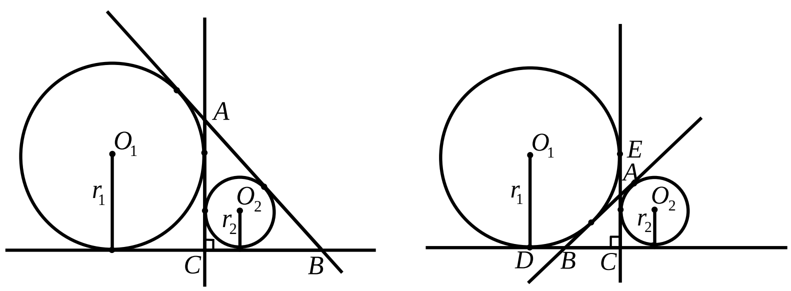
Предположим для определенности, что $r_1 > r_2$. Третья общая касательная данных окружностей может быть их либо внешней, либо внутренней касательной.

Случай 1. Предположим, что третья общая касательная является их внешней касательной. Обозначения — на рисунке. Пусть $a = BC$, $b = AC$ — катеты прямоугольного треугольника ABC, $c = AB$ — его гипотенуза. Поскольку r_1 — радиус окружности, вписанной в этот треугольник, а r_2 — радиус его вневписанной окружности, то

$$\begin{cases} a+c-b = \frac{2S}{r_1}, \\ a+b+c = \frac{2S}{r_2}, \end{cases} \quad \text{то} \quad b = S\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

С другой стороны, так как этот треугольник — прямоугольный, то $r_2 = \frac{1}{2}(a+b-c)$ и $r_1 = \frac{1}{2}(b+c-a)$, откуда $b = r_1 + r_2$, поэтому

$$S = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1 - r_2}.$$



Случай 2. Предположим, что третья общая касательная является внутренней. Обозначения — на рисунке. В этом случае обе данные окружности являются вневписанными, поэтому

$$\begin{cases} a+b-c = \frac{2S}{r_1}, \\ a+c-b = \frac{2S}{r_2}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad a = S\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Так как $r_2 = \frac{1}{2}(a+b+c)$ и $r_1 = \frac{1}{2}(b+c-a)$, то $a = r_1 - r_2$, поэтому

$$S = \frac{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{r_1 + r_2}.$$

Ответ: $\dfrac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{|r_1 - r_2|}$ или $\dfrac{r_1 r_2 |r_1 - r_2|}{r_1 + r_2}$.

5.I.5. Воспользуемся тождеством

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2).$$

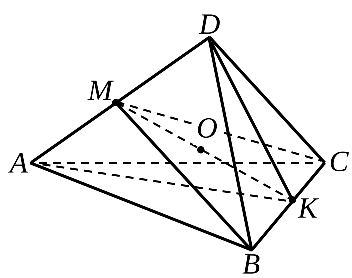
Если числа x и y являются натуральными, то число $x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2$ может быть равно 1 только если $x = y = 1$. Следовательно при всех других значениях x и y число $x^4 + 4y^4$ является составным.

Если n — четное число, то $n^4 + 64^n$ — четное число, а потому не является простым. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $64^n = 64 \cdot 64^{2k} = 64 \cdot 8^{4k} = 4 \cdot \left(2 \cdot 8^k\right)^4 = 4m^4$. Как уже было доказано, число $n^4 + 64^n = n^4 + 4m^4$ — составное.

Ответ: n — произвольное натуральное число.

5.I.6. Поскольку ребра данного тетраэдра касаются сферы, то попарные суммы длин его противоположных ребер равны друг другу. Следовательно длины четырех ребер этого тетраэдра равны $x = \frac{a+b}{2}$.

Решение 1. Пусть $BC = a$, $AD = b$, $AB = BC = BD = CD = x$. Пусть K и M — середины ребер BC и AD (рисунок).



Плоскости ADK и BMC перпендикулярны, соответственно, ребрам BC и AD. Следовательно, они являются плоскостями симметрии тетраэдра, значит, точка O — центр сферы — является серединой высоты

KM равнобедренных треугольников ADK и BMC. Поэтому

$$R = MO = \frac{1}{2}\sqrt{MB^2 - BK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{BD^2 - DM^2 - BK^2} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2ab}}{4}.$$

Решение 2. Ребра данного тетраэдра являются диагоналями граней прямой призмы, основанием которой является ромб с диагоналями a и b, а диагонали ее боковых граней равны x. Высота этой призмы и является диаметром сферы. Пусть y — длина стороны ромба — основания призмы. Тогда $y = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Высота призмы равна

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - y^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{\sqrt{2ab}}{2}.$$

5.I.7. а) Имеем,

$$\int_0^1 \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}\,dx = \\ = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x+1)}{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}\,dx = \\ = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)dx \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,dx = 1.$$

б) Докажем, что данное неравенство верно для всех действительных α. Вначале рассмотрим случай $\alpha = \frac{1}{n}$.

Запишем интеграл по отрезку $[0;1]$ как сумму интегралов по отрезкам вида $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В интегралах с номерами $k = 2, 3, \ldots, n$ сделаем замену $u = x - \frac{k-1}{n}$. В результате мы получим сумму интегралов по отрезку $\left[0 : \frac{1}{n}\right]$, или — интеграл по этому отрезку от функции

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{f\left(x+\frac{k-1}{n}\right)} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)f\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots f\left(x+\frac{n}{n}\right)}{f(x)f\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}} = n.$$

Поэтому исходный интеграл не меньше, чем $\int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx = 1$.

Если $\alpha = \frac{m}{n}$, то вычисления аналогичны. В числителе и в знаменателе дроби под знаком корня степени n будут стоять одни и те же сомножители, но в разных порядках. Поэтому и в этом случае дробь будет равна единице.

Для того, чтобы доказать, что это неравенство справедливо при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, придется воспользоваться предельным переходом, основанном на теореме, не входящей в школьный курс математического анализа.

Рассмотрим последовательность рациональных чисел α_n, стремящуюся к числу α. По доказанному выше для любого n справедливо неравенство

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}\,dx \geqslant 1.$$

Поэтому достаточно доказать, что из того, что $\alpha_n \to \alpha$, следует, что

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}\,dx \to \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\,dx\,.$$

Для этого достаточно доказать, что для любого положительного числа ε существует номер, начиная с которого справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)} - \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\right| < \varepsilon,$$

что является следствием теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке.

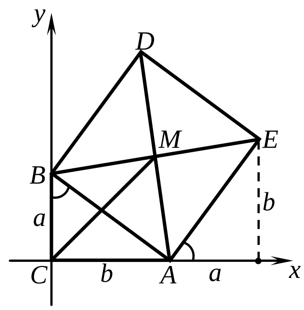
5.I.8. Комментарий. Ошибка приведенного решения состоит в том, что функция $y = \frac{3}{\log_2 x}$ является убывающей не на всей своей области определения, а только на каждом из промежутков $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Поэтому данного уравнение имеет не более одного корня в каждом их них. Кроме $x = 2$, решением уравнения является число $x = \frac{1}{2}$.

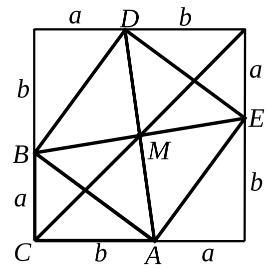
5.I.9. Комментарий. Ошибка приведенного решения состоит в том, что по смыслу задачи натуральными являются числа x и px, а число p вполне может быть рациональным. Поэтому задача имеет больше ответов, чем приведено в ее решении.

5.I.10. Решение 1. Введем систему координат, начало которой совпадает с вершиной C прямого угла треугольника, а концы гипотенузы лежат на осях координат в точках $A(b;0)$ и $B(0;a)$. Точка E — одна из вершин квадрата (левый рисунок) — имеет координаты $(a+b;b)$.

Поэтому центр квадрата — точка M — имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. Следовательно $CM = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Тема: «Метод координат»





Решение 2. Пусть точка M — точка пересечения диагоналей квадрата. Поскольку углы ACB и AMB — прямые, то четырехугольник $ACBM$ является вписанным. По теореме Птолемея

$$CM \cdot AB = BC \cdot AM + AC \cdot BM = a \cdot \frac{AB}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{AB}{\sqrt{2}},$$

откуда и следует, что $CM = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Тема: «Вписанные четырехугольники»

Решение 3. Поскольку углы ACB и AMB — прямые, то точки M и C лежат на окружности, построенной на гипотенузе AB как на диаметре. Из треугольника ACM находим, что

$$\begin{aligned} MC = 2R\sin\bigl(\angle BAC + 45^\circ\bigr) &= \\ = AB \cdot \sin\angle BAC \cdot \cos 45^\circ + AB \cdot \cos\angle BAC \cdot \sin 45^\circ &= \\ = a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{a+b}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Тема: «Вписанные треугольники»

Решение 4. Достроим наш рисунок до рисунка, знакомого всем по доказательству теоремы Пифагора (правый рисунок). Нетрудно доказать, что точка M является центром обоих изображенных на рисунке квадратов. Поэтому CM — половина длины диагонали большего квадрата.

Тема: «Теорема Пифагора»

5.I.11. Сделав замену $y = 3^x$, получим уравнение $y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} = 6$.

Решение 1. Положим $z = \sqrt[3]{7y+6}$ и перейдем к системе

$$\begin{cases} y^3 = 7z + 6, \\ z^3 = 7y + 6. \end{cases}$$

Тогда $y^3 - z^3 = 7(z - y)$, откуда следует, что $y = z$, так как $y^2 + yz + z^2$ не может быть равно -7. В результате получим уравнение $y^3 - 7y - 6 = 0$, корнями которого являются числа $-1; -2, 3$. Так как $3^x > 0$, то $3^x = 3$, следовательно, $x = 1$.

Ответ: 1.

Тема: «Методы решения иррациональныъ уравнений»

Решение 2. Введем функцию $f(x) = \frac{1}{7}(x^3 - 6)$. Обратная ей функция $g(x)$ задается формулой $g(x) = \sqrt[3]{7x+6}$. Таким образом, уравнение $y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} = 6$ можно записать в виде $f(y) = g(y)$, или $f(f(y)) = y$. Поскольку функция $f(x)$ — возрастающая, то, как известно, решениями уравнения $f(f(y)) = y$ являются только решения уравнения $f(y) = y$, или $y^3 - 7y - 6 = 0$. Далее — как в предыдущем решении.

Тема: «Обратная функция»

Решение 3. Введем функцию $f(y) = y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} - 6$. На промежутке $[0; 2]$ она отрицательна, поскольку $f(y) < 2 - 7\sqrt[3]{6} < 0$. Так как

$$f'(y) = 3y^2 - \frac{49}{3\sqrt[3]{(7y+6)^2}} > 0 \text{ при } y \geqslant 2,$$

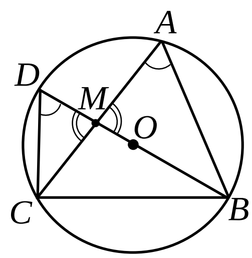
то $f(y)$ возрастает на промежутке $[2; +\infty)$, значит, имеет на нем не более одного корня. Так как $f(3) = 0$, то $y = 3$.

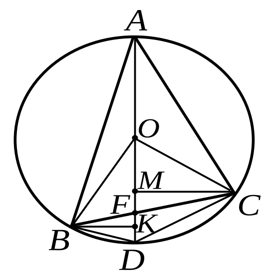
Тема: «Применение производной для исследования функций»

5.I.12. Решение 1. Ясно, что если треугольник — прямоугольный, то $P = a + b + c > 2c = 4R$. Рассмотрим теперь остроугольный треугольник ABC с периметром P и радиусом R описанной вокруг него окружности. Впишем в эту окружность прямоугольный треугольник DBC (левый рисунок). Поскольку $\angle ACB < 90°$, то луч CA пересечет отрезок BD в некоторой точке M. Так как треугольники DMC и AMB подобны, то $\frac{DM}{MA} = \frac{MC}{MB} = \frac{DC}{AB} = k < 1$. Докажем, что периметр треугольника ABC больше периметра треугольника DBC, или что $AB + AC > DB + DC$. Имеем,

$$AB+AC > DB+DC \iff AB+AM+MC > DM+MB+DC \iff$$
$$\iff AB + AM + kMB > kAM + MB + kAB \iff$$
$$\iff (1-k)AB + (1-k)AM > (1-k)MB \iff AB + AM > MB,$$

что верно.
Тема: «Подобные треугольники»





Решение 2. Рассмотрим сначала остроугольный треугольник, в котором $\angle A \leqslant \angle B < \angle C$. Пусть точка O — центр описанной окружности, отрезок AD — диаметр этой окружности, BK и CM — перпендикуляры, опущенные из точек B и C на диаметр AD. Поскольку по условию треугольник является остроугольным, то диаметр AD пересечет сторону BC треугольника в некоторой точке F (правый рисунок). Так как $\angle BAD < \angle BAC < \angle ACB$ и $\angle CAD < \angle BAC < \angle ABC$, то дуга BD окружности короче ее дуги AB и дуга CD короче дуги AC. Поэтому точки K и M — внутренние точки отрезка OD, значит, $AK > R$ и $AM > R$. С другой стороны, BK и CM — катеты прямоугольных треугольников OBK и OCM, гипотенуза которых равна R, следовательно, $BK < R$ и $CM < R$.

Отрезок BK является высотой прямоугольного треугольника ABD, значит, $BK^2 = AK \cdot KD$. Так как $BK < AK$, то $BK > KD$, а потому $AB + BF > AB + BK > AK + KD = 2R$. Аналогичным образом из треугольника ACD получаем, что $AC + CF > 2R$. Поэтому $P = AB + BC + AC = AB + BF + AC + CF > 2R + 2R = 4R$.

Для завершения доказательства заметим, что если $\angle B = \angle C$, то точки F, K и M совпадут, но все проведенные выше рассуждения сохранят силу.

Тема: «Вписанные треугольники»

Решения 3–4. Так как

$$P = a + b + c = 2R\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

то достаточно доказать, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$.

Доказательство 1. Функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$ является выпуклой вверх. Поэтому дуга ее графика на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ лежит выше хорды с концами в точках $(0;0)$ и $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Уравнение этой хорды имет вид $y = \frac{2}{\pi}\,x$, поэтому $\sin x > \frac{2}{\pi}\,x$ при всех $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \tfrac{2}{\pi}\,\alpha + \tfrac{2}{\pi}\,\beta + \tfrac{2}{\pi}\,\gamma = 2.$$

Тема: «Неравенства и выпуклые функции»

Доказательство 2. Имеем,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2} =$$
$$= 2\cos\tfrac{\gamma}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + \sin\tfrac{\gamma}{2}\right) > 2\cos\tfrac{\gamma}{2}\left(\cos\tfrac{\gamma}{2} + \sin\tfrac{\gamma}{2}\right) = 1 + \cos\gamma + \sin\gamma >$$
$$> 1 + \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 2.$$

Мы воспользовались тем, что, так как треугольник — остроугольный, то $|\alpha - \beta| < \gamma$, поэтому $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > \cos\frac{\gamma}{2}$.

Тема: «Тригонометрические преобразования»

5.II.1. Заметим, что $2 \equiv -2009 \pmod{2011}$, $4 \equiv -2007 \pmod{2011}$, $\ldots$, $2010 \equiv -1 \pmod{2011}$. Таким образом,

$$2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2010 \equiv (-2009)\cdot(-2007)\cdot\ldots\cdot(-1) \equiv -1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2009 \pmod{2011},$$

поэтому

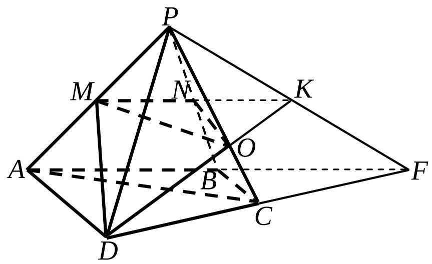
$$2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2010 + 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2009 \equiv 0 \pmod{2011},$$

что и означает, что данная сумма делится на 2011.

5.II.2. Пусть катеты прямоугольного треугольника имеют длины a и b, а длина его гипотенузы равна $a+1$. Тогда $a^2+b^2 = (a+1)^2$, откуда $b^2 = 2a+1$. Следовательно, $b = 2k+1$, поэтому $4k^2 + 4k + 1 = 2a + 1$, или $a = 2k(k+1)$.

Ответ: все треугольники с катетами $2k+1$ и $2k(k+1)$ и гипотенузой $2k^2 + 2k + 1$, где k — произвольное натуральное число.

5.II.3. Достроим пирамиду $PABCD$ до тетраэдра $PADF$ (рисунок).



Сечение тетраэдра плоскостью DMN пересекает его ребро в некоторой точке O. Четырехугольник $DMNO$ является сечением пирамиды $PABCD$ плоскостью DMN. Так как $BC \parallel AD$ и $AD = 2BC$, то BC — это средняя линия треугольника ADF, значит, точка C — середина отрезка DF. С другой стороны, по теореме Фалеса точка K — середина отрезка PF, следовательно, точка O — это точка пересечения медиан треугольника DFP, поэтому $PO : PC = 2 : 3$.

Пусть V — объем данной пирамиды. Отношение объемов пирамид $PACD$ и $PABC$ равно отношению площадей их оснований, которое равно двум. Следовательно, $V_{PACD} = \frac{2}{3}V$ и $V_{PABC} = \frac{1}{3}V$. Далее,

$$\frac{V_{PMNO}}{V_{PABC}} = \frac{PM \cdot PN \cdot PO}{PA \cdot PB \cdot PC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, \text{ поэтому } V_{PMNO} = \frac{1}{18}V.$$

Аналогичным образом,

$$\frac{V_{PMDO}}{V_{PADC}} = \frac{PM \cdot PD \cdot PO}{PA \cdot PD \cdot PC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \text{ поэтому } V_{PMDO} = \frac{2}{9}V.$$

Значит, $V_{PMNOD} = \frac{1}{18}V + \frac{2}{9}V = \frac{5}{18}V$.

Ответ: $\frac{5}{13}$.

5.II.4. Утверждение задачи следует из преобразований

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + (x+y)^4 &= 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 = \\ &= 2(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) = \\ &= 2(x^4 + y^4 + (xy)^2 + 2x \cdot xy + 2y \cdot xy + 2x^2y^2) = 2(x^2 + xy + y^2)^2. \end{aligned}$$

5.II.5. Решение 1. Пусть $\mathcal{A}$ — событие, заключающееся в том, что у второго участника «орел» выпал большее число раз, чем у первого.

Пусть $\mathcal{B}$ — событие, заключающееся в том, что у второго участника «решка» выпала большее число большее число раз, чем у первого. Ясно, что эти события равновероятны и не пересекаются. Действительно, если бы у второго и «орел», и «решка» выпали большее число раз, чем у первого, то число его бросков должно было быть по крайней мере на два больше. С другой стороны, эти события являются взаимно дополнительными, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Поэтому вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$.

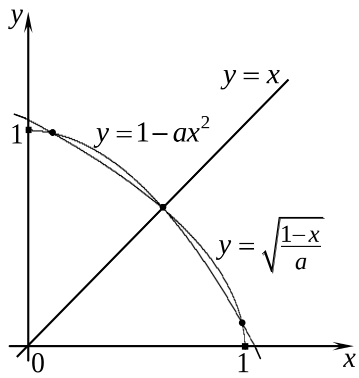
Решение 2. Обозначим через p вероятность того, что при 10 бросках у второго участника выпало «орлов» не меньше, чем у первого. Ясно, что такова же вероятность того, что у первого участника при 10 бросках выпало «орлов» не меньше, чем у второго. Поэтому вероятность того, что у первого при 10 бросках «орлов» выпало меньше, чем у второго, равна $1-p$.

Предположим, что при первом броске у второго участника выпал «орел». Вероятность этого события равна $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что при последующих 10 его бросках «орел» выпадет не меньшее число раз, чем у первого, равна p. Пусть при первом броске второго участника выпала «решка». Вероятность того, что при последующих 10 бросках у него «орел» появился большее число раз, чем у первого, равна $1-p$. Поэтому по формуле полной вероятности искомая вероятность равна $\frac{1}{2}\,p+\frac{1}{2}\,(1-p)=\frac{1}{2}$.

5.II.6. Комментарий. В приведенном решении допущены две ошибки. Во-первых, равносильность уравнений $f(f(x))=x$ и $f(x)=f^{-1}(x)$ имеет место лишь в случае, когда функция $f(x)$ является обратимой, а функция $f(x)=x^2+6x-6$ таковою не является. Кстати, само обозначение $f^{-1}(x)$ здесь неприменимо. Конечно, можно было рассматривать уравнение отдельно на промежутках монотонности $(-\infty;-3]$ и $[-3;+\infty)$ этой функции.

Во-вторых, неверно утверждение, что точки пересечения графиков взаимно обратных функций лежат на прямой $y=x$, они могут быть симметричны относительно этой прямой. В качестве примера рассмотрим функцию $y=1-ax^2$ на промежутке $[0;+\infty)$ при $a\in\left(\frac{3}{4};1\right)$ и обратную ей функцию $y=\sqrt{\frac{1-x}{a}}$. На следующем рисунке изображены их графики при $a=\frac{7}{8}$.

Ответ: $-6; 1; \frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$.



5.II.7. Решение 1. Первый вариант. Имеем,

$$2+\log_2 6 = 3+\log_2 3 > 3+\log_2 2\sqrt{2} = \tfrac{9}{2} > 2\sqrt{5}\,.$$

А можно писать оценки другим образом,

$$2\sqrt{5}-2 < 2\cdot\tfrac{9}{4}-2 = \tfrac{5}{2} < \log_2 4\sqrt{2} < \log_2 6.$$

Тема: «Степень с действительным показателем. Логарифмы»

Решение 2. Так как

$$4(2+\log_2 6) = 12+\log_2 81 > 18, \text{ а } 4\cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{320} < 18,$$

то $2\sqrt{5} < 2+\log_2 6$.

Тема: «Доказательство неравенств»

Решение 3. Имеем,

$$2+\log_2 6 > 2\sqrt{2\log_2 6} = 2\sqrt{\log_2 36} > 2\sqrt{5}\,.$$

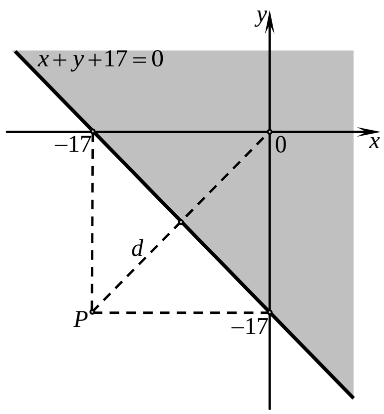
Тема: «Неравенства для средних»

Шестая олимпиада (2012 год)

6.I.1. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2xy+a=(x+y+17)^2, \\ x+y+17 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ее первое уравнение преобразуем к виду $(x+17)^2+(x+17)^2 = a+17^2$, которое при $a > -289$ является уравнением окружности с центром в точке $P(-17,-17)$ и радиусом $r = \sqrt{a+289}$. Решениями системы являются координаты точек этой окружности, лежащих в полуплоскости, задаваемой неравенством $x+y+17 \geqslant 0$. Таким образом, система имеет решение тогда и только тогда, когда радиус окружности не меньше расстояния d от точки P до прямой $x+y+17=0$ (рисунок).



Так как это расстояние есть половина диагонали квадрата со стороной 17, то $d = \frac{17}{\sqrt{2}}$. Таким образом, система имеет решение, если $\sqrt{a+289} \geqslant \frac{17}{\sqrt{2}}$, или $a+289 \geqslant \frac{289}{2}$, откуда и следует, что $a \geqslant -\frac{289}{2}$.

Ответ: $a \geqslant -\frac{289}{2}$.

6.I.2. Решение 1. Данное уравнение можно переписать в виде $2x^3+(2x+1)^3 = 0$, поэтому $x\sqrt[3]{2} = -2x-1$, откуда и следует, что $x = -\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

Решение 2. Если сделать замену $y = \frac{1}{x}$, то мы получим уравнение $y^3+6y^2+12y+10 = 0$. Сделав в нем замену $z = y+2$, получим уравнение $z^3+2 = 0$, откуда $z = -\sqrt[3]{2}$, поэтому $y = -\sqrt[3]{2}-2$, откуда $x = -\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

6.I.3. Если $n = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\dots p_k^{s_k}$, то число делителей числа n равно $(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_k+1)$. Поскольку число делителей данного числа — простое число, то само число есть степень простого числа; в данном случае $n = p^{12}$. Из следующей таблицы видно, что искомыми числами являются 3^{12} и 5^{12}.

p	2	3	5	7
p^{12}	4096	531441	244140625	13841287201

Ответ: два числа.

6.I.4. Заметим, что если $x \geqslant y \geqslant 2$, то $xy \geqslant 2x \geqslant x + y$, Таким образом, справедливы неравенства $ab \geqslant a + b$, $bc \geqslant b + c$ и $ac \geqslant a + c$. Следовательно,

$$\log_{b+c} a^2 = \frac{2\lg a}{\lg(b+c)} \geqslant \frac{2\lg a}{\lg(bc)} = \frac{2\lg a}{\lg b + \lg c}\,.$$

Аналогичным образом,

$$\log_{a+c} b^2 \geqslant \frac{2\lg b}{\lg a + \lg c} \text{ и } \log_{a+b} c^2 \geqslant \frac{2\lg c}{\lg a + \lg b}\,.$$

Положим $u = \lg a$, $v = \lg b$ и $w = \lg c$. Для доказательства данного неравенства достаточно доказать, что

$$\frac{2u}{v+w} + \frac{2v}{u+w} + \frac{2w}{u+v} \geqslant 3.$$

Полученное неравенство хорошо известно, для полноты приведем его доказательство. Сделаем еще одну замену, положив $x = v+w$, $y = u+w$ и $z = u + v$. Тогда $x + y = 2w + u + v = 2w + z$, откуда $2w = x + y - z$. Аналогично, $2u = y + z - x$ и $2v = x + z - y$.

Доказательство 1. Таким образом, после проведенной замены получим, что

$$\frac{y+z-x}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} = \\ = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} - 3 \geqslant 2 + 2 + 2 - 3 = 3.$$

Доказательство 2.

$$\frac{y+z-x}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} = \\ = \frac{y+z+x}{x} + \frac{x+z+y}{y} + \frac{x+y+z}{z} - 6 = \\ = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 6 \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} - 6 = 3.$$

6.I.5. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии. Так как $x_2^3 = x_1x_2x_3 = -c$, то $x_2 = -\sqrt[3]{c}$. Подставив найденное значение в данный многочлен, получим, что $-c + a\sqrt[3]{c^2} - b\sqrt[3]{c} + c = 0$, откуда $a\sqrt[3]{c^2} = b\sqrt[3]{c}$. Так как $x_2 \neq 0$, то отсюда следует, что $a^3c = b^3$.

Теперь предположим, что $a^3c = b^3$, и найдем дополнительное условие, при котором многочлен будет иметь три действительных корня, образующих геометрическую прогрессию. Заметим, что числа a и b обращаются в нуль одновременно, а уравнение $x^3 + c = 0$ имеет только один действительный корень. Поэтому $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Имеем,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + \frac{b^3}{a^3} + ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = \\ = \left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x^2 + \left(a - \frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Положим $x_2 = -\frac{b}{a}$. Найдем условия, при которых стоящий в скобках квадратный трехчлен имеет действительные корни, для чего найдем его дискриминант. Имеем,

$$D = \left(a - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4b^2}{a^2} = a^2 - 2b - \frac{3b^2}{a^2} = \\ = \frac{a^4 - 2a^2b - 3b^2}{a^2} = -\frac{(3b - a^2)(b + a^2)}{a^2}.$$

Поэтому многочлен имеет два различных корня тогда и только тогда, когда справедливы неравенства $-a^2 < b < \frac{a^2}{3}$. Осталось заметить, что если x_1 и x_3 — корни этого трехчлена, то $x_1x_3 = \frac{b^2}{a^2} = x_2^2$, поэтому числа x_1, x_2 и x_3 образуют геометрическую прогрессию.

Ответ: $a^3c = b^3$, при этом $-a^2 < b < \frac{a^2}{3}$.

6.I.6. Выберем систему координат, началом которой является центр семиугольника, а ось абсцисс совпадает с рассматриваемой прямой. Будем для удобства считать, что радиус окружности, описанной около этого семиугольника, равен 1. Координатами вершин A_k семиугольника являются пары $\left(\cos\left(\alpha + \frac{2\pi k}{7}\right); \sin\left(\alpha + \frac{2\pi k}{7}\right)\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 6$. Сумма квадратов расстояний до рассматриваемой прямой — оси абсцисс — равна

$$\sum_{k=0}^{6} \sin^2\left(\alpha + \tfrac{2\pi k}{7}\right) = \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{6} \cos\left(2\alpha + \tfrac{4\pi k}{7}\right).$$

Докажем, что сумма косинусов равна нулю, откуда и будет следовать, что сумма квадратов расстояний не зависит от выбора прямой.

Доказательство 1. Домножив сумму косинусов на $2\sin\frac{2\pi}{7}$, получим

$$\sum_{k=0}^{6} 2\sin\tfrac{2\pi}{7}\cos\bigl(2\alpha+\tfrac{4\pi k}{7}\bigr) =$$
$$= \sum_{k=0}^{6}\Bigl(\sin\bigl(2\alpha+\tfrac{2\pi(2k+1)}{7}\bigr)-\sin\bigl(2\alpha+\tfrac{2\pi(2k-1)}{7}\bigr)\Bigr) =$$
$$= \sin\bigl(2\alpha+\tfrac{26\pi}{7}\bigr)-\sin\bigl(2\alpha-\tfrac{2\pi}{7}\bigr)=0.$$

Доказательство 2. Введем комплексные числа $u=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$ и $v=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$. Так как $v^7=1$, то $u+uv+\ldots+uv^6=\frac{u(v^7-1)}{v-1}=0$. Осталось заметить, что действительная часть найденной суммы и равна сумме $\sum_{k=0}^{6}\cos\bigl(2\alpha+\frac{4\pi k}{7}\bigr)$.

Доказательство 3. Воспользуемся тем, что сумма векторов, идущих из центра правильного семиугольника в его вершины, равна нулю. Значит, равна нулю и сумма их проекций на ось абсцисс. Следовательно,

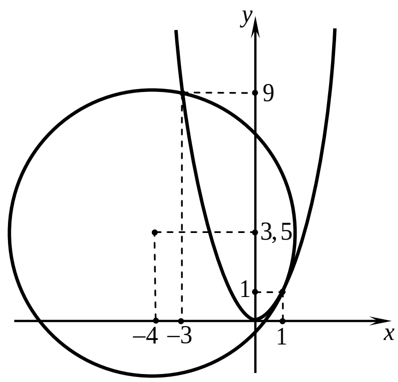
$$\sum_{k=0}^{6}\cos\bigl(2\alpha+\tfrac{4\pi k}{7}\bigr)=\sum_{k=0}^{6}\cos\bigl(2\alpha+\tfrac{2\pi k}{7}\bigr)=0.$$

6.I.7. Конечно, мы можем расположить окружность так, чтобы она касалась параболы в двух различных точках. Для этого можно взять окружность небольшого радиуса внутри параболы и опустить ее вниз так, чтобы она ее коснулась. Ясно при этом, что центр этой окружности будет лежать на оси симметрии параболы. Однако в задаче речь идет о другом. Спрашивается, а возможно ли, чтобы вторая из их общих точек не была точкой касания.

Рассмотрим параболу $y=x^2$ и окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Абсциссы точек пересечения параболы и окружности являются решениями уравнения

$$(x-x_0)^2+(x^2-y_0)^2=r^2.$$

Таким образом, они являются корнями многочлена степени 4. По предположению он имеет два корня x_1 и x_2, являющихся абсциссами точек пересечения параболы и окружности. Если x_1 — это абсцисса точки касания, то x_1 — кратный корень многочлена. Если кратность этого корня равна двум, то число x_2 также будет кратным корнем, следовательно, вторая из точек пересечения параболы и окружности также будет их точкой касания. Но ведь гипотетически возможна ситуация, в которой число x_1 будет корнем кратности три.



Пусть одной из точек пересечения является точка $A(1,1)$. Касательная к параболе в этой точке задается уравнением $y = 2x - 1$. Пусть P — центр окружности. Поскольку эта прямая является и касательной к окружности, то вектор $\overline{AP}$ перпендикулярен касательной, значит, параллелен вектору $\boldsymbol{a}(-2;1)$. Следовательно, точка P имеет координаты $(1-2t;1+t)$, при этом $r^2 = 5t^2$. Таким образом, абсциссы точек пересечения являются корнями уравнения

$$(x-1+2t)^2 + \left(x^2-1-t\right)^2 = 5t^2.$$

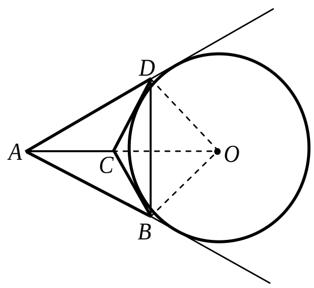
По построению при любом t число $x = 1$ является кратным корнем этого уравнения, идея состоит в том, чтобы подобрать значение t так, чтобы это число было бы корнем кратности три. Проведем соответствующее преобразование,

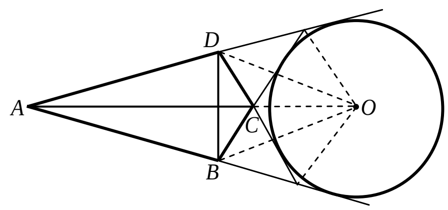
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1+2t)^2 + \left(x^2-1-t\right)^2 - 5t^2 = \\ &= (x-1)^2 + 4t(x-1) + \left(x^2-1\right)^2 - 2t(x^2-1) = \\ &= (x-1)\left(x-1+4t+(x-1)(x+1)^2 - 2t(x+1)\right) = \\ &= (x-1)\left(x-1+(x-1)(x+1)^2 - 2t(x-1)\right) = \\ &= (x-1)^2\left((x+1)^2+1-2t\right). \end{aligned}$$

Следовательно, $x = 1$ является корнем кратности три, если $(x+1)^2 + 1 - 2t = 0$ при $x = 1$, откуда $t = \frac{5}{2}$. Поскольку при найденном значении t получаем, что $f(x) = (x-1)^3(x+3)$, то второй точкой пересечения параболы $y = x^2$ и окружности $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$ будет точка $B(-3; 9)$.

Ответ: нет, не верно.

6.I.8. Комментарий. Ошибка приведенного решения состояла в том, что в нем не были рассмотрены случаи, когда основание высоты пирамиды лежит все ее основания. В каждом из двух возможных случаев основанием высоты является центр окружности, касающейся прямых, содержащих стороны основания этой пирамиды (см. рисунки).

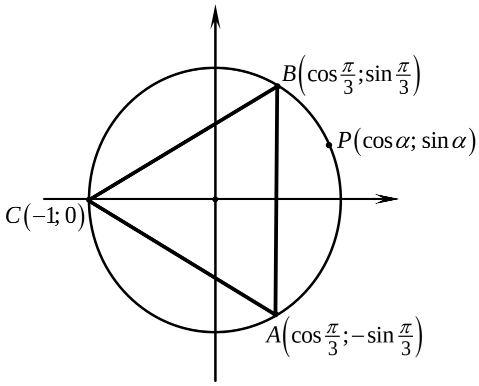




6.I.9. Комментарий. Ошибка приведенного решения состояла в том, что функция $f(x)$ определена не во всех точках промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. К примеру, $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а выражение $\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right)\right)$ не имеет смысла.

Таким образом, решение неверно, как, впрочем, и само утверждение. Например, при $x = \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{3}$ левая часть данного неравенства отрицательна, тогда как правая — положительна.

6.I.10. Решение 1. Без потери общности можно считать, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника, равен 1. Расположим треугольник ABC на координатной плоскости так, чтобы его вершины имели координаты: $A\left(\cos \frac{\pi}{3}; -\sin \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\cos \frac{\pi}{3}; \sin \frac{\pi}{3}\right)$ и $C(-1; 0)$ (рисунок). Тогда координатами точки P являются числа $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, где $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{3}$. Вычислим расстояния от точки P до вершин треугольника,



Имеем,

$$\begin{aligned} PC &= \sqrt{(\cos\alpha+1)^2+\sin^2\alpha} = \sqrt{2+2\cos\alpha} = 2\cos\tfrac{\alpha}{2},\\ PA &= \sqrt{\left(\cos\alpha-\cos\tfrac{\pi}{3}\right)^2+\left(\sin\alpha+\sin\tfrac{\pi}{3}\right)^2} =\\ &= \sqrt{2-2\cos\left(\alpha+\tfrac{\pi}{3}\right)} = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{\alpha}{2}\right),\\ PB &= \sqrt{\left(\cos\alpha-\cos\tfrac{\pi}{3}\right)^2+\left(\sin\alpha-\sin\tfrac{\pi}{3}\right)^2} =\\ &= \sqrt{2-2\cos\left(\alpha-\tfrac{\pi}{3}\right)} = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\,\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$.
Тема: «Метод координат. Преобразования тригонометрических выражений».

Решение 2. Положим $a = PA$, $b = PB$ и $c = PC$. Так как $\angle APC = \angle PBC = 60^\circ$, то из теоремы косинусов получаем, что

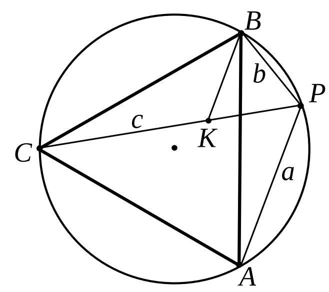
$$c^2+a^2-ac = AC^2 = BC^2 = c^2+b^2-bc,$$

откуда

$$(a-b)(a+b)-c(a-b)=0 \iff (a-b)(a+b-c)=0.$$

Если $a \neq b$, то $a+b=c$. Если $a=b$, то PC — диаметр окружности, а PA и PB — ее радиусы, так что и в этом случае $PC = PA+PB$.
Тема: «Вписанный угол. Теорема косинусов».

Решение 3. Рассмотрим точку K отрезка PC, такую что $PK = PB$ (рисунок).



Так как $\angle BPK = 60^\circ$, то треугольник BPK — равносторонний, в частности, $BK = BP$ и $\angle PBK = 60^\circ$. Поэтому при повороте на угол 60° вокруг точки B точка P перейдет в точку K. Поскольку при этом повороте точка A переходит в точку C, то отрезок PA перейдет в отрезок KC, значит, $PA = KC$. Поэтому $PC = PK + KC = PA + PB$.
Тема: «Геометрические преобразования».

Решение 4. Установим связь с другой известной задачей. Найдем множество точек, сумма квадратов расстояний от которой до трех данных точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и $(x_3; y_3)$ постоянна. Это множество задается уравнением

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = q.$$

Преобразуя его, получим уравнение

$$3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + 3y^2 - 2(y_1 + y_2 + y_3)y = q_1,$$

или уравнение

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2 = q_2,$$

задающее при $q_2 > 0$ окружность, центром которой является центр тяжести данной системы точек (точка пересечения медиан треугольника с вершинами в данных точках).

Обозначим через d длину стороны треугольника ABC. В обозначениях из решения 2 имеем,

$$a^2 + b^2 + c^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 = CA^2 + CB^2 + CC^2 = 2d^2.$$

По теореме косинусов $d^2 = a^2 + b^2 + ab$, следовательно, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$, откуда $c = a + b$.
Тема: «Метод координат. Уравнение окружности».

6.I.11. Решение 1. Положим $q(x) = x^4 - x(x-a)(x-b)(x-c)$. Ясно, что это — кубический многочлен, такой что $q(a) = a^4$, $q(b) = b^4$ и $q(c) = c^4$. Его старшим коэффициентом является число $a + b + c$. Поэтому искомым квадратным трехчленом является трехчлен

$$p(x) = x^4 - x(x-a)(x-b)(x-c) - (a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c) =$$
$$= (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)x^2 - (a+b)(b+c)(c+a)x + abc(a+b+c).$$

Тема: «Корни многочленов»

Решение 2. Пусть $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Тогда

$$\begin{cases} a^2A + aB + C = a^4. \\ b^2A = bB + C = b^4, \\ c^2A + cB + C = c^4. \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первых двух, получим систему

$$\begin{cases} (a^2 - c^2)A + (a-c)B = a^4 - c^4, \\ (b^2 - c^2)A + (b-c)B = b^4 - c^4. \end{cases}$$

Поскольку $a \neq c$ и $b \neq c$, то, сокращая на $a-c$ и $b-c$, получаем систему

$$\begin{cases} (a+c)A + B = a^3 + a^2c + ac^2 + c^3, \\ (b+c)A + B = b^3 + b^2c + bc^2 + c^3, \end{cases}$$

поэтому $(a-b)A = a^3 - b^3 + ac(a-b) + c^2(a-b)$, следовательно,

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac.$$

Далее,

$$B = a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 - (a+c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) =$$
$$= -(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 2abc) = -(a+b)(b+c)(a+c).$$

Наконец,

$$C = a^4 - a^2A - aB = a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a+b+c).$$

Тема: «Метод неопределенных коэффициентов»

Решение 3. Ответом является так называемый *интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$p(x) = \frac{a^4(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\,.$$

Интересно заметить, что, сопоставив ответ в этом решении с предыдущими ответами, мы получим равенство

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac.$$

Тема: «Специальные многочлены»

Решение 4. Ответом является так называемый *интерполяционный многочлен Ньютона.* Вначале построим линейную функцию $q(x)$, такую, что $q(a) = a^4$ и $q(b) = b^4$. Ясно, что

$$q(x) = a^4 + \frac{b^4 - a^4}{b-a}\,(x-a) = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x - ab(a^2 + ab + b^2).$$

Квадратный трехчлен будем искать в виде $p(x) = q(x)+\alpha(x-a)(x-b)$. Поскольку при любом значении α справедливы равенства $p(a) = a^4$ и $p(b) = b^4$, то коэффицент α надо подобрать так, чтобы $p(c) = c^4$. Таким образом, $\alpha = \frac{c^4-q(c)}{(c-a)(c-b)}$. Далее имеем,

$$\begin{aligned}
c^4 - q(c) &= c^4 - a^3c - a^2bc - ab^2c - b^3c + a^3b + a^2b^2 + ab^3 = \\
&= (c-a)(c^3 + c^2a + ca^2) - a^2b(c-a) - ab^2(c-a) - b^3(c-a) = \\
&= (c-a)(c^3 + ac^2 + a^2c - a^2b - ab^2 - b^3 = \\
&= (c-a)\big((c-b)(c^2+bc+b^2) + (c-b)(ab+ac) + a^2(c-b)\big) = \\
&= (c-a)(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac).
\end{aligned}$$

Поэтому $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac$ и, следовательно,

$$p(x) = (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)(x-a)(x-b)+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(x-a)+a^4.$$

Тема: «Специальные многочлены»

6.I.12. Доказательство 1. Без потери общности можно считать, что вершина A совпадает с началом координат. Пусть две другие вершины имеют координаты $B(x_1; y_1; z_1)$ и $C(x_2; y_2; z_2)$. Так как

$$|\overline{OB}||\overline{OC}|\cos\angle BOC = \overline{OB}\cdot\overline{OC} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

то

$$
\begin{aligned}
4S_{OBC}^2 = |\overline{OB}|^2|\overline{OC}|^2 \sin^2\angle BOC =\\
= |\overline{OB}|^2|\overline{OC}|^2 - |\overline{OB}|^2|\overline{OC}|^2\cos^2\angle BOC =\\
= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 =\\
= (x_1y_2-x_2y_1)^2 + (y_1z_2-y_2z_1)^2 + (z_1x_2-z_2x_1)^2.
\end{aligned}
$$

Проекциями точек B и C на плоскость Oxy вляются точки $B_1(x_1;y_1;0)$ и $C_1(x_2;y_2;0)$. Подставив их координаты в найденную формулу, получим, что $2S_{xy} = |x_1y_2 - x_2y_1|$. Аналогичным образом получаем формулы $2S_{yz} = |y_1z_2 - y_2z_1|$ и $2S_{xz} = |z_1x_2 - z_2x_1|$. Таким образом, в левой части полученной формулы стоит сумма $4(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2)$, что и требовалось доказать.
Тема: «Метод координат»

Доказательства 2 и 3. Обозначим через α, β и γ углы, которые образует плоскость треугольника ABC с координатными плоскостями Oyz, Oxz и Oxy, соответственно. Пусть S — площадь треугольника ABC. В силу теоремы о площади проекции справедливы равенства $S_{xy} = S\cos\gamma$, $S_{yz} = S\cos\alpha$ и $S_{xz} = S\cos\beta$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$, что мы сделаем двумя различными способами.

Способ 1. Пусть $\overline{OM}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости треугольника ABC. Углы, которые он образует с осями координат, равны, соответственно, α, β и γ. Следовательно, этот вектор имеет координаты $(\pm\cos\alpha, \pm\cos\beta, \pm\cos\gamma)$. Поскольку длина этого вектора равна единице, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
Тема: «Векторы и координаты»

Способ 2. Обозначим через P, Q и R точки пересечения плоскости треугольника ABC с осями координат. Пусть H — проекция начала координат на эту плоскость. Имеем, $S_{PQH} = S_{PQO}\cos\gamma = S_{PQR}\cos^2\gamma$. Аналогичным образом $S_{PRH} = S_{PQR}\cos^2\beta$ и $S_{QRH} = S_{PQR}\cos^2\alpha$. Искомое равенство является следствием очевидного соотношения $S_{PQR} = S_{PQH} + S_{QRH} + S_{PRH}$.
Тема: «Площади проекций»

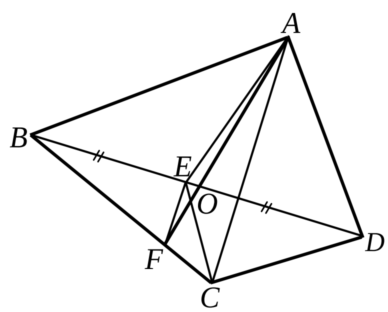
6.II.1. Перепишем уравнение в виде $3^{x^2-4}(3^{x+2}-1) = 80$ и положим $f(x) = 3^{x^2-4}(3^{x+2}-1)$. Если $x \leqslant -2$, то $f(x) \leqslant 0$, следовательно, на промежутке $(-\infty;-2]$ данное уравнение решений не имеет. Если $-2 < x \leqslant 0$, то $0 < 3^{x+2} - 1 \leqslant 8$ и $3^{x^2-4} \leqslant 1$, поэтому $f(x) \leqslant 1$, следовательно, и на промежутке $(-2; 0]$ уравнение не имеет решений. Теперь заметим, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, поэтому данное уравнение имеет не более одного решения. Осталось заметить, что $f(2) = 80$, поэтому $x = 2$ является решением уравнения. *Ответ:* $\{2\}$.

6.II.2. Так как $f(x+2) + f(x) = x$, то $f(x+4) + f(x+2) = x+2$, поэтому

$$f(x+4) = x + 2 - f(x+2) = x + 2 - (x - f(x)) = f(x) + 2.$$

Следовательно, $f(2012) = f(0) + 2 \cdot 503 = 1006$.

6.II.3. Пусть E — середина диагонали BD четырехугольника $ABCD$. Если $E \in AC$, то AC — искомая прямая. Пусть $E \notin AC$. Без потери общности предположим, что точки B и E лежат по одну сторону от диагонали AC (рисунок).



Имеем,

$$S_{ADCE} = S_{ADE} + S_{DCE} = S_{ABE} + S_{DEC} = S_{ABCE},$$

таким образом, $S_{ADCE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Проведем через точку E прямую, параллельную диагонали AC и обозначим через F ее точку пересечения со стороной BC. Так как $S_{ACF} = S_{ACE}$, то

$$S_{ADCF} = S_{ACD} + S_{ACF} = S_{ACD} + S_{ACE} = S_{ADCE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Следовательно, прямая AF делит данный четырехугольник на равновеликие части.

6.II.4а. Прямая, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является серединным перпендикуляром к каждому из этих ребер. Поэтому при повороте на угол 180° вокруг этой прямой каждое из этих ребер, а, значит, и весь тетраэдр, отображается на себя. Также на себя отображается и любая плоскость, содержащая эту прямую. Таким образом, части, на которые плоскость разделила тетраэдр, равны друг другу; в частности, они равновелики.

4б. Доказательство 1. Построим линейное отображение f пространства в себя, переводящее произвольный тетраэдр $OABC$ в правильный тетраэдр $OPQR$. Рассмотрим произвольную точку M и разложим вектор $\overline{OM}$ по базису $\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}$,

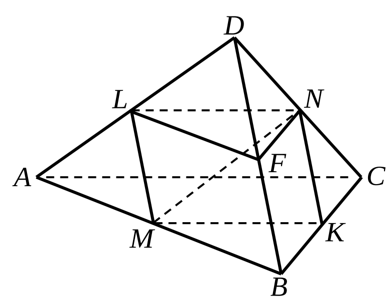
$$\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}.$$

Положим по определению $F(M) = K$, где K — это такая точка, что

$$\overline{OK} = x\overline{OP} + y\overline{OQ} + z\overline{OR}.$$

Таким образом, f является линейным отображением пространства, переводящим тетраэдр $OABC$ в правильный тетраэдр $OPQR$. Известно, что если V — это объем некоторого тела и V' — объем образа этого тела при линейном отображении, то $V' = cV$, где константа c зависит только от отображения и не зависит от выбора тела. Как следствие получаем, что сохраняется отношение объемов тел. Поэтому утверждение предыдущего пункта будет верно и для произвольного тетраэдра.

Доказательство 2. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, точки M и N — середины его ребер AB и CD (рисунок).

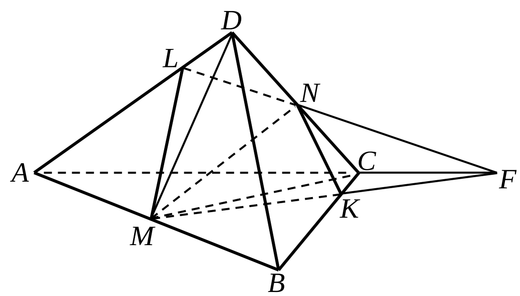


Обозначим через V объем этого тетраэдра. Решение будет состоять из нескольких шагов.

1. Если плоскость, проходящая через прямую MN, параллельна ребру BD, то она делит тетраэдр на две части, каждая из которых состоит из треугольной призмы и треугольной пирамиды, площади оснований которых равны четверти площади S основания данного тетраэдра, а высоты равны половине его высоты H. Поэтому объем каждой части равен $\frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}H + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}H = \frac{3}{8}V + \frac{1}{8}V = \frac{1}{2}V$.

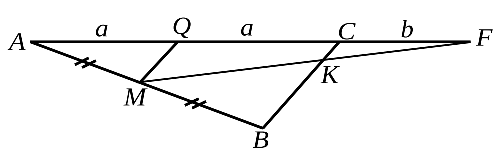
2. Если сечением тетраэдра является треугольник CDM, то оно делит данный тетраэдр на два равновеликих тетраэдра $DAMC$ и $DBMC$ с общей высотой, проведенной из вершины D, и равновеликими основаниями AMC и BMC.

3. Рассмотрим теперь сечение $KMLN$ тетраэдра плоскостью, не параллельной ни одному из ребер тетраэдра (рисунок).

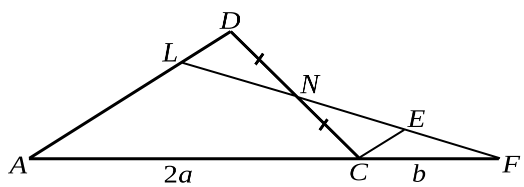


Поскольку $V_{DAMC} = V_{DBMC} = \frac{1}{2}V$, то достаточно показать, что $V_{DLMN} = V_{CKMN}$.

а) Положим $AC = 2a$, $CF = b$ и проведем отрезок MQ — среднюю линию треугольника ABC (рисунок). Из подобия треугольников FKC и FMQ следует, что $\frac{CK}{MQ} = \frac{b}{a+b}$ и $\frac{CK}{CB} = \frac{b}{2(a+b)}$.



б) В плоскости грани ADC проведем прямую, параллельную AD; пусть E — точка ее пересечения с отрезком FN (рисунок). Из подобия треугольников FEC и FLA и равенства треугольников ECN и LDN следует, что $\frac{AL}{CE} = \frac{2a+b}{b}$, $\frac{DL}{DL} = \frac{2a+b}{b}$ и $\frac{DL}{DA} = \frac{b}{2(a+b)}$.



Поэтому $\dfrac{V_{DLMN}}{V_{DAMC}} = \dfrac{DL \cdot DM \cdot DN}{DA \cdot DM \cdot DC}$, следовательно $V_{DLMN} = \dfrac{b}{4(a+b)} \cdot V_{DAMC} = \dfrac{bV}{8(a+b)}$, Аналогичным образом, $\dfrac{V_{CKMN}}{V_{CBMD}} = \dfrac{CK \cdot CM \cdot CN}{CB \cdot CM \cdot CD}$, откуда $V_{CKMN} = \dfrac{b}{4(a+b)} \cdot V_{CBDM} = \dfrac{bV}{8(a+b)}$, таким образом, $V_{DLMN} = V_{CRMN}$, поэтому

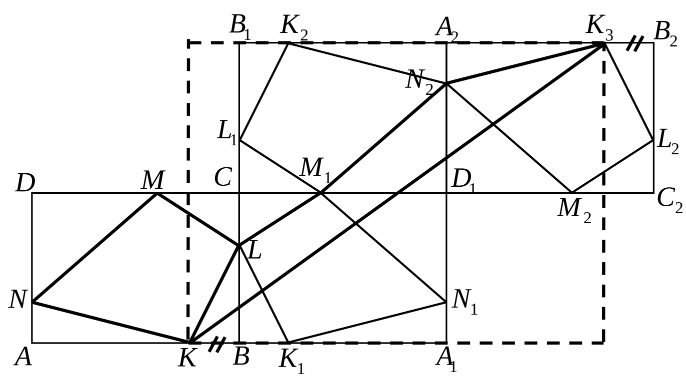
$$V_{BMKLDN} = V_{BCDM} - V_{CKMN} + V_{DLMN} = \frac{1}{2}V.$$

6.II.5. Так как $n(n+1)$ — четное число, то число n^2+n+11 является нечетным, а поэтому это число не делится на 2. Поскольку $n^2+n+11 = (n-1)^2+1+3n+9$, то число n^2+n+11 не делится на 3, поскольку никакой полный квадрат не может иметь остаток 2 при делении на 3. Так как $n^2+n+11 = (n-2)^2+2+5n+5$, то в силу аналогичных соображений это число не делится на 5. Далее, поскольку $n^2+n+11 = (n-3)^2+2+7n$, то это число не делится и на 7 в силу того, что никакой полный квадрат не может иметь остаток 5 при делении на 7. Заметим, наконец, что при $n=0$ число n^2+n+11 делится на 11. Поэтому 11 и является наименьшим простым делителем среди всех делителей чисел вида n^2+n+11.

6.II.6. Комментарий. Во всех приведенных решениях допущена одна и та же ошибка. Именно, рассматриваемые в них системы событий не состоят из равновероятных событий.

Пример верного решения. Количество всех возможных вариантов расположения карт равно $6! = 720$. При этом в $36 = 3! \cdot 3!$ вариантах сверху лежат красные карты, а снизу — черные, и есть столько же вариантов, в которых сверху лежат три черные карты. Поэтому всего имеется $36 + 36 = 72$ подходящих вариантов, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{10}$.

6.II.7. Решение 1. Сделаем последовательно три осевые симметрии: относительно прямой BC, прямой CD и прямой A_1D_1 — образа прямой AD при первой симметрии (рисунок).

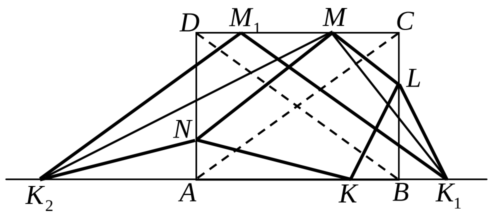


Образы сторон четырехугольника $KLMN$ образуют четырехзвенную ломаную $KLM_1N_2K_3$, концы которой соединены отрезком KK_3, длина которого равна удвоенной длине диагонали четырехугольника $ABCD$. Поскольку периметр четырехугольника $KLMN$ равен длине ломаной, то он не меньше удвоенной длины диагонали данного прямоугольника.

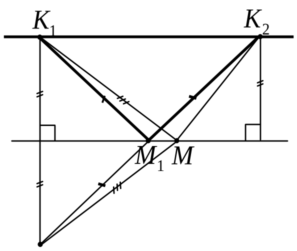
Тема: «Геометрические преобразования».

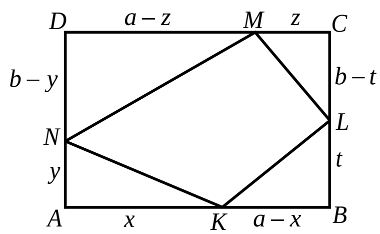
Решение 2. Пусть точка K_1 симметрична вершине K четырехугольника относительно стороны BC прямоугольника, а точка K_2 симметрична K относительно его стороны AD (рисунок).

Периметр четырехугольника $KLMN$ совпадает с длиной ломаной K_1LMNK_2, которая не меньше суммы длин боковых сторон K_1M и K_2M треугольника K_1K_2M.



Осталось заметить, что эта сумма принимает наименьшее значение тогда, когда этот треугольник — равнобедренный (левый рисунок).





В этом случае $K_1M_1 = K_2M_1 = AC$, откуда и следует, что $P_{KLMN} \geqslant 2AC$.

Тема: «Геометрические преобразования»

Решение 3. Положим $a = AB$ и $b = AD$ и обозначим через x, y, z и t длины отрезков AK, AN, MC и BL (правый рисунок). Тогда

$$KL + LM + MN + NK =$$
$$= \sqrt{(a-x)^2 + t^2} + \sqrt{(b-t)^2 + z^2} + \sqrt{(a-z)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Рассмотрим векторы $\boldsymbol{m}(x;y)$, $\boldsymbol{n}(a-x;t)$, $\boldsymbol{p}(z;b-t)$, $\boldsymbol{q}(a-x;b-y)$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$. Поскольку координатами вектора $\boldsymbol{u}$ являются числа $(2a;2b)$, то

$$2|AC| = 2\sqrt{a^2+b^2} = |\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}| \leqslant |\boldsymbol{m}| + |\boldsymbol{n}| + |\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(a-x)^2 + t^2} + \sqrt{(b-t)^2 + z^2} + \sqrt{(a-z)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant$$
$$\leqslant KL + LM + MN + NK\,.$$

Тема: «Векторы и координаты»

Задачи олимпиад Эйлера

Санкт-Петербург
2013 г.

Составители:

Вольфсон Георгий Игоревич
Гольховой Владимир Михайлович
Жигулев Леонид Александрович
Иванов Олег Александрович
Некрасов Владимир Борисович

Редакторы:

Иванов О. А. и Некрасов В. Б.

Компьютерная верстка:

Иванов О. А.

Подписано в печать 01.07.2013
Формат $60 \times 90\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7,25.
Тираж 1500 экз.

Отпечатано в типографии издательства «Левша. Санкт-Петербург».
197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6.