Проблемы школьного углубленного математического образования (полемические заметки)

Иванов О. А.

По причинам, который будут ясны из дальнейшего, в данной статье[1] автор сознательно ограничился проблемами углубленного преподавания математики в школе, оставив "за скобками"внеклассную деятельность (математические кружки, олимпиады, турниры и т. п.). Мы в СССР, а теперь в России всегда гордились нашей системой работы со школьниками по математике, начало которой было положено в конце 30-х годов. Автор сам закончил "тридцатку— одну из школ ленинградской "большой тройки"(30, 239, 45-й интернат), далее, учась, а затем работая на матмехе ЛГУ, преподавал в кружках, а затем получил возможность посмотреть на результаты всей системы, так сказать, на ее выходе, участвуя, с одной стороны, в работе Санкт-Петербургской городской комиссии по проведению выпускного экзамена по математике, с другой — в приеме на математико-механический факультет СПбГУ.

К сожадению, приходится с грустью констатировать, что несмотря на почти сорокалетнюю историю специализированных математических школ и классов, **система** углубленного математического образования так и не была создана. Дело в том, что все достигнутые результаты (а их, конечно, немало) связаны с успешной работой на, условно говоря, элитарном уровне со школьниками, составляющими где-то 0,2–0,3% от общего числа учащихся. Таким образом, если в С-Петербурге в последние годы школу заканчивают около 30000 ребят и девушек, то лишь 50–100 можно считать получившими хорошее математическое образование. Между тем примерно 2000 от общего числа выпускников школ города (т. е. примерно 7%) учились в классах с углубленным изучением математики. Однако **интересы общества** связаны с качеством математического образования, полученного именно 5–10% от общего числа учащихся школ, т. е. тех, чья будущая профессия лежит в естественно-научной области. Нас и далее не будет никто понимать, если мы будем ограничиваться интересами и продолжать работать с 0,2%-ной группой учащихся (так сказать, будущих математиков), игнорируя 10%-ную. А между ними пока лежит пропасть!

За доказательством далеко ходить не надо. К примеру, осенью этого года автор приобрел книгу "Алгебра и начала анализа. 8–11 классы.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики"(Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочкин, М. В. Чичкина) серии "Дидактические материалы"издательства "Дрофа". Сравните уровень заданий, предлагаемых в этом пособии, с задачами контрольных работ программы "Матшкольник"(см. вып. 2 новой серии "Математическое Просвещение"), или же с задачами С-Петербургского профильно-элитарного выпускного экзамена!

Те статистические данные, которые приводятся далее, не являются безусловным обоснованием высказанной пессимистической точки зрения. Однако на их основе автор вправе дать свою экспертную оценку общего состояния, как профессиональный математик, университетский преподаватель, научный работник в области математического образования и школьный учитель.

[1]Эта статья представляет собой журнальный вариант доклада, прочитанного автором на Всероссийской конференции "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков"(Дубна. Сентябрь 2000). Полностью доклад будет опубликован в материалах конференции.

Математико-механический факультет СПбГУ в течение 11 лет проводит олимпиаду для одиннадцатиклассников. Перед вами задачи последней олимпиады.

Олимпиада выпускников 2000 года

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3 и 5?

б) Решите уравнение $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 2000$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$ (тем самым с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5$.

б) Решите уравнение $\sqrt{a + 2\cos 2x} = a\cos x$.

в) Внутри угла величиной 60° с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [A'D']$, $L \in [B'C']$ и $M \in [BB']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $16:9$, $2:3$ и $1:2$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2, & \text{если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 9, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический "хвост", т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geq N$.

Решения задач приведены в конце этой статьи, автор советует читателю вначале решить их самостоятельно с тем, чтобы понять уровень сложности и требований, предъявляемых к учащимся.

В пункте 1 собраны несложные задачи "олимпиадного"характера, в пункте 2 — стандартные "школьные"задачи, некоторую трудность может представлять только задача 3. Автор считает, что всякий образованный "матшкольник"обязан за 4 часа решить по крайней мере половину из предложенных девяти задач.

А теперь посмотрим на статистические данные по итогам проверки работ. Среди 400 участников олимпиады 17% не решили ничего, 19% решили одну задачу, 32% — две-три задачи, 12% — четыре, 13% — пять-шесть, и только 7% решили семь задач и более. Таким образом, только 20% из числа всех участников решили половину из предлагавшихся задач, а если откинуть учащихся 10-1 класса школы 239 ("элиту"города, параллельно в течение нескольких лет обучающихся в кружках), а также иногородних участников, то этот процент снизится до 10.

По мнению автора, математическое образование, которое получает большинство выпускников наших, в том числе — и математических, школ, чересчур формально, ребята не могут справиться с задачей, если существенную (хотя бы и небольшую) часть ее решения составляет логическое рассуждение. Содержание обучения математике в старших классах практически всех специализированных школ во многом составляет "высшая математика 1 курса технического вуза а стиль обучения — изучение стандартных методов и схем.

Целью углубленного школьного математического образования должна быть подготовка к дальнейшему обучению в естественно-научной области, для чего необходимо решить задачу интеллектуального развития учащихся, в частности, развития математического способа мышления. Имея в виду эти цель и задачу, посмотрим на один из вариантов общероссийского выпускного экзамена для физико-математических классов.

1. Решите уравнение $\cos 4x + 5\cos^2 x = 0,75$.

2. Найдите производную функции $y = \log_{9x+1}(3x+7)$ в точке $x = 1$.

3. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 3\cos 2x + 3\sin 3x + 8$, осью абсцисс и прямыми $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$.

4. Найдите множество значений функции $y = 3x + \sqrt{7-2x}$.

5. Решите неравенство $4^x + 6\cdot 2^{|x|} \geq \frac{49}{4}$.

6. На прямой $y = 2x - 1$ найдите все такие точки, что через каждую из них проходит ровно две касательных к графику функции $y = x^2$, а угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{4}$.

Естественно ожидать, что на таком экзамене хоть в некоторой степени, но должен проверяться уровень мышления выпускника, что для получения отличной оценки необходимы не только достаточно глубокие знания, но и умение рассуждать. Однако для решения предлагавшихся задач не нужно ничего, кроме знания небольшого числа рутинных приемов. (Автор бы предложил этот вариант своим ученикам для устного решения в течение одного урока.) Чуть запутаннее последняя задача, но она ничуть не менее скучна. Неужели это — *математика*?

Хорошо, будем считать, что не дело проверять уровень мышления на заключительном экзамене. Тогда давайте посмотрим на текущие задания и варианты контрольных из указанного выше пособия Л. И. Звавича и др. (те же самые претензии, и в большей степени, можно высказать к подавляющему большинству дидактических и методических материалов для углубленного изучения математики; данное пособие просто попалось автору под руку). Казалось бы, имея в виду основную задачу углубленного обучения, следовало от класса к классу повышать требования к мыслительной деятельности учащихся. Однако происходит в точности обратное. Если среди задач для 8-го класса еще есть те, для решения которых ученику необходимо подумать, то, глядя на это пособие, можно сделать вывод, что 11-класснику думать уже не обязательно. В этой связи можно упомянуть интересные данные, полученные в ходе совместного российско-британского эксперимента, которые показывают, что наши школьники плохо обучены таким общим формам математической деятельности, как кодирование имеющейся информации и интерпретация полученных результатов.

Таким образом, первый вывод, которым автор хочет сделать, состоит в том что *уровень знаний, умений и навыков учащихся специализированных школ, фиксируемый официальными проверочными работами, методическими пособиями, а также вариантами вступительных экзаменов в вузы, дезориентирует учителей, учеников и их родителей.*

Да, в России существуют школы, в которых работают учителя, обеспечивающие высокий, можно сказать, элитарный, уровень математического образования. Положительная тенденция последних 10–15 лет состоит в том, что такие школы появились во многих регионах нашей страны. Компьютерная школа в г. Белорецке; школа 1 в Брянске; Владивосток, 23; естественно-математический лицей в Вологде; Глазов, физико-математический лицей; школы 30 и 41 Ижевска; физико-математический лицей 35 в Кирове, — этот список нетрудно продолжить. Однако это не меняет сути дела:
в настоящее время система углубленного математического образования в России эффективно работает лишь в рамках 0,2%-ной группы учащихся средних учебных заведений.

Есть и другая сторона медали у сформулированного выше тезиса о "дезориентирующей роли официальных методических материалов". В своем докладе на Всероссийской конференции Р. Г. Хазанкин говорил о трудности экзаменационных заданий даже для учителей, некоторые из которых во время экзамена звонили ему из других городов. Казалось бы, это высказывание противоречит мнению автора о простоте экзаменационных материалов. Нет, это не противоречие, а следствие. Если в течение долгих лет пережевывать со своими учениками, так сказать, "математическую жвачку то в итоге сам разучишься мыслить нешаблонно. В качестве следующего вывода получаем, что
для того, чтобы перейти к углубленному математическому образованию на уровне 5–10% от общего числа учащихся, необходимо существенно повысить уровень математической компетентности учителей.

Конечно, говорить об этом в тех социальных условиях, в которых сейчас находится российская школа и работающие в ней учителя, может показаться наивностью или даже глупостью. Однако речь не идет о кардинальных улучшениях уже завтра. Многого можно добиться, если просто изменить приоритеты в учительском сознании. Приведу следующий поразивший меня пример.

В течении последних десяти лет автор всячески пропагандирует задачи, занимающие, условно говоря, промежуточное положение между школьными и олимпиадными (см., к примеру, газету "Математика 1998, вып. 17, 18, 21; журнал "Квант 1994, вып. 6; 1995, вып. 5; 1999, вып. 4). Два года назад мы попросили учителей ведущих математических школ С-Петербурга ответить на анкету, один из вопросов которой звучал следующим образом: *Оказали ли подобные "почти школьные задачи"влияние на ваше видение школьного математического образования; и, если да, то в чем?* Один из самых блестящих учителей ответил так: "Да. Смещение в сторону приоритета развития над техническими навыками."Я не сомневаюсь в том, что, работая в кружках, он занимался именно развитием своих учеников. До чего же сильно влияние стереотипов в школьном преподавании математики, что даже думающему учителю потребовался внешний толчок, чтобы сделать этот, казалось бы тривиальный, вывод.

Приведу цитату из статьи, опубликованной автором в журнале "Математика в школе"(1997, вып.6). При обучении неискушенных в математике учащихся (которые привыкли решать задачи только на определенные правила) все представляет сложность. Они не понимают: что же такое — "рассуждение" (дедуктивный аспект мышления); зачем вообще нужно что-то доказывать, а кроме того не видят логических пробелов (формально-логический аспект); не то, что не могут увидеть подход к решению, а просто не понимают, что же это такое — "идея решения" (индуктивный аспект); они не привыкли рассматривать связи между задачами (ассоциативный аспект мышления). И далее там же: *"Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, но нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и кровь и действовали с силой инстинкта"* (Пойа и Сге, из предисловия к книге "Задачи и теоремы из анализа"). В уже упоминавшемся российско-британском эксперименте была сделана попытка обратить внимание учителей на роль общих форм интеллектуальной деятельности, таких как, классификация и систематизация; кодирование, преобразование и интерпретация; выдвижение и проверка гипотез и некоторых других в процессе обучения математике. В одном из интервью английский учитель подчеркнул, насколько интересной и, как ему кажется, важной для развития его учеников оказалось проведенное в классе обсуждение смысла этих понятий.

Поэтому необходимо
разработать методические материалы (в частности, сборники задач) для школ и классов с углубленным изучением математики, в которых была бы последовательно проведена линия на интеллектуальное развитие учащихся.

Мы часто считаем, что развитие происходит само собой в процессе изучения математики и решения задач. Однако сам процесс обучения может более или же менее способствовать такому развитию. Не случайно же у одного учителя ученики добиваются большего, чем у другого. По крайней мере опыт проведения выпускных экзаменов в Петербурге показал, что на стандартном школьном материале (уравнения, неравенства, исследование функций) можно составлять достаточно содержательные в математическом и дидактическом смысле задачи, для решения которых нужно проявить не только знание, но и понимание предмета, а также умение "мыслить математически".

Хочу подчеркнуть тривиальную мысль, которую тем не менее многие упускают из виду: **Как** учат математике, даже более важно, чем **чему** же учат на уроках математики. В том же докладе Р. Г. Хазанкина говорилось, что не следует предлагать учащимся тригонометрические уравнения, требующие, как было сказано, изощренной техники, трудные задачи с параметрами, сложные задачи на прогрессии, системы уравнений, для решения которых нужно знать некоторые искусственные приемы. Автор плохо понимает, о чем идет речь. Приведу пример. В 1999 году на одном из вступительных экзаменов в СПбГУ была предложена следующая задача:
Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\arccos 3x + \arcsin(a+x) = 0$ *имеет решение,*
которая поставила в тупик большинство абитуриентов. Но сложна ли она по-существу? Если юноша или девушка обучены мыслить, понимают определения, умеют использо-

вать графическую интерпретацию уравнений, владеют стандартной техникой дифференциального исчисления, то для решения этой задачи им потребуется, может быть, полчаса. Из перечисленных требований некоторые даже излишни, однако без умений, выраженных глаголами “мыслить"и “понимать при решении этой задачи не обойтись.

Конечно, если под методикой преподавания темы “Решение тригонометрических уравнений"понимать изложение 10–20 типов уравнений со специфическими способами их решения (а так случается), то после подобного обучения даже задачи “из Сканави"будут вызывать серьезные затруднения. Если же всего лишь сместить акценты в преподавании, говоря о двух общих подходах — сведение к алгебраическому уравнению и разложение на множители, — и тренируя школьников в анализе заданного выражения и путей его преобразования, то результат будет совсем иным.

Необходимость смещения акцентов а преподавании математики связана с тем, чтобы придать смысл в противном случае бессмысленной деятельности по решению огромного числа уравнений, неравенств и их систем. Недопустимо, чтобы у учащихся складывалось впечатление, что математика только этим и занимается. Осмелюсь утверждать, что
одна из основных трудностей при преподавании математики (не на элитарном уровне) и особенно в нематематических школах состоит в необходимости придания смысла внешне бессмысленным действиям и требованиям.

В звключение не могу не сказать, что
если будет принята программа единого общероссийского тестирования, то об идее углубленного математического образования в том смысле, в котором я здесь о ней говорил, можно будет забыть. Никаких перспектив в этом случае у него не будет. Хотя элитарное углубленное, конечно, останется.

Нам часто приводят в пример имеющийся за рубежом опыт, ничего при этом не говоря, что, к примеру, в США сейчас идет острая дискуссия по поводу целесообразности общенациональных тестов. В частности отмечается, во-первых, что за последние годы в результате симбиоза компаний, проводящих тесты, и издательских компаний, получила развитие новая высокодоходная область бизнеса, а во-вторых, оказалось, что в оценке результатов тестов возможны ошибки, результатом чего уже стали судебные процессы. Наконец, приведу цитату из письма в газету “Известия"Н. Медведевой (как она сама представилась, “педагога из Ганновера"): “Да, такая система существует и в немецких гимназиях. Из-за этого к концу тринадцатого класса у ребят остается лишь одна цель — получить то количество баллов, которое дает право на продолжение учебы."

Решения задач Олимпиады–2000

1. а) *Ответ:* нет, не существует. Действительно, если $3 = 2q^k$ и $5 = 2q^n$, то $(\frac{3}{2})^n = (\frac{5}{2})^k$, т. е. $3^n = 5^k \cdot 2^{n-k}$, что невозможно.

б) *Ответ:* $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как левая часть уравнения может принимать лишь значения $a \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, то осуществим перебор. *А*) Пусть $a = 2$. Тогда $\sin 2x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Имеем $3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$, так что $[2\cos 3x] < 2$ и этот случай невозможен. *Б*) Пусть $a = 1$: $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$. В первом случае $3x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k$. Из значений $\cos 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ нам подходит только $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($[\sqrt{2}] = 1$), поэтому число k должно быть четным. Во втором случае, наоборот, n — нечетно. Поэтому $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ или $x = \pi + \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$. *В*) Пусть $a = 0$: $x = \frac{\pi k}{2}$, $\cos 3x \in \{0, \pm 1\}$. Таким образом, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. *Г*) Пусть $a = -1$: $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n$. В этом случае $[2\cos 3x] = -2; 1$, так что решений нет. *Д*) Наконец, пусть $a = -2$. Тогда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, а число k должно быть четно. Таким образом, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

в) *Ответ:* 24 точки. Имеем: $(x + y)(x - y) = 2^4 5^3$. Так как числа $x + y$ и $x - y$, будучи целыми, имеют одинаковую четность, то $x = 2a$ и $y = 2b$, где $ab = 2^2 5^3$. Таким образом, количество решений данного уравнения совпадает с количеством чисел вида $\pm 2^s 5^t$, $s = 0, 1, 2$, $t = 0, 1, 2, 3$.

г) *Ответ:* шансы первого игрока — 3 : 2, так как вероятность его победы почти равна $\frac{3}{5}$. Вероятность того, что все 40 партий закончатся вничью, равна $4^{-40} = 2^{-80} < 10^{-24}$, поэтому будем считать, что матч продолжается до первой победы. Вероятность победы игрока, который в первой партии играет белыми фигурами, равна сумме ряда

$$p + qr + pr^2 + qr^3 + \ldots = (p + qr)(1 + r^2 + r^4 + \ldots) = \frac{p + qr}{1 - r^2},$$

здесь $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ — вероятности его победы при игре белыми, соответственно, черными фигурами, $r = \frac{1}{4}$ — вероятность ничьи. *Второе решение*: Искомая вероятность является решением уравнения $x = p + rq + xr^2$.

2. а) *Ответ:* $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; +\infty)$. После стандартных преобразований получим неравенство $\frac{(x^2-x-2)(x^2+5x+10)}{(x+2)^2} \geq 0$.

б) *Ответ:* $x = \pm \arccos(-\frac{1}{\sqrt{a+2}}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in [-1; 0)$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 0$; $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{a+2}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$; $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 2$.

При $a = 2$ получаем уравнение $2|\cos x| = 2\cos x$, т. е. $\cos x \geq 0$. При $a = 0$ имеем $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Вообще, $\cos x = 0$ есть решение только при $a = 2$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $a \cos x > 0$. После замены $t = \cos x$ получим уравнение $\sqrt{a + 2(2t^2 - 1)} = at$, откуда $a - 2 = (a^2 - 4)t^2$. Случай $a = 2$ уже исследован, так что $t^2 = \frac{1}{a+2}$. Из условий $0 < \frac{1}{a+2} \leq 1$ получаем, что $a \geq -1$. Таким образом, $t = -\frac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a \in [-1; 0)$ и $t = \frac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a > 0$.

в) *Ответ:* $2\sqrt{3}$. Имеем: $\frac{KL}{\sin \alpha} = 2R = AM$, так что $KL = 4 \sin \frac{\pi}{3}$.

г) *Ответ:* пять сторон. Если расположить начало системы координат в вершине C куба, а ее оси направить по его ребрам, то из условий на точки K, L, M следует, что их координаты равны $K(1, \frac{9}{25}, 1)$, $L(0, \frac{3}{5}, 1)$, $M(0, 1, \frac{1}{3})$. Для определения коэффициентов уравнения $ax + by + cz = 1$ плоскости (KLM) получаем систему

$$\left\{ \begin{aligned} a + \tfrac{9}{25}b + c &= 1, \\ \tfrac{3}{5}b + c &= 1, \\ b + \tfrac{1}{3}c &= 1, \end{aligned} \right.$$

откуда $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{5}{6}$ и $c = \frac{1}{2}$. Найдем координаты точки P пересечения прямой AA' и плоскости KLM: $x = y = 1$, так что $z = -\frac{1}{15}$. Для контроля укажем отношения, в которых точки Q и S плоскости делят, соответственно, ребра AB и AD куба: $AQ : QB = 1 : 5$, $AS : SD = 1 : 25$.

3. а), б) *Ответ:* 14 последовательностей с начальными членами из множества $X_0 = \{1, 2, \ldots, 9, 10, 12, \ldots, 18\}$. То, что эти числа порождают периодические последовательности, проверяется непосредственно. Если $x_0 \in \{11, 13, 15, 17\}$, то $x_2 \in X_0$, поэтому такая последовательность непериодична, но ее хвост $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ периодичен. Для завершения доказательства достаточно показать, что во всякой последовательности найдется член $x_n \leq 18$. Предположим, что это не так. Если $x_k > 18$, то, как нетрудно видеть, $x_{k+2} < x_k$, однако строго убывающей последовательности, состоящей из натуральных чисел, не существует.